

УДК 624.012.45:624.072.2:624.046.2

**ЗАСТОСУВАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ДЕФОРМАЦІЙНОЇ МОДЕЛІ
В ІНЖЕНЕРНИХ РОЗРАХУНКАХ МІЦНОСТІ
ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

**ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДЕФОРМАЦИОННОЙ МОДЕЛИ
В ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТАХ ПРОЧНОСТИ
ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

**THE APPLICATION OF NONLINEAR DEFORMATION MODEL
IN ENGINEERING CALCULATIONS OF REINFORCED
CONCRETE ELEMENTS STRENGTH**

Павліков А.М., д.т.н., проф. (Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, м. Полтава) **Бойко О.В., к.т.н., ст. викладач** (Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, м. Полтава)

Павликов А.Н., д.т.н., проф. (Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратиюка, г. Полтава) **Бойко О.В., к.т.н., ст. преподаватель** (Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратиюка, г. Полтава)

Pavlikov A.M., doctor of technical sciences, professor (Poltava National Technical University named after Yuriy Kondratiuk, Poltava) **Boiko O.V., candidate of technical sciences, senior lecturer** (Poltava National Technical University named after Yuriy Kondratiuk, Poltava)

Наведені пропозиції щодо виконання інженерних розрахунків міцності залізобетонних елементів, що зазнають згинання, у нормальному перерізі на основі нелінійної деформаційної моделі.

Изложены предложения по выполнению инженерных расчетов прочности изгибаемых железобетонных элементов в нормальном сечении на основе нелинейной деформационной модели.

The proposals for engineering strength estimation of bended reinforced concrete elements in the normal section are offered on the basis of nonlinear deformation model.

Ключові слова:

Залізобетон, деформація, модель, розрахунок, міцність.

Железобетон, деформация, расчет, прочность.
Reinforced concrete, deformation, calculation, strength.

Постановка проблеми. Перехід до розрахунків за міцністю елементів бетонних і залізобетонних конструкцій на основі нелінійної деформаційної моделі [1, 2] обумовлений тим, що застосовувана раніше методика, викладена в [3], мала такі прогалини: розрахунок площі поздовжньої арматури, яка має ділянку текучості при $\xi < \xi_R$, призводив до її завищення; розрахункові схеми не відповідали дійсним, а саме – на нейтральній лінії напруження як у бетоні, так і арматурі не дорівнювали нулю; розрахунки міцності не враховували властивості бетону деформуватись за межею досягнення ним критичних значень деформацій ε_{BR} .

Введені в дію нормативні документи [1, 2] практично усунули відмічені недоліки. Стало це можливим завдяки використанню в розрахунках міцності елементів бетонних і залізобетонних конструкцій нелінійної діаграми деформування бетону. Але, як відомо, застосування в практиці проектування залізобетонних елементів деформаційної моделі розрахунку, значно ускладнює розрахунковий процес та унеможливорює його виконання без застосування комп'ютерної техніки.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми. Спроби спростити розрахункові залежності та звести процес розрахунку за деформаційною моделлю до простих обчислень з використанням таблиць або графіків здійснювались в роботах [4 – 8]. Окремі пропозиції спрощення розрахунків з урахуванням нелінійного деформування матеріалів наведені також в роботі [9]. Але поки що не розроблено деталізованого методу розрахунку, котрий дозволяв би вирішувати як першу задачу з підбору арматури залізобетонних елементів, так і другу задачу з визначення їх міцності.

Зважаючи на вищесказане, актуальною на сьогодні є розробка інженерного методу розрахунку міцності залізобетонних елементів на основі нелінійної деформаційної моделі, котрий без ускладнень можна було б застосовувати на практиці проектування залізобетонних конструкцій.

Мета і задачі досліджень. Розробка та реалізація інженерного методу розрахунку міцності залізобетонних елементів у нормальному перерізі, що базується на нелінійній деформаційній моделі.

