УДК 514.18

Воронцов О.В., к.т.н., доц.
Тулупова Л.О., к.ф.-м.н., доц.
Воронцова І.В., к.пед.н.

ДИСКРЕТНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБРАЗІВ СУПЕРПОЗИЦІЯМИ ДВОВИМІРНИХ ТОЧКОВИХ МНОЖИН НА ПРИКЛАДІ ПАРАБОЛІЧНИХ ПОВЕРХОНЬ

ПОЛТАВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені Юрія Кондратюка, Україна
ПОЛТАВСЬКИЙ КОЛЕДЖ НАФТИ І ГАЗУ
Полтавського національного технічного університету
імені Юрія Кондратюка, Україна

Анотація. У статті проведено дослідження суцільної двовимірної інтерполяції за довільними дискретними значеннями чотирьох вузлових точок. Виведено формули обчислення коефіцієнтів суперпозицій двовимірних точкових множин що дозволяють визначати аналітичні вирази дискретних аналогів двовимірних геометричних образів у загальному вигляді.

Постановка проблеми. Дискретне представлення будь-якого геометричного образу (ГО) у багатьох випадках має суттєві переваги перед представленням неперервним, хоча більшість створених методик моделювання отримані для неперервних форм вхідних даних. Ефективність методик дискретного формування геометричних образів (будь-яких інженерних об’єктів, процесів чи явищ) передбачає використання алгоритмів переходу від неперервної форми представлення геометричних образів до їх дискретних аналогів. Застосування при дискретному моделюванні геометричного апарату суперпозицій відкриває нові можливості простого переходу від неперервної форми представлення геометричного образу до його дискретного аналогу і навпаки.

Аналіз останніх досліджень. Питанням досліджень дискретного моделювання ГО суперпозиціями одновимірних числових послідовностей присвячені роботи [2, 3, 4] авторів даної статті.

Формулювання цілей та завдання статті. Метою даної роботи є дослідження питань дискретної інтерполяції ГО двовимірними числовими послідовностями за координатами чотирьох довільних вузлових точок на прикладі параболічних поверхонь; зокрема – виведення формул обчислення коефіцієнтів суперпозицій двовимірних точкових множин що дозволяють визначати аналітичні вирази дискретних аналогів двовимірних геометричних образів у загальному вигляді.

Основна частина. Враховуючи результати досліджень роботи [2], виведемо формули обчислення коефіцієнтів суперпозицій двовимірної точкової множини (1), що дозволяють визначати аналітичні вирази дискретних аналогів двовимірних ГО у загальному вигляді. Ці формули також можуть бути використані для дискретного моделювання двовимірних ГО числовими послідовностями інших аналітичних залежностей без складання і розв’язання систем лінійних рівнянь.

Координати будь-якої точки двовимірного ГО можуть бути визначені як суперпозиції координат чотирьох заданих довільних точок даного образу за формулою:

$$u_0 = k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + (1 - k_1 - k_2 - k_3)u_4 ,$$

де u_i $(i = \overline{0,4})$ – узагальнене позначення відповідної координати, або:

$$z_{i+p,j+m} = k_1z_{i+p_1,j+m_1} + k_2z_{i+p_2,j+m_2} + k_3z_{i+p_3,j+m_3} + k_4z_{i+p_4,j+m_4}, \quad (1)$$

де: p , p_1 , p_2 , p_3 , p_4 – довільні інтервали вздовж осі i , а m , m_1 , m_2 , m_3, m_4 – довільні інтервали вздовж осі j .

Виведемо загальні формули обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції чотирьох довільних точок $A_1(i + p_1; j + m_1)$, $A_2(i + p_2; j + m_2)$, $A_3(i + p_3; j + m_3)$, $A_4(i + p_4; j + m_4)$, послідовності (2) для визначення координат будь-якої точки $A^0_{i+p,j+m}(i + p;\ j + m)$ даної послідовності.

$$z_{i,j} = bi^2 + cj^2 \quad (2)$$

Дані формули будуть виведені в процесі розв’язання системи рівнянь (3):

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{4} k_n = 1 \\ \sum_{n=1}^{4} k_n(i + p_n) = i + p \\ \sum_{n=1}^{4} k_n(j + m_n) = j + m \\ \sum_{n=1}^{4} k_n[b(i + p_n)^2 + c(j + m_n)^2] = b(i + p_n)^2 + c(j + m_n)^2 \end{cases} \quad (3)$$

Введемо позначення: $i + p_n = V_n$, $i + p = V$, $j + m_n = W_n$, $j + m = W$, $V_{ij} = V_i - V_j$, $V_{i0} = V_i - V$.

