УДК. 514.18

ДИСКРЕТНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ СУПЕРПОЗИЦІЯМИ КООРДИНАТ ТРЬОХ ТОЧОК ОДНОВИМІРНИХ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ НА ПРИКЛАДІ ДРОБОВО-ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІЙ

Воронцов О.В., к.т.н.,
Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка» (м. Полтава, Україна).
Тел., (095) 092 30 89
Воронцова І.В., к.пед.н.
Полтавський коледж нафти і газу
Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка» (м. Полтава, Україна).
Тел., (050) 275 02 91

Геометричний образ (ГО) довільної форми завжди може бути представлений впорядкованою множиною точок за певним законом так, щоб можна було визначити координати будь-якої точки всередині контуру (області). Питанням є лише необхідна щільність вихідної інформації та затрати на її одержання, обробку і зберігання.

Для адекватного представлення інформації про об'єкт дослідження необхідно організовувати обробку і зберігання значних масивів інформації. Це, у свою чергу, передбачає використання потужних комп'ютерів із великим об'ємом жорсткого диску і оперативної пам'яті.

При геометричному моделюванні вихідними даними, як правило, виступають геометричні характеристики та умови, які найчастіше представлені у числовій формі (координати або значення параметрів) і масиви яких можуть бути досить великими. У цих умовах методи глобального неперервного моделювання, коли відшукується єдиний розв'язок, виявляються неефективними, тому що зазвичай вимагають використання достатньо складних математичних алгоритмів та не можуть забезпечити необхідну адекватність моделей. Зазначених недоліків позбавлені методи дискретного геометричного моделювання.

У статті пропонується застосування геометричного апарату суперпозицій у поєднанні з класичним методом скінченних різниць, що дозволяє істотно підвищити ефективність та розширити можливості процесу дискретного моделювання ГО. Зокрема дослідити можливість використання у якості

інтерполянтів не тільки параболічних, а й будь-яких інших функціональних залежностей.

На основі геометричного апарату суперпозицій одержано загальні формули обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції трьох заданих довільних точок одновимірних числових послідовностей що представляють нескінченні дискретні форми певних функціональних залежностей, для визначення координат невідомих вузлових точок даних послідовностей.

На прикладі дробово-лінійної функції показано, що одержані формули обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції заданих трьох вузлових точок для обраних розрахункових схем, дозволяють розв'язувати задачі суцільної дискретної інтерполяції та екстраполяції числовими послідовностями будь-яких одновимірних функціональних залежностей (визначати ординати шуканих точок дискретних кривих за трьома заданими ординатами вузлових точок) без трудомістких операцій складання та розв'язання великих систем лінійних рівнянь.

Ключові слова: дискретне моделювання, геометричні образи, метод скінчених різниць, геометричний апарат суперпозицій, дробово-лінійні функції.

Постановка проблеми. Необхідність оперативного втручання у хід розрахунків в задачах проектування інженерних споруд і мереж, будівельних та машинобудівних виробів за допомогою різних САПР вимагає подальшого удосконалення алгоритмів створення геометричних прообразів об'єктів та процесів, що не вимагають значних затрат обчислювальних ресурсів. Застосування геометричного апарату суперпозицій дозволяє розкрити нові формоутворюючі можливості відомих методів дискретного геометричного моделювання. Однією із задач даної роботи є продовженні досліджень визначення дискретних образів кривих ліній на основі класичного методу скінчених різниць, статико-геометричного методу моделювання і геометричного апарату суперпозицій.

Аналіз останніх досліджень У роботах [1-5] авторів даної статті досліджено аспекти використання для дискретного геометричного моделювання, поряд з параболічними функціями, інших елементарних функціональних залежностей. Одержано обчислювальні шаблони для формування одновимірних ГО дискретними аналогами показникових, гіперболічних та синусоїдальних функцій, а також для суцільної дискретної інтерполяції двовимірними числовими послідовностями, складовими яких є гіперболічні функції.

Формулювання цілей статті. Метою даної статті є розроблення способу, що дозволяє формувати одновимірні ГО у вигляді дискретних рядів точок кривих, які проходять через довільно задані три вузлові точки, а також показати на прикладі дробово-лінійної функціональної залежності, що запропонований спосіб дозволяє за трьома довільно заданими точками виконувати суцільну одновимірну дискретну інтерполяцію числовими послідовностями будь-яких функціональних залежностей.