Виклад основного матеріалу. Для виведення розрахункових формул розглядається гранична рівновага залізобетонного елемента прямокутного профілю, що зазнає згинання (рис. 1). При цьому розрахунок площі арматури елемент виконується для такого стану залізобетонного елемента, коли в його поперечному перерізі бетон найбільш стиснутої фібри досягає таких значень деформацій, що кількість арматури, установлені в даному перерізі елемента для прийняття заданого зовнішнього моменту, буде мінімальною.

в якій граничне значення відносної деформації $\varepsilon_{cu} > \varepsilon_{cl}$ ($\varepsilon_{cm} / \varepsilon_{cl} = \eta_m$, $\varepsilon_{cu} / \varepsilon_{cl} = \eta_u$) бетону на стиск (або її рівень) задовольняє умову екстремального критерію міцності даного перерізу в балці [10]

$$M(\varepsilon_{cu}) = M_u = \max M(\varepsilon_{cm}) \text{ або} \quad (7)$$

$$M(\eta_u) = M_u = \max M(\eta_m), \quad (8)$$

забезпечуючи цим самим у загальному випадку двоїсту сутність розв'язання задачі міцності балкового елемента в поперечному перерізі.

Із прийнятих передумов (1) – (5) випливає, що, використовуючи критерії (6) – (8), залежність для визначення невідомої величини ε_{cu} можна отримати шляхом диференціювання неявної функції $f(A_s, \eta_m, \dots) = 0$, котра за суттю є рівняння (2). Тобто, в основу шуканої залежності покладено як критерій (6) мінімальної площі арматури A_s в перерізі, необхідної для сприймання моменту M , так і критерій (7) максимальної міцності $M_u = M$ цього ж перерізу з мінімальною площею арматури A_s .

Для визначення невідомої величини ε_{cu} шляхом диференціювання (2) як неявної функції A_s у вигляді $f(A_s, \eta_m, \dots) = 0$, необхідно спочатку складові N_s , N_c , x та y_{Nc} у рівняннях (1) та (2) функціонально виразити через A_s , ε_{cm} або через A_s , η_m . У результаті виконання вище викладених умов рівняння (1) та (2) у загальному випадку набудуть такого вигляду:

$$N_s(\sigma_s, A_s, x, \eta_m, \dots) - N_c(x, \eta_m, \dots) = 0; \quad (9)$$

$$M_u - N_c(x, \eta_m, \dots)(d - x(\sigma_s, A_s, \eta_m, \dots)) + y_{Nc}(\sigma_s, A_s, x, \eta_m, \dots) = 0. \quad (10)$$

В остаточному вигляді система рівнянь (9) та (10) для сформульованої задачі містить чотири невідомих A_s , σ_s , x , η_m . Для їх визначення необхідно мати закон розподілення напружень в бетоні стиснутої зони у вигляді $\sigma_c = f(y, \eta_m, \dots)$. Для його отримання, використовуючи рис. 1, запишемо, що

$$\sigma_c(y) = \varepsilon_c(y) E'_c(y), \quad (11)$$

де $E'_{cd}(y)$, $\varepsilon_c(y)$ – січний модуль пружності та відносні деформації стиснутого бетону в точці поперечного перерізу на відстані y від нульової лінії, в якій визначається напруження $\sigma_c(y)$.

Оскільки в поперечному перерізі балки на ділянці чистого згину в будь-яких його точках маємо одновісний напружений стан, то значення січного модуля пружності бетону у цих точках $E'_{cd}(y)$ буде таким самим, як і для центрально-стиснутого бетонного елемента. Тому використавши діаграму напруження-деформації бетону при стиску (3), можна отримати таку залежність:

$$E'_{cd}(y) = \sigma_c(\eta) / \varepsilon_c(y), \quad (12)$$

у котрій, як це видно з рис.1, $\eta = \eta_m y / x$.