Визначник Δ системи (3) матиме вигляд:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ W_1 & W_2 & W_3 & W_4 \\ bV_1^2 + cW_1^2 & bV_2^2 + cW_2^2 & bV_3^2 + cW_3^2 & bV_4^2 + cW_4^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (V_{34}W_2 + V_{42}W_5 + V_{23}W_4)(cW_1^2 + bV_1^2) +$$
$$+(V_{43}W_1 + V_{14}W_3 + V_{31}W_4)(cW_2^2 + bV_2^2) +$$
$$+(V_{24}W_1 + V_{41}W_2 + V_{12}W_4)(cW_3^2 + bV_3^2) +$$
$$+(V_{32}W_1 + V_{13}W_2 + V_{21}W_3)(cW_4^2 + bV_4^2) ;$$

Аналогічно знайдемо визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$:

$$\Delta_1 = (V_{34}W_2 + V_{42}W_3 + V_{23}W_4)(cW^2 + bV^2) +$$
$$+(V_{43}W + V_{04}W_3 + V_{30}W_4)(cW_2^2 + bV_2^2) +$$
$$+(V_{24}W + V_{40}W_2 + V_{02}W_4)(cW_3^2 + bV_3^2) +$$

$+(V_{32}W+V_{03}W_2+V_{20}W_3)(cW_4^2+bV_4^2)$;
$\Delta_2=(V_{34}W+V_{40}W_3+V_{03}W_4)(cW_1^2+bV_1^2)+$
$+(V_{43}W_1+V_{14}W_3+V_{31}W_4)(cW^2+bV^2)+$
$+(V_{04}W_1+V_{41}W+V_{10}W_4)(cW_3^2+bV_3^2)+$
$+(V_{30}W_1+V_{13}W+V_{01}W_3)(cW_4^2+bV_4^2)$;
$\Delta_3=(V_{04}W_2+V_{42}W+V_{20}W_4)(cW_1^2+bV_1^2)+$
$+(V_{40}W_1+V_{14}W+V_{01}W_4)(cW_2^2+bV_2^2)+$
$+(V_{24}W_1+V_{41}W_2+V_{12}W_4)(cW^2+bV^2)+$
$+(V_{02}W_1+V_{10}W_2+V_{21}W)(cW_4^2+bV_4^2)$;
$\Delta_4=(V_{30}W_2+V_{02}W_3+V_{23}W)(cW_1^2+bV_1^2)+$
$+(V_{03}W_1+V_{10}W_3+V_{31}W)(cW_2^2+bV_2^2)+$
$+(V_{20}W_1+V_{01}W_2+V_{12}W)(cW_3^2+bV_3^2)+$
$+(V_{32}W_1+V_{13}W_2+V_{21}W_3)(cW^2+bV^2)$.

Коефіцієнти суперпозиції будуть обчислені за формулами (4):

$$k_s=\frac{\Delta_s}{\Delta},\ s=\overline{1{,}4}\ . \qquad (4)$$

Перевіримо вірність виведених формул обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції для заданих вихідних даних числової послідовності (2): $c=1$; $b=1$; $p_1=6$; $p_2=7$; $p_3=8$; $p_4=9$; $p=10$; $m_1=9$; $m_2=8$; $m_3=6$; $m_4=9$; $m=12$.

Значення z_{ij} членів числової послідовності (2) при $i=1$; $j=1$; $c=1$; $b=1$, наведені у таблиці (1):

Таблиця 1.

Значення членів числової послідовності $z_{i,j}=bi^2+cj^2$

j	***I***										
	5	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
5	50	61	74	89	106	125	146	169	194	221	250
6	61	72	***85***	100	117	136	157	180	205	232	261
7	74	85	98	113	130	149	170	193	218	245	274
8	89	100	113	***128***	145	164	185	208	233	260	289
9	106	***117***	130	145	***162***	181	202	225	250	277	306
10	125	136	149	164	181	200	221	244	269	296	325
11	146	157	170	185	202	221	242	265	290	317	346
12	169	180	193	208	225	**244**	265	288	313	340	369
13	194	205	218	233	250	269	290	313	338	365	394
14	221	232	245	260	277	296	317	340	365	392	421
15	250	261	274	289	306	325	346	369	394	421	450

Звідси, для формули (1):

$i+p_1=6$, $i+p_2=7$, $i+p_3=8$, $i+p_4=9$, $i+p=10$,
$j+m_1=9$, $j+m_2=8$, $j+m_3=6$, $j+m_4=9$, $j+m=12$,
$z_{i+p_1,j+m_1}=117$, $z_{i+p_2,j+m_2}=113$, $z_{i+p_3,j+m_3}=100$,
$z_{i+p_4,j+m_4}=162$, $z_{i+p,j+m}=244$.