Виклад основного матеріалу.

У роботі [1] було доведено властивість згідно якої координати будь-якої точки одновимірної множини точок є суперпозицією (1) координат трьох довільних точок цієї множини.

$$\begin{cases} x_0 = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 \\ y_0 = k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3 \end{cases}, \qquad (1)$$

де: $k_3 = 1 - k_1 - k_2$.

Рекурентна формула, що зв'язує значення кінцевого ряду довільних членів одновимірної числової послідовності матиме вигляд (2):

$$y_{i+p} = k_1y_{i+p_1} + k_2y_{i+p_2} + k_3y_{i+p_3}\ , \qquad (2)$$

де: p_1 , p_2 , p_3, p – довільні інтервали вздовж осі i ;
$k_1 + k_2 + k_3 = 1$ – коефіцієнти суперпозиції.

Виведемо загальні формули обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції трьох заданих довільних точок $A_1(i+p_1)$, $A_2(i+p_2)$, $A_3(i+p_3)$ одновимірних числових послідовностей що представляють нескінченні дискретні форми певних функціональних залежностей, для визначення координат невідомих вузлових точок даних послідовностей.

Введемо позначення:
$i + p_n = V_n$, $i + p = V$, $T_n = T_n(V_n)$, $T = T(V)$.

Тоді система рівнянь для визначення коефіцієнтів суперпозиції матиме вигляд (3):

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{3} k_n = 1 \\ \sum_{n=1}^{3} k_nV_n = V \\ \sum_{n=1}^{3} k_nT_n = T \end{cases} \qquad (3)$$

Коефіцієнти суперпозиції будуть обчислені за формулами (4):

$$k_s = \frac{\Delta_s}{\Delta}\ , \quad s = \overline{1,3} \qquad (4)$$

Перевіримо вірність рівнянь (1) на прикладі одновимірної числової послідовності (5):

$$y_i = \frac{ai+b}{ci+d} \qquad (5)$$

Для перевірки візьмемо наступні вихідні дані:

i=0; p₁=-10; p₂=0; p₃=10; p=-10 ;…;0;…10 ;

$V_1=-10$; $V_2=0$; $V_3=10$;

V=-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9;10 .

a=2; b=3; c=4; d=5 .

Звідси, для послідовності (5):

$$T_n = \frac{aV_n+b}{cV_n+d} = \frac{2V_n+3}{4V_n+5};$$

$$T_1 = \frac{2V_1+3}{4V_1+5} = \frac{2(-10)+3}{4(-10)+5} = \frac{17}{35}; \; T_2 = \frac{3}{5}; \; T_3 = \frac{23}{45}$$

Розрахункова схема моделювання кривих виду $y_i = \frac{ai+b}{ci+d}$ за наведеними вище вихідними умовами показана на рисунку 1.

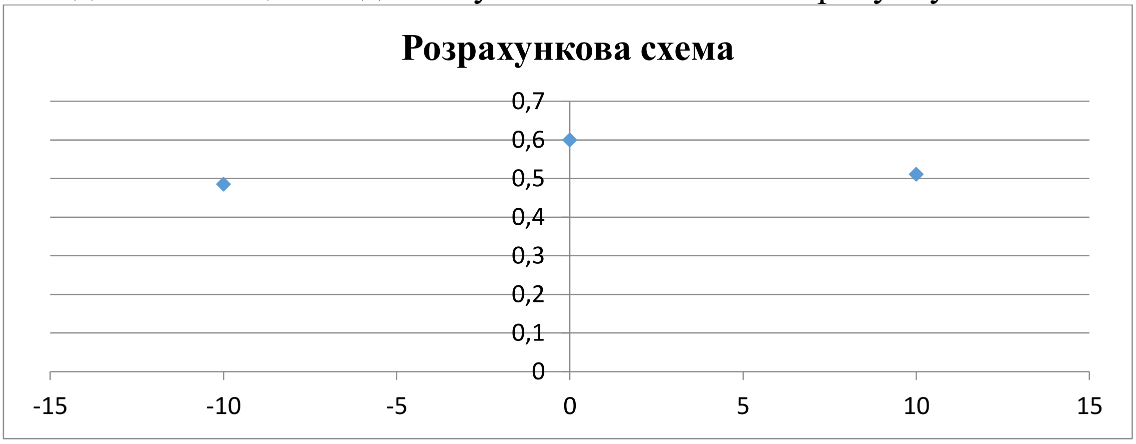


Рисунок 1. Розрахункова схема моделювання кривих виду $y_i = \frac{ai+b}{ci+d}$ за вихідними умовами:

$$V_1 = -10; \; V_2 = 0; \; V_3 = 10; \; T_1 = \frac{17}{35}; \; T_2 = \frac{3}{5}; \; T_3 = \frac{23}{45}.$$

