

УДК 514.18

*О.В. Воронцов, к.т.н., доцент
Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка*

МОДЕЛЮВАННЯ ОБ'ЄКТІВ БУДІВНИЦТВА ТА МАШИНОБУДУВАННЯ ДОВІЛЬНИМИ ДИСКРЕТНИМИ ЗНАЧЕННЯМИ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Проведено дослідження дискретного визначення поліномів різних степенів, що широко застосовуються для геометричного моделювання об'єктів архітектури, будівництва та машинобудування за допомогою вивчених властивостей переходу від замкненої до рекурентної форми задання числових послідовностей довільними дискретними значеннями.

Ключові слова: дискретне геометричне моделювання, рекурентні залежності, числові послідовності, поліноми різних степенів.

УДК 514.18

*О.В. Воронцов, к.т.н., доцент
Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка*

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ СТРОИТЕЛЬСТВА И МАШИНОСТРОЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ДИСКРЕТНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Проведено исследование дискретного определения полиномов разных степеней, которые широко применяются для геометрического моделирования объектов архитектуры, строительства и машиностроения при помощи изученных свойств перехода от замкнутой к рекуррентной форме задания числовых последовательностей произвольными дискретными значениями.

Ключевые слова: дискретное геометрическое моделирование, рекуррентные зависимости, числовые последовательности, полиномы разных степеней.

UDC 514.18

*O.V. Vorontsov, PhD, Associate Professor
Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University*

DESIGNING OF CONSTRUCTION AND MACHINE BUILDING OBJECTS BY ARBITRARY DISCRETE VALUES OF NUMERICAL SEQUENCES

Research of discrete determination of polynomials of different degrees, has been conducted which are widely used for the geometrical design of architecture, construction and machine building objects, with arbitrary discrete values by means of the studied properties of transition from reserved to recurrent form of task for numerical sequences.

Keywords: discrete geometrical designing, recurrent dependences, numerical sequences, polynomials of different degrees.

Постановка проблеми. Методики дискретного формування геометричних об'єктів (поверхні рельєфу, об'єктів будівництва, архітектури, машинобудування) повинні забезпечувати необхідну точність побудови моделі геометричного образу, адекватність проблеми тому процесу чи явищу, що моделюється, мінімальні витрати обчислювальних ресурсів на отримання результату, можливість оперативного коректування локальних ділянок проєктованого образу [1]. Ефективність методик дискретного формування геометричних образів (будь-яких інженерних об'єктів, процесів чи явищ) передбачає використання ефективних алгоритмів переходу від неперервної форми представлення геометричних образів до їх дискретних аналогів [2].

На сьогодні більшість вхідних даних, цільових умов та вимог розв'язуваних прикладних задач, форми представлення, обробки й аналізу даних мають дискретний характер, хоча найбільш суттєві теоретичні та прикладні результати створення методик моделювання отримані для неперервних форм вхідних даних. Тому реалізація процесу дискретного геометричного моделювання передбачає, зокрема, розроблення ефективних алгоритмів переходу від дискретно представленого образу до його неперервного аналога і навпаки. Залучення математичного апарату числових послідовностей дозволяє простими методами виконувати такі переходи [3].

Дослідження рекурентних формул числових послідовностей як дискретних аналогів неперервних функціональних залежностей з точки зору їх застосування у формуванні геометричних образів є актуальним.

Аналіз останніх досліджень. Питанням аналізу рекурентних формул числових послідовностей для дискретного моделювання і формування дискретних образів об'єктів машинобудування і будівництва присвячено докторську дисертацію професора С.І. Пустюльги [4], роботи професора С.М. Ковальова [5, 6], а також ряд інших робіт. Результати, одержані у цих дослідженнях, показали нові можливості дискретного геометричного моделювання, зокрема можливість простого переходу від дискретно представленого образу до його неперервного аналога і навпаки. У статтях [3, 7, 8] автора цієї роботи проведено дослідження властивостей та узагальнення переходу від неперервних залежностей до рекурентних формул задання дискретних числових послідовностей шляхом заміни дискретними неперервних параметрів класів елементарних функціональних залежностей, зворотних до них, а також тих, які одержують із цих функцій за допомогою чотирьох арифметичних дій і суперпозицій, застосованих певну кількість разів. Доведено, що у загальному випадку дискретними аналогами елементарних функціональних залежностей будуть вирази скінченних різниць різних порядків із застосованими до них відповідними арифметичними діями.

