УДК 514.18

О.В. ВОРОНЦОВ,
Л.О. ТУЛУПОВА
Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка
І.В. ВОРОНЦОВА
Полтавський коледж нафти і газу Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка

Визначення аплікат внутрішніх вузлів дискретних каркасів поверхонь паралельного переносу як суперпозицій заданих аплікат опорного контуру

В роботі проведено дослідження організації ланцюга послідовних суперпозицій суміжних точок для моделювання статично визначених дискретних каркасів поверхонь паралельного переносу із врахуванням величини рекурентної залежності, що є прообразом зовнішнього формоутворюючого навантаження у статико-геометричному методі дискретного геометричного моделювання. Результатом даного дослідження є одержані формули загального вигляду, що дозволяють формувати врівноважені дискретні каркаси поверхонь паралельного переносу, складовими каркаса яких будуть криві другого порядку без розв'язання громіздких систем рівнянь, що сприяє підвищенню ефективності алгоритмів дискретного геометричного моделювання.

Ключові слова: статико-геометричний метод, геометричний апарат суперпозицій, величина рекурентної залежності, коефіцієнти суперпозиції.

О. В. ВОРОНЦОВ,
Л.А. ТУЛУПОВА
Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка
И.В. ВОРОНЦОВА
Полтавский колледж нефти и газа Полтавского национального технического университета имени Юрия Кондратюка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ВНУТРЕННИХ УЗЛОВ ДИСКРЕТНЫХ КАРКАСОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСА КАК СУПЕРПОЗИЦИЙ ЗАДАННЫХ АППЛИКАТ ОПОРНОГО КОНТУРА

В работе проведено исследование организации цепи последовательных суперпозиций смежных точек для моделирования статически определенных дискретных каркасов поверхностей параллельного переноса с учетом величины рекуррентной зависимости, которая является прообразом внешней формообразующей нагрузки в статико-геометрическом методе дискретного геометрического моделирования. Результатом данного исследования являются полученные формулы общего вида, позволяющие формировать уравновешенные дискретные каркасы поверхностей параллельного переноса, составляющими каркаса которых будут кривые второго порядка без решения громоздких систем уравнений, что способствует повышению эффективности алгоритмов дискретного геометрического моделирования.

Ключевые слова: статико-геометрический метод, геометрический аппарат суперпозиций, величина рекуррентной зависимости, коэффициенты суперпозиции.

O.V. VORONTSOV,
L.A. TULUPOVA
Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University
I.V. VORONTSOVA
Poltava Petroleum Geological College of Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University

DETERMINATION OF INTERNAL KNOTS COORDINATES OF DISCRETE FRAMES OF PARALLEL TRANSFER SURFACES AS SUPERPOSITIONS OF SET SUPPORTING CONTOUR APPLICATES

In this paper, it was investigated a chain organization of adjacent points successive superpositions. It was used for modeling statically determined discrete frames of parallel transfer surfaces considering a recurrent dependence value. This value is a prototype of an external form-forming load in the static-geometric method of discrete geometric modeling.

In the result of the research computing formulae in a general form are obtained. They allow forming balanced discrete frames of parallel transfer surfaces, where their components are second-order curves. According to this method it becomes possible to do without solving cumbersome systems of equations. Owing to this an efficiency of discrete geometric modeling algorithms significantly increases.

Forming discrete models of geometric images, particularly spatial covering models, by the static-geometric method demands a repeating compilation and solving of bulky systems of linear equations. This problem arises at different stages - of sketch design, control of a simulated surface shape and change of separate parameters. Thus, it is necessary to carry out new researches of methods and algorithms, which allow modeling balanced discretely defined geometric images without compiling and solving systems of equations. Involvement of the geometric apparatus of superpositions to form geometric images expands possibilities of the static-geometric method of discrete modeling due to a considerable saving of computing resources.

The research has shown that a superposition of n points can be replaced by a successive superpositions chain.

Formulae of determining discrete values of internal nodal points applicates of a balanced surface are obtained in the general form. These formulae can use set applicates of contour and central nodes or set applicates of contour nodes and a recurrent dependence value. This value is identical to an external shaping load value of the static-geometric method of geometric images modeling.

Thus, the results of this research allow modeling balanced discretely determined two-dimensional geometric images without compiling and solving bulky systems of linear equations. This increases an efficiency of discrete geometric modeling algorithms due to a considerable saving of computing resources.

Keywords: static-geometric method, geometrical apparatus of superpositions, value of recurrent dependence, superposition coefficients.