Дискретний ряд точок послідовності (5) за даних умов показано на рисунку 2.

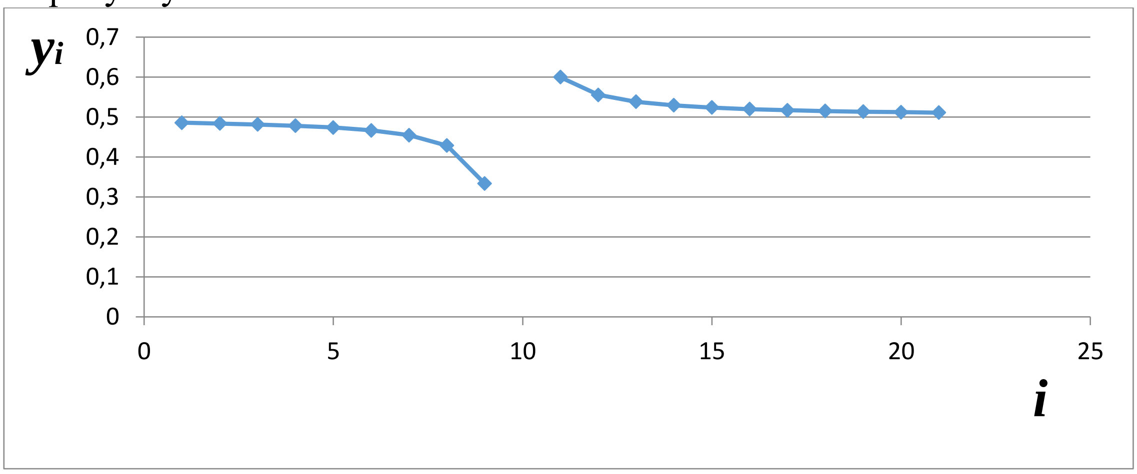
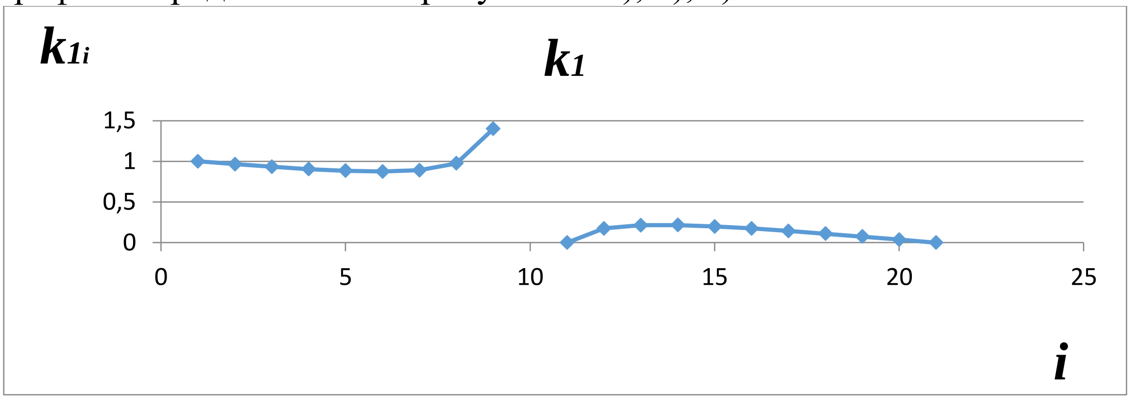
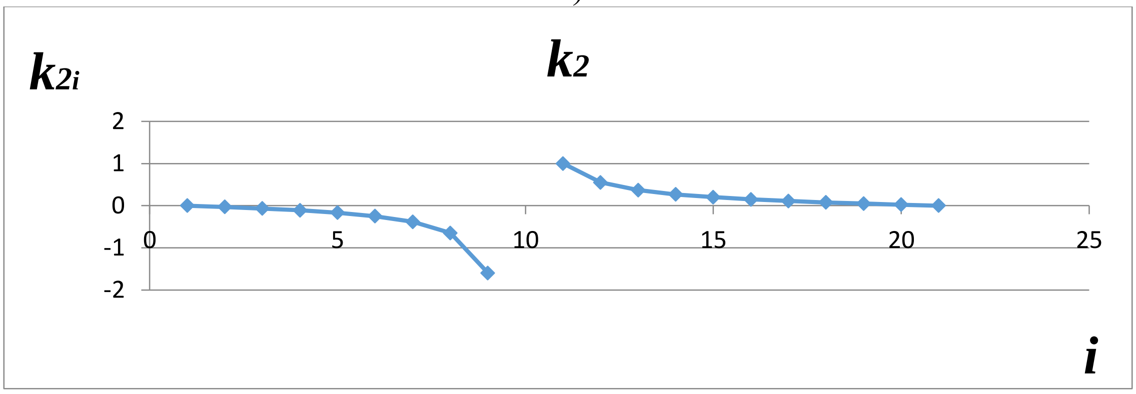