Остаточно, використовуючи залежності (11) та (12), отримано закон розподілення напружень у бетоні стиснутої зони в системі координат $Y_c O_c X_c$ з початком O_c на нейтральній лінії (рис. 1) у вигляді:

$$\sigma_c(y, \eta_m, \dots) = f_{cd} \eta_m y (Kx - \eta_m y) / x [x + (K - 2) \eta_m y]. \quad (13)$$

Застосовуючи (13) складові рівнянь (1) та (2), після виконання необхідних математичних перетворень, приводяться до таких виразів

$$N_c = b \int_0^x \frac{f_{cd} \eta_m y (Kx - \eta_m y)}{x(x + (K-2)\eta_m y)} dy = f_{cd} b x \omega(\eta_m), \quad (14)$$

$$y_{Nc} = S_c / N_c = x \frac{\varphi(\eta_m)}{\omega(\eta_m)}, \quad (15)$$

$$S_c = b \int_0^x \frac{f_{cd} \eta_m y (Kx - \eta_m y) y}{x(x + (K-2)\eta_m y)} dy = f_{cd} b x^2 \varphi(\eta_m), \quad (16)$$

в яких

$$\omega(\eta_m) = \frac{(K-1)^2 (c - \ln c - 1)}{(K-2)^3 \eta_m} - \frac{\eta_m}{2(K-2)}, \quad (17)$$

$$\varphi(\eta_m) = \frac{(K-1)^2 [(c-2)^2 + 2 \ln c - 1]}{2(K-2)^4 \eta_m^2} - \frac{\eta_m}{3(K-2)}. \quad (18)$$

Після підстановки функціонально виражених через η_m величин N_s , N_c , x та y_{Nc} у рівняння (9) та (10) отримана в неявному вигляді функція A_s від незалежної перемінної η_m :

$$\chi(\eta_m) \cdot \sigma_s^2(\eta_m) A_s^2 / (f_{cd} b) - \sigma_s(\eta_m) A_s d + M_u = 0, \quad (19)$$

у котрій $\chi(\eta_m) = (\omega - \varphi) / \omega^2$, а коефіцієнти $\omega(\eta_m)$ і $\varphi(\eta_m)$ при $c = 1 + (K-2)\eta_m$ визначаються за формулами (17) та (18).

Отримана в неявному вигляді функціональна залежність (19) A_s від перемінної η_m , як показав її аналіз з урахуванням даних постановки задачі, однозначно дозволяє обчислювати мінімальне значення площі арматури $A_s = \min$ балкового елемента при заданому значенні згинального моменту $M = \text{const} = M_u$ і фіксованому значенні $\sigma_s(\eta_m) = f_{yd}$ залежно тільки від однієї змінної η_m – рівня відносних деформацій бетону в найбільш стиснутій фібрі поперечного перерізу балки.

Ураховуючи вище викладене, остаточно необхідну площу арматури $A_s = \min$ в перерізі можна визначити, дослідивши неявно задану функцію (19) на екстремум за (6)

$$\frac{dA_s}{d\eta_m} = - \frac{f'(\eta_m)}{f'(A_s)} = 0. \quad (20)$$

У результаті отримано диференціальне рівняння

$$\chi(\varphi(\eta_m), \omega(\eta_m))' = (2\varphi - \omega) \omega' - \omega \varphi' = 0, \quad (21)$$

розв'язок котрого, після підстановки в нього відповідних функціональних залежностей (17) та (18) та їх похідних, має вигляд трансцендентного алгебраїчного рівняння відносно $\eta_m = \eta_u$ [6]. За фізичною суттю отримане рівняння являє собою сукупність граничних рівнів деформацій бетону (табл. 1) в найбільш стиснутій фібрі поперечного перерізу в момент досягнення залізобетонним елементом найбільшого опору дії моменту $M = M_u$ при мінімумі площі розтягнутої арматури.

Таблиця 1

Значення параметрів ω , φ , χ залежно від значень K та η_u

	K								
	1,18	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
η_u	1,075	1,2	1,268	1,309	1,339	1,363	1,382	1,398	1,412
ω	0,587	0,673	0,732	0,767	0,792	0,811	0,826	0,838	0,848
φ	0,3835	0,4214	0,443	0,455	0,462	0,467	0,471	0,474	0,476
χ	0,591	0,555	0,539	0,53	0,526	0,523	0,52	0,518	0,517
φ/ω	0,653	0,626	0,605	0,593	0,583	0,576	0,57	0,566	0,561