Величини коефіцієнтів суперпозиції обчислимо за формулами (4):

$k_1=\frac{10}{3}$; $k_2=-6$; $k_3=1$; $k_4=\frac{8}{3}$.

Звідси, за формулою (1):

$244 = \frac{10}{3} \cdot 117 - 6 \cdot 113 + 1 \cdot 110 + \frac{8}{3} \cdot 162 = 390 - 678 + 100 + 432 = 244.$

Отримана тотожність доводить правильність одержаних формул обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції. Графічно дискретний каркас числової послідовності (2), аплікати вузлових точок якого обчислені за формулою (1) представлено на рисунку (1).

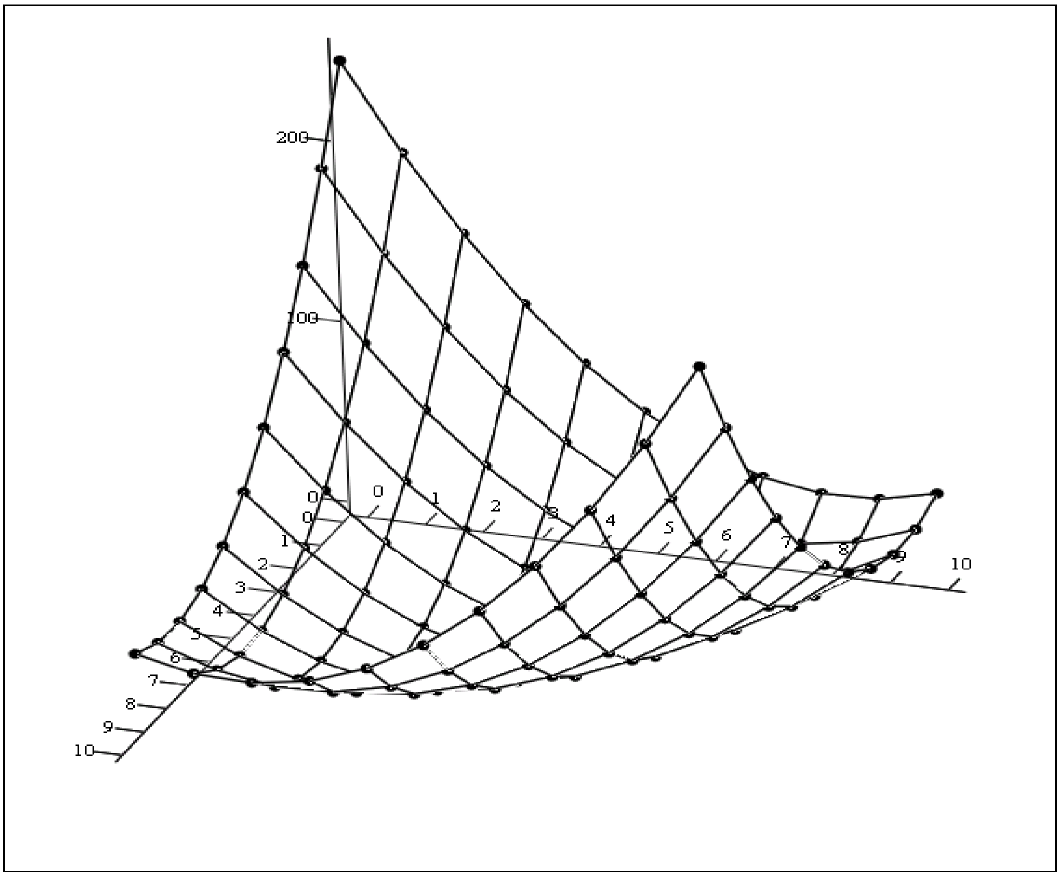

Рисунок 1. Дискретний каркас двовимірної числової послідовності $z_{i,j} = i^2 + j^2$.