Рисунок 2. Дискретний ряд точок послідовності $y_i = \frac{ai+b}{ci+d}$

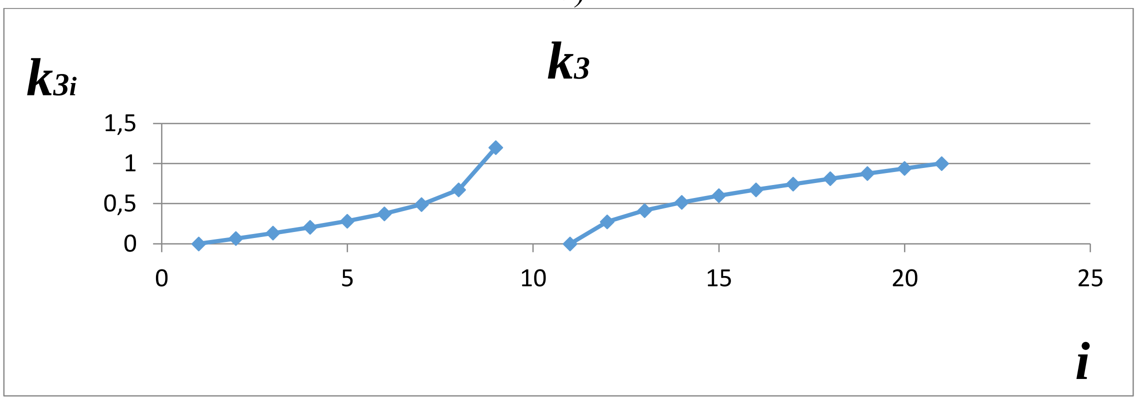
Дискретні значення величин коефіцієнтів суперпозиції k_1, k_2 k_3 графічно представлено на рисунках 3 а), б), в).



а)



б)



в)

Рисунок 3 а), б), в). Дискретні значення величин коефіцієнтів суперпозиції k_1, k_2 k_3

Як видно із наведених вище графічних ілюстрацій дискретних значень величин коефіцієнтів суперпозиції k_1, k_2 k_3 , вони являють собою числові послідовності, що, як і значення ординат числової послідовності (5), описуються формулою виду (5).

На підставі одержаних вище значень величин коефіцієнтів суперпозиції для симетричних вихідних умов розрахункової схеми, представленої на рисунку 1, обчислимо дискретні значення вузлових точок модельованої кривої за формулою (6):

$$y_i = k_1 y_{i_1} + k_2 y_{i_2} + k_3 y_{i_3} \ , \qquad (6)$$

як суперпозиції двох контурних і центральної вузлових точок за іншими вихідними даними:

$$i_1 = -10, \ i_2 = 0, \ i_3 = 10 \ ; \ y_{i_1} = 10, \ y_{i_2} = 0, \ y_{i_3} = 10 \ . \qquad (2.31)$$

Результати обчислень дискретних значень ординат модельованої кривої графічно показано на рисунку 4.