Координати вузлів модельованих дискретних аналогів кривих визначаються за відомими координатами суміжних вузлів. Дискретно представлені криві (ДПК) подаються координатами вузлів із рівномірним кроком по осі.

Дані алгоритми можуть бути значно ефективніші за рахунок економії обчислювальних ресурсів при формуванні ДПК вузлами із довільними кроками по осі за даними координатами довільних вузлів.

Постановка завдання. Мета роботи полягає у вивченні властивостей переходу від аналітичних виразів поліномів різних степенів до рекурентних формул задання дискретних числових послідовностей шляхом заміни неперервних параметрів дискретними з довільним кроком.

Виклад основного змісту дослідження. Числова послідовність, довільний член якої визначається формулою у замкненій формі

$$a_i = m_0 + m_1 i + m_2 i^2 + m_3 i^3 \dots + m_n i^n, \quad (1)$$

визначає поліном n -го степеня

$$y = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 \dots + m_n x^n, \quad (2)$$

При $n = 1$ послідовність має вигляд

$$a_i = m_0 + m_1 i, \quad (3)$$

Таку послідовність, у свою чергу, визначає рекурентна залежність

$$a_{i+1} = a_i + m_1, \quad (4)$$

що є дискретним аналогом полінома першого степеня.

Рекурентна залежність між послідовними членами послідовності другого порядку, взятими з рівномірним кроком, має вигляд

$$a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1} = 2m_2 \quad (5)$$

і т. д. – до n -го порядку [2].

Визначимо рекурентну залежність між непослідовними членами числової послідовності, взятими із нерівномірним кроком.

Для послідовності першого порядку (рис. 1)

$$\begin{aligned} a_i &= m_0 + m_1 i : \\ a_{i+p} &= m_0 + m_1(i + p) \\ a_{i+p_1} &= m_0 + m_1(i + p_1) \\ a_{i+p_2} &= m_0 + m_1(i + p_2); \\ a_{i+p} &= a_1 a_{i+p_1} + a_2 a_{i+p_2} = \\ &= a_1(m_0 + m_1(i + p_1)) + a_2(m_0 + m_1(i + p_2)); \end{aligned} \quad (6)$$

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_1(m_0 + m_1 p_1) + a_2(m_0 + m_1 p_2) = m_0 + m_1 p;$$

$$a_1 = \frac{\Delta_{a_1}}{\Delta} ; \quad a_2 = \frac{\Delta_{a_2}}{\Delta} ;$$

$$a_1 = \frac{p_2 - p}{p_2 - p_1} ; \quad a_2 = \frac{p - p_1}{p_2 - p_1} ;$$

$$a_{i+p} = \frac{p - p_2}{p_2 - p_1} a_{i+p_1} + \frac{p - p_1}{p_2 - p_1} a_{i+p_2} ; \quad (7)$$

$$a_{i+p} = a_1 a_{i+p_1} + a_2 a_{i+p_2} /$$

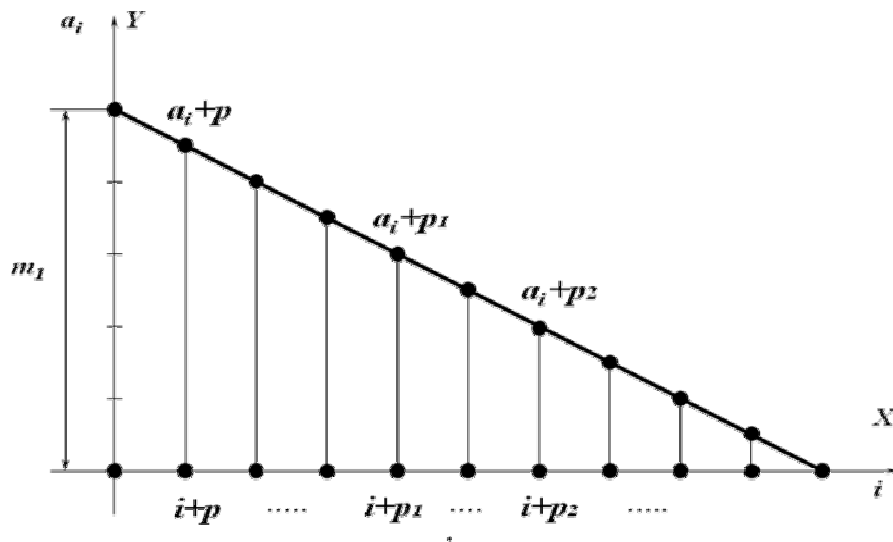


Рисунок 1 – Послідовність 1-го порядку

Аналогічно для послідовності другого порядку (рис. 2)