Результати обчислень коефіцієнтів суперпозиції точок $A_{69}^{1}(6, 9, 117)$, $A_{76}^{2}(7, 6, 85)$, $A_{88}^{3}(8, 8, 128)$, $A_{99}^{4}(9, 9, 162)$ для визначення координат вузлових точок: A_{ij} числової послідовності (2) при $i=1$; $j=1$; $c=1$; $b=1$, наведені у таблиці (2).

Таблиця 2.

Значення коефіцієнтів суперпозиції координат заданих точок $A_{69}^{1}(6, 9, 117)$, $A_{76}^{2}(7, 6, 85)$, $A_{88}^{3}(8, 8, 128)$, $A_{99}^{4}(9, 9, 162)$ числової послідовності $z_{i,j} = bi^2 + cj^2$.

$k_{\overline{1,4}}$	A_{ij}										
	$A_{5\,5}$	$A_{5\,6}$	$A_{5\,7}$	$A_{5\,8}$	A_{59}	$A_{5\,10}$	$A_{5\,11}$	$A_{5\,12}$	$A_{5\,13}$	$A_{5\,14}$	$A_{5\,15}$
k_1	0.8	0.867	1	1.2	1.467	1.8	2.2	2.667	3.2	3.8	4.467
k_2	2.4	1.6	1	0.6	0.4	0.4	0.6	1	1.6	2.4	3.4

k_3	-3.2	-1.8	-1	-0.8	-1.2	-2.2	-3.8	-6	-8.8	-12.2	-16.2
k_4	1	0.333	0	0	0.333	1	2	3.333	5	7	9.333
$k_{\overline{1,4}}$	A_{ij}										
	$A_{6\,5}$	$A_{6\,6}$	$A_{6\,7}$	$A_{6\,8}$	$A_{6\,9}$	$A_{6\,10}$	$A_{6\,11}$	$A_{6\,12}$	$A_{6\,13}$	$A_{6\,14}$	$A_{6\,15}$
k_1	0.333	0.4	0.533	0.733	1	1.333	1.733	2.2	2.733	3.333	4
k_2	2	1.2	0.6	0.2	0	0	0.2	0.6	1.2	2	3
k_3	-2	-0.6	0.2	0.4	0	-1	-2.6	-4.8	-7.6	-11	-15
k_4	0.667	0	-0.333	-0.333	0	0.667	1.667	3	4.667	6.667	9
$k_{\overline{1,4}}$	A_{ij}										
	$A_{7\,5}$	$A_{7\,6}$	$A_{7\,7}$	$A_{7\,8}$	$A_{7\,9}$	$A_{7\,10}$	$A_{7\,11}$	$A_{7\,12}$	$A_{7\,13}$	$A_{7\,14}$	$A_{7\,15}$
k_1	-0.067	0	0.133	0.333	0.6	0.933	1.333	1.8	2.333	2.933	3.6
k_2	1.8	1	0.4	0	-0.2	-0.2	0	0.4	1	1.8	2.8
k_3	-1.4	0	0.8	1	0.6	-0.4	-2	-4.2	-7	-10.4	-14.4
k_4	0.667	0	-0.333	-0.333	0	0.667	1.667	3	4.667	6.667	9
$k_{\overline{1,4}}$	A_{ij}										
	$A_{8\,5}$	$A_{8\,6}$	$A_{8\,7}$	$A_{8\,8}$	$A_{8\,9}$	$A_{8\,10}$	$A_{8\,11}$	$A_{8\,12}$	$A_{8\,13}$	$A_{8\,14}$	$A_{8\,15}$
k_1	-0.4	-0.333	-0.2	0	0.267	0.6	1	1.467	2	2.6	3.267
k_2	1.8	1	0.4	0	-0.2	-0.2	0	0.4	1	1.8	2.8
k_3	-1.4	0	0.8	1	0.6	-0.4	-2	-4.2	-7	-10.4	-14.4
k_4	1	0.333	0	0	0.333	1	2	3.333	5	7	9.333
$k_{\overline{1,4}}$	A_{ij}										
	$A_{9\,5}$	$A_{9\,6}$	$A_{9\,7}$	$A_{9\,8}$	$A_{9\,9}$	$A_{9\,10}$	$A_{9\,11}$	$A_{9\,12}$	$A_{9\,13}$	$A_{9\,14}$	$A_{9\,15}$
k_1	-0.667	-0.6	-0.467	-0.267	0	0.333	0.733	1.2	1.733	2.333	3
k_2	2	1.2	0.6	0.2	0	0	0.2	0.6	1.2	2	3
k_3	-2	-0.6	0.2	0.4	0	-1	-2.6	-4.8	-7.6	-11	-15
k_4	1.667	1	0.667	0.667	1	1.667	2.667	4	5.667	7.667	10
$k_{\overline{1,4}}$	A_{ij}										
	$A_{10\,5}$	$A_{10\,6}$	$A_{10\,7}$	$A_{10\,8}$	$A_{10\,9}$	$A_{10\,10}$	$A_{10\,11}$	$A_{10\,12}$	$A_{10\,13}$	$A_{10\,14}$	$A_{10\,15}$
k_1	-0.867	-0.8	-0.667	-0.467	-0.2	0.133	0.533	**1**	1.533	2.133	2.8
k_2	2.4	1.6	1	0.6	0.4	0.4	0.6	**1**	1.6	2.4	3.4
k_3	-3.2	-1.8	-1	-0.8	-1.2	-2.2	-3.8	**-6**	-8.8	-12.2	-16.2
k_4	2.667	2	1.667	1.667	2	2.667	3.667	**5**	6.667	8.667	11