З метою надання зручності використанню рівняння (19) в інженерних розрахунках, при умові використання значень $\eta_m = \eta_u$ з табл. 1, здійснено його спрощення шляхом ділення усіх складових на $f_{cd}bd^2$. При цьому аналогічно до [6] введено позначення $M/f_{cd}bd^2 = \bar{\alpha}_m$. В результаті отримано для використання в практиці проектування згинальних залізобетонних елементів удосконалене у порівнянні з [5] рівняння для визначення в них необхідної площі поздовжньої арматури у вигляді:

$$\chi \cdot \frac{f_{yd}^2}{f_{cd}^2} \rho_f^2 - \frac{f_{yd}}{f_{cd}} \rho_f + \bar{\alpha}_m = 0. \quad (22)$$

Розв'язком рівняння (22) аналогічно до [11] при умові $\rho_f = A_s/bd$ є формула для визначення площі розтягнутої арматури, необхідної для сприймання моменту M від дії зовнішнього навантаження в балкових елементах

$$A_s = \frac{f_{cd}bd}{f_{yd}} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4\chi\bar{\alpha}_m}}{2\chi} \right), \quad (23)$$

при цьому $1 - 4\chi\bar{\alpha}_m \geq 0$.

З метою отримання розрахункових формул для визначення міцності залізобетонних елементів у нормальному перерізі виконано підстановку величин N_s , N_c , x та y_{Nc} за (14 – 16) у рівняння (1) та (2), враховуючи, що найбільший опір дії зовнішньому навантаженню залізобетонний елемент

буде чинити при $\sigma_s = f_{yd}$. З використанням фізичного змісту відомих коефіцієнтів α_m , ξ та ζ за [3] рівняння (1) та (2) записані у вигляді:

$$f_{yd} A_s = f_{cd} b x \omega = f_{cd} b d \xi, \quad (24)$$

$$M_u = f_{cd} b d^2 \xi (1 - \chi \xi) = \bar{\alpha}_m f_{cd} b d^2 = f_{yd} A_s d \bar{\zeta}, \quad (25)$$

де

$$\xi = f_{yd} A_s / (f_{cd} b d) = \omega \bar{\xi} = \omega x / d, \quad (26)$$

$$\bar{\alpha}_m = M / (f_{cd} b d^2) = \xi (1 - \chi \xi) = \xi \bar{\zeta}, \quad (27)$$

$$\bar{\zeta} = 1 - \chi \xi. \quad (28)$$

Для спрощення обчислень міцності залізобетонних елементів розрахункові значення коефіцієнтів $\bar{\alpha}_m$, $\bar{\zeta}$ та $\bar{\xi}$ приведені до табличної форми залежно від параметра K (табл. 2) для відповідних значень ξ (табл. 2).

Таблиця 2

Значення коефіцієнтів ξ , $\bar{\xi}$, $\bar{\zeta}$ та $\bar{\alpha}_m$ залежно від параметра K

ξ	K											
	2			2,5			3			3,5		
	$\bar{\xi}$	$\bar{\zeta}$	$\bar{\alpha}_m$	$\bar{\xi}$	$\bar{\zeta}$	$\bar{\alpha}_m$	$\bar{\xi}$	$\bar{\zeta}$	$\bar{\alpha}_m$	$\bar{\xi}$	$\bar{\zeta}$	$\bar{\alpha}_m$
0,1	0,137	0,946	0,095	0,130	0,947	0,095	0,126	0,947	0,095	0,123	0,948	0,095
0,2	0,273	0,892	0,178	0,261	0,894	0,179	0,252	0,895	0,179	0,247	0,895	0,179
0,3	0,410	0,838	0,252	0,391	0,841	0,252	0,379	0,842	0,253	0,370	0,843	0,253
0,4	0,546	0,785	0,314	0,521	0,788	0,315	0,505	0,790	0,316	0,493	0,791	0,316
0,5	0,683	0,731	0,365	0,652	0,735	0,367	0,631	0,737	0,369	0,617	0,739	0,369
0,6	0,820	0,677	0,406	0,782	0,682	0,409	0,757	0,684	0,411	0,740	0,686	0,412
0,7	0,956	0,623	0,436	0,912	0,628	0,440	0,884	0,632	0,442	0,863	0,634	0,444