$$a_i = m_0 + m_1 i + m_2 i^2 :$$

$$a_{i+p} = a_1 a_{i+p_1} + a_2 a_{i+p_2} + a_3 a_{i+p_3} ;$$

$$m_0 + m_1(i + p) + m_2(i + p)^2 =$$

$$= a_1(m_0 + m_1(i + p_1) + m_2(i + p_1)^2) + a_2(m_0 + m_1(i + p_2) + m_2(i + p_2)^2) +$$

$$+ a_3(m_0 + m_1(i + p_3) + m_2(i + p_3)^2) \Rightarrow$$

$$m_0 + m_1(i + p) + m_2(i^2 + 2ip + p^2) =$$

$$a_1(m_0 + m_1(i + p_1) + m_2(i^2 + 2ip_1 + p_1^2) +$$

$$+ a_2(m_0 + m_1(i + p_2) + m_2(i^2 + 2ip_2 + p_2^2) +$$

$$+ a_3(m_0 + m_1(i + p_3) + m_2(i^2 + 2ip_3 + p_3^2));$$

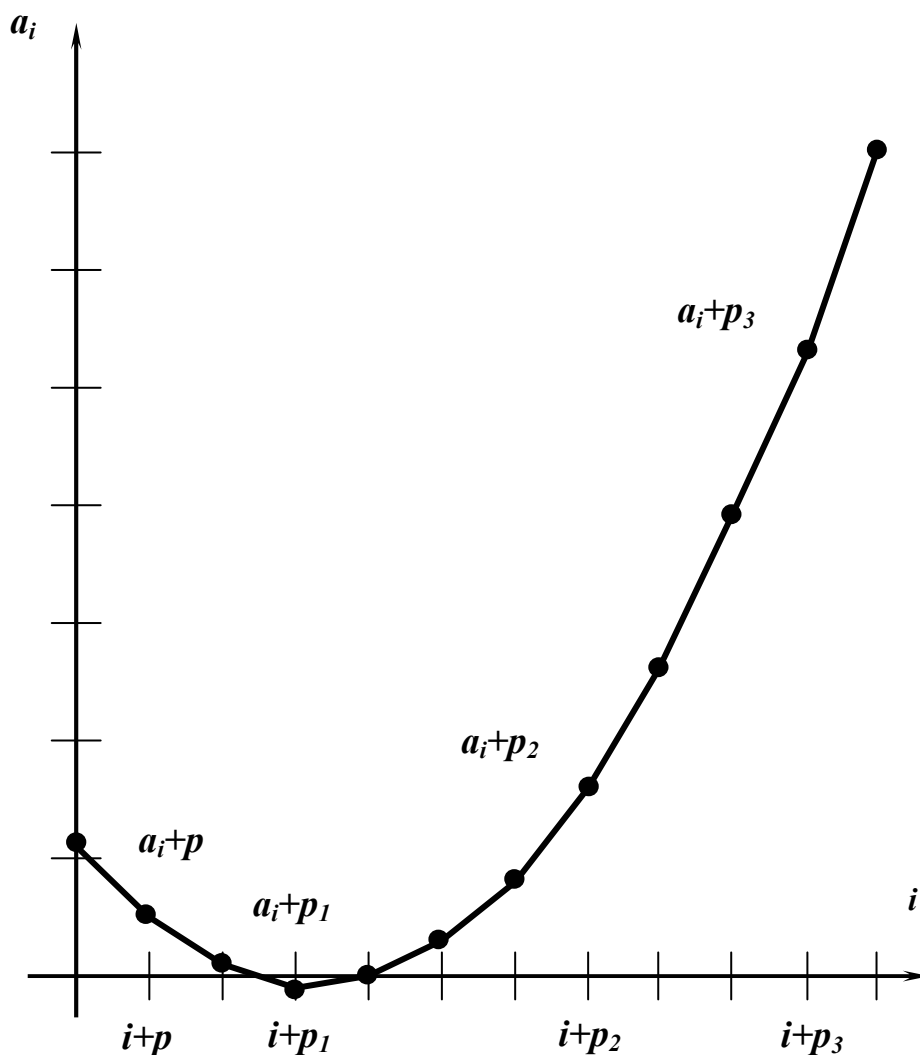


Рисунок 2 – Послідовність 2-го порядку

Прирівнюємо показники при однакових степенях i та одержуємо систему для визначення a_1 , a_2 , a_3