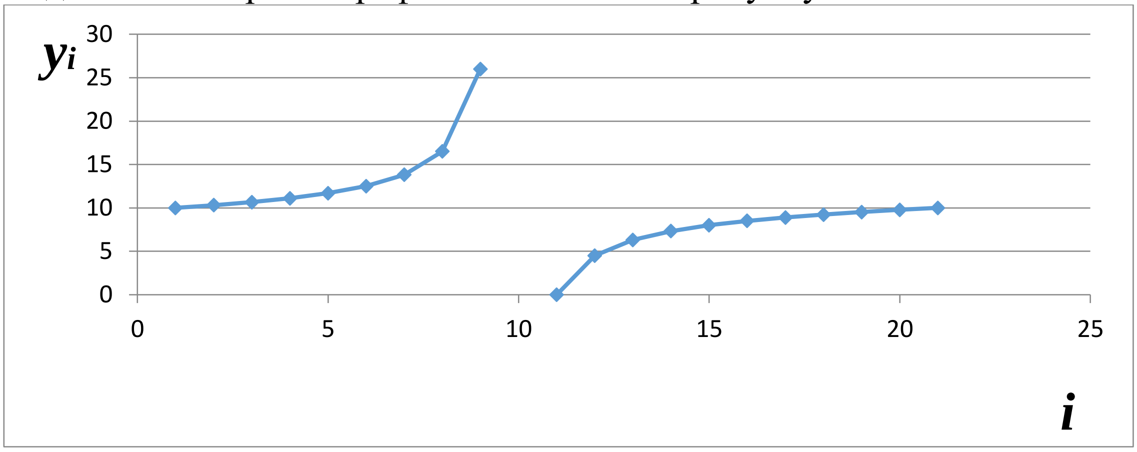


Рисунок 4. Дискретний ряд точок модельованої кривої виду $y_i = \frac{ai+b}{ci+d}$

Як видно із рисунку 4, отримані дискретні значення ординат модельованої кривої являють собою числову послідовність, що описується формулою виду (5).

Висновки. На основі геометричного апарату суперпозицій розроблено спосіб, що дозволяє формувати одновимірні ГО у вигляді дискретних рядів точок кривих, які проходять через довільно задані три вузлові точки. На прикладі дробово-лінійної функціональної залежності показано, що запропонований спосіб дозволяє за трьома довільно заданими точками виконувати суцільну одновимірну дискретну інтерполяцію числовими послідовностями будь-яких функціональних залежностей.

Перспективи подальших досліджень. Результати даної роботи можуть бути основою подальших досліджень одновимірної інтерполяції ГО за трьома довільно заданими точками числовими послідовностями будь-яких інших функціональних залежностей.

Література

1. Воронцов О.В. Дискретное моделирование кривых поверхностей суперпозициями двумерных точечных множеств / О.В. Воронцов, Л.О. Тулупова // Сборник статей по материалам XL

международной научно-практической конференции «Технические науки – от теории к практике». – Новосибирск, 2014. – №11 (36). – С. 7 – 16.

2. Воронцов О.В. Определение дискретных аналогов гиперболических функциональных зависимостей суперпозициями одномерных точечных множеств. [Электронный ресурс] / О.В. Воронцов // Universsum. Сер.: Технические науки: электрон. научн. журн. − 2015. − № 6(18). − Режим доступа: URL: http: // 7universsum. com /ru/ tech/ archive/ item/1135.

3. Воронцов О.В. Дискретна інтерполяція суперпозиціями одновимірних точкових множин показникових функцій. // Прикладна геометрія та інженерна графіка.: зб. наук. праць – Вип. 94. – К.: КНУБА, 2018. – С. 296-300.

4. Vorontsov, O.V., Tulupova L.O., Vorontsova, I.V. (2018). Discrete modeling of building structures geometric images. International Journal of Engineering & Technology, 7 (3.2), 727-731.

5. Vorontsov O.V. Geometric and Computer Modeling of Building Structures Forms / O.V/ Vorontsov, L.O. Tulupova, I.V. Vorontsova // International Journal of Engineering & Technology – 2018. – 7 (4.8), Special Issue 8. – Pages 560-565.

ДИСКРЕТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СУПЕРПОЗИЦИЯМИ КООРДИНАТ ТРЕХ ТОЧЕК ОДНОМЕРНЫХ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НА ПРИМЕРЕ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

О.В. Воронцов

Геометрический образ (ГО) произвольной формы всегда может быть представлен упорядоченным множеством точек по определенному закону так, чтобы можно было определить координаты любой точки внутри контура (области). Вопросом является лишь необходимая плотность исходной информации и затраты на ее получение, обработку и хранение.

Для адекватного представления информации об объекте исследования необходимо организовывать обработку и хранение значительных массивов информации. Это, в свою очередь, предполагает использование мощных компьютеров с большим объемом жесткого диска и оперативной памяти.

При геометрическом моделировании исходными данными, как правило, выступают геометрические характеристики и условия, которые чаще всего представлены в числовой форме (координаты или значения параметров) и массивы которых могут

быть достаточно большими. В этих условиях методы глобального непрерывного моделирования, когда отыскивается единственное решение, оказываются неэффективными, потому что обычно требуют использования достаточно сложных математических алгоритмов и не могут обеспечить необходимую адекватность моделей. Указанных недостатков лишены методы дискретного геометрического моделирования.

В статье предлагается применение геометрического аппарата суперпозиций в сочетании с классическим методом конечных разностей, что позволяет существенно повысить эффективность и расширить возможности процесса дискретного моделирования ГО. В частности исследовать возможность использования в качестве интерполлянтов не только параболических, но и любых других функциональных зависимостей.

На основе геометрического аппарата суперпозиций, получены общие формулы вычисления величин коэффициентов суперпозиции трех заданных произвольных точек одномерных числовых последовательностей, представляющие бесконечные дискретные формы определенных функциональных зависимостей, для вычисления координат неизвестных узловых точек данных последовательностей.

На примере дробно-линейной функции показано, что полученные формулы вычисления величин коэффициентов суперпозиции заданных трех узловых точек для избранных расчетных схем, позволяют решать задачи сплошной дискретной интерполяции и экстраполяции числовыми последовательностями любых одномерных функциональных зависимостей (определять ординаты искомых точек дискретных кривых по трем заданными ординатам узловых точек) без трудоемких операций сложения и решения больших систем линейных уравнений.

Ключевые слова: дискретное моделирование, геометрические образы, метод конечных разностей, геометрический аппарат суперпозиций, дробно-линейные функции.

DISCRETE INTERPOLATION BY SUPERPOSITIONS OF COORDINATES OF THREE POINTS OF ONE-DIMENSIONAL NUMERICAL SEQUENCES USING LINEAR FRACTIONAL FUNCTIONS

O. Vorontsov

A geometric image of an arbitrary shape can always be represented by an ordered set of points according to a certain law so that it becomes possible to determine coordinates of any point inside the contour (domain). We have got only a problem of a necessary density of initial information and costs of its obtaining, processing and storage.

For an adequate presentation of information about an object of study, it is necessary to organize processing and storage of significant amounts of information. This involves usage of powerful computers with a large volume of hard disk and RAM.

Usually in geometric modeling, initial data are geometric characteristics (coordinates or parameter values) and conditions, which represented in a numerical form and can be quite large. Because of this, global continuous modeling methods of searching a single solution are ineffective. It happens because they demand usage of sufficiently complex mathematical algorithms and cannot provide a necessary adequacy of the models. Discrete geometric modeling methods don't have such disadvantages.

In this article we propose using the geometric apparatus of superpositions in combination with the classical finite difference method. It can significantly increase efficiency and expand capabilities of a discrete geometric modeling process. In particular, this allows us to investigate the possibility of using both parabolic and any other functional dependencies as interpolants.

Based on the geometric apparatus of superpositions, general formulas are obtained for calculating superposition coefficients of three given arbitrary points of one-dimensional numerical sequences. The sequences represent infinite discrete forms of certain functional dependencies. The found coefficients are used for calculating coordinates of unknown nodal points of these sequences.

Using the linear-fractional function, it is shown that obtained formulas for calculating superposition coefficients of given three nodal points for selected computational schemes allow us to solve problems of continuous discrete interpolation and extrapolation by numerical sequences of any one-dimensional functional dependencies, such as determining the ordinates of any desired points of the discrete curves by three given ordinates of nodal points, without complicate operation of compiling and solving large systems of linear equations.

Keywords: discrete modeling, geometric images, finite difference method, geometric apparatus of superpositions, linear fractional functions.