При розв'язанні задачі визначення міцності повинна задовольнятися умова:

$$\bar{\zeta} \leq \bar{\zeta}_R = \frac{1}{1 + f_{yd} / (\varepsilon_{cl,cd} \eta_u E_s)}. \quad (29)$$

При розв'язанні задачі визначення необхідної кількості поздовжньої арматури в перерізі залізобетонного елемента перевірку необхідності встановлення арматури в стиснутій зоні можна здійснювати за умовою:

$$\bar{\alpha}_m \leq \bar{\alpha}_R = \omega \bar{\zeta}_R (1 - \chi \omega \bar{\zeta}_R). \quad (30)$$

Для зручності виконання обчислень граничні значення параметрів $\bar{\xi}_R$ та $\bar{\alpha}_R$ для різних класів бетону й арматури наведені в табл. 3.

Таблиця 3

Значення параметрів $\bar{\xi}_R$ та $\bar{\alpha}_R$ для різних класів бетону й арматури

Клас розтягнутої арматури	К							
	2		2,5		3		3,5	
	$\bar{\xi}_R$	$\bar{\alpha}_R$	$\bar{\xi}_R$	$\bar{\alpha}_R$	$\bar{\xi}_R$	$\bar{\alpha}_R$	$\bar{\xi}_R$	$\bar{\alpha}_R$
A240C	0,690	0,368	0,674	0,375	0,666	0,381	0,661	0,386
A400C	0,583	0,329	0,565	0,334	0,556	0,338	0,551	0,342
A500C (Ø8 – 22)	0,539	0,311	0,521	0,315	0,512	0,319	0,507	0,323
A500C (Ø25 – 40)	0,550	0,315	0,532	0,320	0,522	0,324	0,517	0,327
B500	0,525	0,305	0,507	0,309	0,497	0,312	0,492	0,316

Приклад 1. Дано: балка (рис. 1) з розмірами перерізу $b = 200$ мм, $h = 400$ мм, $a = 30$ мм; бетон класу C30/35 ($f_{cd} = 19,5$ МПа, $E_{cd} = 27$ ГПа, $\varepsilon_{c1,cd} = 1,72\%$); згинальний момент $M_u = 140,73$ кНм; арматура класу A400C ($f_{yd} = 364$ МПа). Необхідно визначити площу перерізу поздовжньої арматури.

Розрахунок. Робоча висота перерізу балки $d = h - a = 400 - 30 = 370$ мм.

За приміткою до формули (3) для даного бетону коефіцієнт K :

$$K = 1,05 E_{cd} \varepsilon_{c1,cd} / f_{cd} = 1,05 \cdot 27 \cdot 10^3 \cdot 1,72 \cdot 10^{-3} / 19,5 = 2,50.$$

За формулою (27):

$$\bar{\alpha}_m = M_u / (f_{cd} b d^2) = 140,7 \cdot 10^6 / (19,5 \cdot 200 \cdot 370^2) = 0,2636.$$

За табл. 3 $\bar{\alpha}_R = 0,334$. Перевіряємо умову (30): $\bar{\alpha}_m = 0,2636 < \bar{\alpha}_R = 0,334$.

За табл. 2 при $K = 2,5$ та $\bar{\alpha}_m = 0,2636$ визначаємо $\bar{\xi} = 0,8335$.

Необхідна площа перерізу поздовжньої арматури за формулою(25):

$$A_s = M / (f_{yd} \bar{\xi} d) = 140,73 \cdot 10^6 / (364 \cdot 0,8321 \cdot 370) = 1256 \text{ мм}^2.$$

Приклад 2. Дано: для балки за даними прикладу 1, армованої стержнями, площа котрих $A_s = 1256$ мм², необхідно визначити згинальний момент M_u , який може сприйняти балка.

Розрахунок. Робоча висота перерізу $d = h - a = 400 - 30 = 370$ мм.