$$\begin{aligned}
 m_0 + m_1 p + m_2 p^2 &= a_1(m_0 + m_1 p + m_2 p_1^2) + \\
 &+ a_2(m_0 + m_1 p_2 + m_2 p_2^2) + a_3(m_0 + m_1 p_3 + m_2 p_3^2); \\
 m_1 + 2m_2 p &= a_1(m_1 + 2m_2 p_1) + a_2(m_1 + 2m_2 p_2) + a_3(m_1 + 2m_2 p_3) \\
 m_2 &= a_1 m_2 + a_2 m_2 + a_3 m_2 \\
 a_1(m_0 + m_1 p_1 + m_2 p_1^2) &+ a_2(m_0 + m_1 p_2 + m_2 p_2^2) + a_3(m_0 + m_1 p_3 + m_2 p_3^2) = \\
 &= m_0 + m_1 p + m_2 p^2 \\
 a_1(m_1 + 2m_2 p_1) &+ a_2(m_1 + 2m_2 p_2) + a_3(m_1 + 2m_2 p_3) = \\
 &= m_1 + 2m_2 p \\
 a_1 + a_2 + a_3 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m_1 + 2m_1p_1 & m_1 + 2m_2p_2 & m_1 + 2m_2p_3 \\ m_0 + m_1p_1 + m_2p_1^2 & m_0 + m_1p_2 + m_2p_2^2 & m_0 + m_1p_3 + m_2p_3^2 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m_1 + 2m_1p_1 & 2m_2(p_2 - p_1) & 2m_2(p_2 - p_1) \\ m_0 + m_1p_1 + m_2p_1^2 & m_1(p_2 - p_1) + m_2(p_2^2 - p_1^2) & m_1(p_3 - p_1) + m_2(p_3^2 - p_1^2) \end{vmatrix} = \\
&= 2m_2 \begin{vmatrix} p_2 - p_1 & p_3 - p_1 \\ (p_2 - p_1)(m_1 + m_2(p_2 + p_1)) & (p_2 - p_1)(m_1 + m_2(p_2 + p_1)) \end{vmatrix} = \\
&= 2m_2(p_2 - p_1)(p_3 - p_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m_1 + m_2(p_2 + p_1) & m_1 + m_2(p_3 + p_1) \end{vmatrix} = \\
&= 2m_2(p_2 - p_1)(p_3 - p_1)(m_2(p_3 + p_1) - m_2(p_2 + p_1)) = \\
&= 2m_2^2(p_2 - p_1)(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{a_1} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m_1 + 2m_1p & m_1 + 2m_2p_2 & m_1 + 2m_2p_3 \\ m_0 + m_1p_1 + m_2p^2 & m_0 + m_1p_2 + m_2p_2^2 & m_0 + m_1p_3 + m_2p_3^2 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_1 + 2m_1p & 2m_2(p_2 - p) & 2m_2(p_2 - p) \\ m_0 + m_1p_1 + m_2p^2 & m_1(p_2 - p) + m_2(p_2^2 - p^2) & m_1(p_3 - p) + m_2(p_3^2 - p^2) \end{vmatrix} = \\
&= 2m_2(p_2 - p)(p_3 - p) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m_1 + m_2(p_2 + p) & m_1 + m_2(p_3 + p) \end{vmatrix} = \\
&= 2m_2(p_2 - p)(p_3 - p)m_2(p_3 - p_2) = \\
&= 2m_2^2(p_2 - p)(p_3 - p)(p_3 - p_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{a_2} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m_1 + 2m_2p_1 & m_1 + 2m_2p & m_1 + 2m_2p_3 \\ m_0 + m_1p_1 + m_2p_1^2 & m_0 + m_1p + m_2p^2 & m_0 + m_1p_3 + m_2p_3^2 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_1 + 2m_1p_1 & 2m_2(p - p_1) & 2m_2(p_3 - p_1) \\ m_0 + m_1p_1 + m_2p_1^2 & m_1(p - p_1) + m_2(p^2 - p_1^2) & m_1(p_3 - p_1) + m_2(p_3^2 - p_1^2) \end{vmatrix} = \\
&= 2m_2(p - p_1)(p_3 - p_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m_1 + m_2(p + p_1) & m_1 + m_2(p_3 + p_1) \end{vmatrix} = \\
&= 2m_2^2(p - p_1)(p_3 - p_1)(p_3 - p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{a_3} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m_1 + 2m_2p_1 & m_1 + 2m_2p_2 & m_1 + 2m_2p \\ m_0 + m_1p_1 + m_2p_1^2 & m_0 + m_1p_2 + m_2p_2^2 & m_0 + m_1p + m_2p^2 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_1 + 2m_1p_1 & 2m_2(p_2 - p_1) & 2m_2(p_3 - p_1) \\ m_0 + m_1p_1 + m_2p_1^2 & m_1(p_2 - p_1) + m_2(p_2^2 - p_1^2) & m_1(p - p_1) + m_2(p^2 - p_1^2) \end{vmatrix} = \\
&= 2m_2(p_2 - p_1)(p - p_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m_1 + m_2(p_2 + p_1) & m_1 + m_2(p + p_1) \end{vmatrix} = \\
&= 2m_2^2(p_2 - p_1)(p - p_1)(p - p_2)
\end{aligned}$$