Вірність наведених у таблиці величин коефіцієнтів суперпозиції перевіряється за формулою (1). Наприклад, для вузлової точки $A_{10\,12}$:

$$z_{10,12} = k_1 z_{6,9} + k_2 z_{7,6} + k_3 z_{8,8} + k_4 z_{9,9}\ ;$$

$$244 = 1 \cdot 117 + 1 \cdot 85 - 6 \cdot 128 + 5 \cdot 162 = 244.$$

Висновки. Враховуючи вищенаведені приклади, можна зробити висновок, що двовимірні числові послідовності, складовими яких є дискретні аналоги будь-яких елементарних функціональних залежностей можуть бути представлені суперпозиціями двовимірних точкових множин.

Таким чином для моделювання ГО можуть бути застосовані дані дослідження дискретного визначення координат невідомих вузлових точок за довільними дискретними значеннями будь-яких чотирьох точок, у тому числі точок заданого опорного контуру.

Перспективи подальших досліджень. Результати даної роботи можуть бути використані для дискретного формування ГО двовимірними числовими послідовностями не тільки параболічних а й інших функціональних залежностей, а також можуть бути основою подальших досліджень формування врівноважених дискретних структур за даними координатами вузлових точок опорного контуру без складання і розв’язання систем лінійних рівнянь.

Література

1. Воронцов О.В. Визначення одновимірних геометричних образів ланцюгом послідовних суперпозицій із врахуванням величини рекурентної залежності / О.В. Воронцов, Л.О. Тулупова, І.В. Воронцова // Вісник Херсонського національного технічного університету / Вип. . 3(58) – Херсон: ХНТУ, 2016. – С. 487 − 491.
2. Воронцов О.В. Дискретное моделирование кривых поверхностей суперпозициями двумерных точечных множеств / О.В. Воронцов, Л.О. Тулупова // Сборник статей по материалам XL международной научно-практической конференции «Технические науки – от теории к практике». – Новосибирск, 2014. – №11 (36). – С. 7 – 16.
3. Vorontsov, O.V., Tulupova L.O., Vorontsova, I.V. (2016). Discrete modeling of mesh frames of covering surfaces by chains of superpositions. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Volume 69 (2), “Oxford University Press”, 651 – 656.

ДИСКРЕТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ СУПЕРПОЗИЦИЯМИ ДВУХМЕРНЫХ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ НА ПРИМЕРЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

О.В. Воронцов

В статье проведено исследование сплошной двумерной интерполяции по произвольным дискретными значениями четырёх узловых точек. Выведены формулы вычисления коэффициентов суперпозиций двумерных точечных множеств позволяющие определять аналитические выражения дискретных аналогов двумерных геометрических образов в общем виде.

DISCRETE INTERPOLATION OF GEOMETRICAL IMAGES BY SUPERPOSITIONS OF TWO-DIMENSIONAL POINT SETS IN THE CASE OF PARABOLIC SURFACES

O. Vorontsov

In the article research of continuous two-dimensional interpolation, using arbitrary discrete values of four node points is carried out. Computational formulae for superposition coefficients of two-dimensional point sets are obtained. These formulae make possible to determine analytical expressions of discrete analogues of two-dimensional geometrical images in a general form.