Для даного бетону (див. приклад 1) коефіцієнт $K = 2,50$.

За формулою (26):

$$\xi = f_{yd} A_s / (f_{cd} b d) = 364 \cdot 1256 / (19,5 \cdot 200 \cdot 370) = 0,3168.$$

З табл. 2 та 3 визначаємо $\bar{\xi} = 0,4130$, $\bar{\alpha}_m = 0,2636$ та $\bar{\xi}_R = 0,565$.

Умова $\bar{\xi} = 0,4130 < \bar{\xi}_R = 0,565$ виконується, тому за формулою (25) підраховуємо значення моменту, який може сприйматися балкою в нормальному перерізі:

$$M_u = \bar{\alpha}_m f_{cd} b d^2 = 0,2636 \cdot 19,5 \cdot 200 \cdot 370^2 = 140,73 \cdot 10^6 \text{ Нм} = 140,73 \text{ кНм}.$$

Визначене значення $M_u = 140,73$ кНм абсолютно збігається зі значенням згинального моменту з прикладу 1.

Висновок. Запропоновану методику розрахунку міцності залізобетонних елементів, розроблену з урахуванням нелінійних властивостей бетону та відповідно до вимог сучасної нормативної бази за [1], можна використовувати в практиці проектування залізобетонних елементів.

1. Конструкції будинків і споруд. Бетонні та залізобетонні конструкції. Основні положення : ДБН В.2.6-98:2009. – К.: Мінрегіонбуд України, 2009. – 97 с. 2. Конструкції будинків і споруд. Бетонні та залізобетонні конструкції з важкого бетону. Правила проектування : ДСТУ Б В.2.6-156:2010. – К.: Мінрегіонбуд України, 2011. – 118 с. 3. Бетонные и железобетонные конструкции : СНиП 2.03.01-84*. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1989. – 80 с. 4. Павліков А.М. Нелінійна модель напружено-деформованого стану косозавантажених залізобетонних елементів у закритичній стадії : монографія / А.М. Павліков. – Полтава, 2007. – 320 с. 5. Павліков А.М. Використання діаграми стану бетону при визначенні площі поздовжньої арматури в залізобетонних балках / А.М. Павліков Галузеve машинобудування, будівництво: зб. наук. праць. – Полтава: ПолтНТУ, 2004. – Вип. 14. – С. 20 – 22. 6. Павліков А.М. Урахування особливостей деформаційної моделі в розрахунку міцності згинальних залізобетонних елементів у нормальному перерізі за СНиП 2.03.01-84 / А.М. Павліков // Коммунальное хозяйство городов: сб. науч. трудов. – Киев : Техника, 2009. – Вип.90. – С. 248 – 254. 7. Павліков А.М. Розв’язання задач міцності залізобетонних елементів у нормальному перерізі / А.М. Павліков, О.В. Бойко // Галузеve машинобудування, будівництво: зб. наук. праць. – Полтава: ПолтНТУ, 2010. – Вип. 2(27). – С. 18 – 22. 8. Павліков А.М. Розрахунок міцності залізобетонних елементів у нормальному перерізі, синтезований на основі СНиП 2.03.01-84 та нелінійної деформаційної моделі / А.М. Павліков // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». – Львів, 2010. – №664. – С. 128 – 132. 9. Кочкар'юв Д.В. Практичний розрахунок згинальних залізобетонних елементів за міцністю на основі нелінійного деформування матеріалів / Д.В. Кочкар'юв, В.І. Бабич // Бетон и железобетон в Украине. – 2011. – №5. – С. 22 – 26. 10. Митрофанов В.П. Екстремальний критерій міцності залізобетонних елементів у деформаційній моделі / В.П. Митрофанов, А.М. Павліков // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.: НДІБК, 2005. – Вип. 62.– Т.1. – С. 205 – 213. 11. Митрофанов В.П. Практическое применение деформационной модели с экстремальным критерием прочности железобетонных элементов / В.П. Митрофанов // Коммунальное хозяйство городов : сб. науч. трудов. – К.: Техника, 2004. – Вип. 60. – С. 29 – 48.