Одержуємо вирази для визначення $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_{a_1}}{\Delta} = \frac{2m_2^2(p_2 - p)(p_3 - p)(p_3 - p_2)}{2m_2^2(p_2 - p_1)(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)} = \frac{(p - p_2)(p - p_3)}{(p_2 - p_1)(p_3 - p_1)}$$

$$\alpha_2 = \frac{\Delta_{a_2}}{\Delta} = \frac{2m_2^2(p - p_1)(p_3 - p_1)(p_3 - p)}{2m_2^2(p_2 - p_1)(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)} = \frac{(p - p_1)(p - p_3)}{(p_1 - p_2)(p_3 - p_2)}$$

$$\alpha_3 = \frac{\Delta_{a_3}}{\Delta} = \frac{2m_2^2(p_2 - p_1)(p - p_1)(p - p_2)}{2m_2^2(p_2 - p_1)(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)} = \frac{(p - p_1)(p - p_2)}{(p_1 - p_3)(p_2 - p_3)}$$

І тому рекурентна залежність матиме вигляд

$$a_{i+p} = \frac{(p-p_2)(p-p_3)}{(p_2-p_1)(p_3-p_1)} a_{i+p_1} + \frac{(p-p_1)(p-p_3)}{(p_1-p_2)(p_3-p_2)} a_{i+p_2} + \frac{(p-p_1)(p-p_2)}{(p_1-p_3)(p_2-p_3)} a_{i+p_3}$$

Перевірмо вірність виведених формул на конкретному прикладі. Розглянемо спочатку визначення аналітичного виразу полінома другого степеня:

$$y = m_0 + m_1x + m_2x^2$$

за трьома заданими точками A , B , C із такими координатами:

$$A(1, 5); B(2, 1); C(5, 3).$$

Для знаходження m_0 , m_1 , m_2 необхідно розв'язати систему

$$\begin{cases} 5 = m_0 + m_1 + m_2 \\ 1 = m_0 + 2m_1 + 4m_2 \\ 3 = m_0 + 5m_1 + 25m_2 \end{cases};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} = 12;$$

$$\Delta_{m_0} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 25 \end{vmatrix} = 136;$$

$$\Delta_{m_1} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 25 \end{vmatrix} = -90;$$

$$\Delta_{m_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 14.$$

$$m_0 = \frac{\Delta_{m_0}}{\Delta} = \frac{136}{12} ;$$

$$m_1 = \frac{\Delta_{m_1}}{\Delta} = \frac{-90}{12} ;$$

$$m_2 = \frac{\Delta_{m_2}}{\Delta} = \frac{14}{12} .$$

Одержуємо аналітичний вираз даного поліному:

$$y = \frac{136}{12} - \frac{90}{12}x + \frac{14}{12}x^2 \Rightarrow y = \frac{34}{3} - \frac{15}{2}x + \frac{7}{6}x^2 ,$$

і, відповідно, числової послідовності:

$$a_i = \frac{34}{3} - \frac{15}{2}i + \frac{7}{6}i^2 .$$

Ряд значень цієї послідовності наведено у таблиці 1.

Таблиця 1. Значення числової послідовності $a_i = \frac{34}{3} - \frac{15}{2}i + \frac{7}{6}i^2$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_i	11,33	5	1	-0,67	0	3	8,33	16	26	38,33	53	70

Визначимо α_{i+p} за такими даними: $p = 1; p_1 = 3; p_2 = 7; p_3 = 10$.

$$a_{i+1} = \frac{(7-1)(10-1)}{(7-3)(10-3)}a_{i+3} + \frac{(1-3)(10-1)}{(7-3)(10-7)}a_{i+7} + \frac{(1-3)(1-7)}{(10-3)(10-7)}a_{i+10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{i+1} = \frac{27}{14}a_{i+3} - \frac{3}{2}a_{i+7} + \frac{4}{7}a_{i+10}$$

При $i = 0$

$$a_1 = \frac{27}{14}a_3 - \frac{3}{2}a_7 + \frac{4}{7}a_{10} .$$

За наведеними у таблиці даними $a_1 = 5$; $a_3 = -0,67$; $a_7 = 16$; $a_{10} = 53$,
тому

$$5 = \frac{27}{14}(-\frac{2}{3}) - \frac{3}{2}16 + \frac{4}{7}53 \Rightarrow 5 = 5.$$

При $i = 1$

$$a_2 = \frac{27}{14}a_4 - \frac{3}{2}a_8 + \frac{4}{7}a_{11}.$$

За наведеними у таблиці даними $a_2 = 1$; $a_4 = 0$; $a_8 = 26$; $a_{11} = 70$,
тому

$$1 = \frac{27}{14}0 - \frac{3}{2}26 + \frac{4}{7}70 \Rightarrow 1 = 1.$$

Для послідовності третього порядку

$$a_i = m_0 + m_1i + m_2i^2 + m_3i^3$$

рекурентна залежність має вигляд

$$a_{i+p} = a_1 a_{i+p_1} + a_2 a_{i+p_2} + a_3 a_{i+p_3} + a_4 a_{i+p_4},$$

де

$$a_1 = \frac{\Delta_{a_1}}{\Delta}; \quad a_2 = \frac{\Delta_{a_2}}{\Delta}; \quad a_3 = \frac{\Delta_{a_3}}{\Delta}; \quad a_4 = \frac{\Delta_{a_4}}{\Delta}.$$

І відповідно для послідовності n -го порядку

$$a_i = m_0 + m_1i + m_2i^2 + m_3i^3 + \dots + m_ni^n$$

рекурентна залежність має вигляд

$$a_{i+p} = a_1 a_{i+p_1} + a_2 a_{i+p_2} + a_3 a_{i+p_3} + \dots + a_k a_{i+p_k} + \dots + \\ + a_n a_{i+p_n} + a_{n+1} a_{i+p_{n+1}},$$

показники якої визначаються аналогічно.

Висновки. Таким чином, для геометричного моделювання дискретних образів об'єктів архітектури, будівництва та машинобудування можуть бути застосовані дані дослідження властивостей переходу від замкненої до рекурентної форми задання числових послідовностей довільними дискретними значеннями.

Література

1. Vorontsov, O.V. Modeling problems of discrete surfaces given on the multitude of characteristic points / O.V. Vorontsov, A.V. Makhinko. // *The 10-th international conference on geometry and graphics*. – Kyiv (Ukraine). – 2002. – vol. 1 – P. 145 – 148.
2. Воронцов, О.В. Визначення рекурентної залежності між членами числових послідовностей, взятими із нерівномірним кроком / О.В. Воронцов // *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 90. – С. 68 – 73.
3. Воронцов, О.В. Рекурентні аналоги класів елементарних функцій / О.В. Воронцов, Г.О. Радченко // *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. – К.: КНУБА, 2010. – Вип. 83. – С. 136 – 139.
4. Пустюльга, С.І. Дискретне визначення геометричних об'єктів числовими послідовностями: дис. д-ра техн. наук: 05.01.01 / КНУБА. – К.: 2006. – 316 с.
5. Ковальов, С.М. Рекурентні формули числових послідовностей у формуванні дискретно визначених геометричних образів / С.М. Ковальов, С.І. Ботвіновська // *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. – К.: КНУБА, 2006. – Вип. 76. – С. 30 – 37.
6. Ковалев, С.Н. Прикладная геометрия и геометрическая статика / С.М. Ковальов, В.А. Вязанкин // *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. – К.: КНУБА, 2007. – Вип. 78. – С. 41 – 43.
7. Воронцов, О.В. Дослідження рекурентних форм представлення елементарних функціональних залежностей / О.В. Воронцов, Г.О. Радченко // *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 87. – С. 98 – 101.
8. Воронцов, О.В. Заміна неперервних форм елементарних функціональних залежностей рекурентними формулами задання дискретних числових послідовностей / О.В. Воронцов // *Геометричне та комп'ютерне моделювання: збірник наук. праць*. – Харків: ХДУХТ, 2010. – Вип. 27. – С. 57 – 62.

Надійшла до редакції 05.03.2013
© О.В. Воронцов