Постановка проблеми. У процесі створення методик дискретного моделювання геометричних образів проектування об'єктів будівництва й архітектури поширеними є задачі переходу від дискретної інформації до неперервної, що розв'язуються методами інтерполяції, а також зворотні задачі переходу від неперервної інформації про геометричний образ до дискретної. Одним із перспективних напрямів розв'язання зазначених проблем є широке застосування методів дискретного геометричного моделювання, що дозволяють істотно спростити алгоритми і програми та забезпечити економію обчислювальних ресурсів.

Для дискретного моделювання геометричних образів можуть бути використані чисельний метод скінченних різниць, статико-геометричний метод, математичний апарат числових послідовностей, що мають свої переваги і недоліки відносно розв'язання конкретних практичних завдань.

У даній статті пропонується застосування у поєднанні з вище переліченими методами геометричного апарату суперпозицій, що дозволяє істотно підвищити ефективність і розширити можливості процесу дискретного моделювання геометричних образів. Зокрема моделювати врівноважені дискретно визначені поверхні паралельного переносу без складання і розв'язання великих систем лінійних рівнянь.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботах [1, 2] авторів даної статті досліджено окремі варіанти ланцюгів суперпозицій і виведені формули обчислення величин коефіцієнтів суперпозицій, які дозволяють визначати координати довільного вузла геометричного образу, як суперпозиції координат заданих контурних вузлів. Можливі інші варіанти й інші підходи до організації ланцюгів суперпозиції, що дозволять підвищити ефективність алгоритмів дискретного геометричного моделювання за рахунок економії обчислювальних ресурсів.

У роботі [3] виведено у загальному вигляді формули визначення дискретних значень ординат вузлових точок врівноваженої кривої за даними ординатами двох контурних та центрального вузлів, або за даними ординатами двох контурних вузлів та величною рекурентної залежності, що тотожна величині зовнішнього формоутворюючого навантаження статико-геометричного методу моделювання геометричних образів, а також зроблено висновок про те, що властивості, які має одновимірна множина точок, можуть бути узагальнені до двовимірної множини, що формується за тими ж законами, якщо одновимірну множину розглядати як складову каркаса двовимірної, властивості дискретної моделі двовимірного геометричного образу також можуть бути одержані узагальненням відповідних властивостей одновимірного.

Формулювання мети дослідження. Метою даної роботи є дослідження організації ланцюга послідовних суперпозицій суміжних точок для моделювання дискретних каркасів поверхонь паралельного переносу із врахуванням величини рекурентної залежності, що є прообразом зовнішнього формоутворюючого навантаження у статико-геометричному методі дискретного геометричного моделювання, а також одержання формул загального вигляду, що дозволяють формувати врівноважені дискретні каркаси поверхонь паралельного переносу, без розв'язання громіздких систем рівнянь і, тим самим, сприяють розширенню можливостей класичного методу скінчених різниць і статико-геометричного методу, підвищенню ефективності алгоритмів дискретного геометричного моделювання [4].

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглянемо приклади організації ланцюгів суперпозицій для визначення координат вузлових точок двовимірних числових послідовностей [1].

Формула

$$z_{i,j} = k_1 z_{i-1,j} + k_2 z_{i+1,j} + k_3 z_{i,j-1} + k_4 z_{i,j+1} \ , \tag{1}$$

де k_1, k_2, k_3, k_4 – коефіцієнти суперпозиції аплікат z заданих суміжних вузлових точок, буде тотожною скінечно-різницевій п'ятиточковій залежності

$$4z_{i,j} = z_{i-1,j} + z_{i+1,j} + z_{i,j-1} + z_{i,j+1} \ . \tag{2}$$

Тому величину рекурентної залежності, яка буде прообразом зовнішнього формоутворюючого навантаження, для формування дискретного каркаса поверхні на основі суперпозицій заданих чотирьох вузлових точок можна записати у вигляді:

$$P_{i,j} = z_{i,j} - k_1 z_{i-1,j} - k_2 z_{i+1,j} - k_3 z_{i,j-1} - k_4 z_{i,j+1} \tag{3}$$

де P_i – дискретна величина рекурентної залежності.

За умови, що $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 1$,

$$P_{i,j} = z_{i,j} - k_1 z_{i-1,j} - k_2 z_{i+1,j} - k_3 z_{i,j-1} - (1 - k_1 - k_2 - k_3) z_{i,j+1}. \tag{4}$$

Враховуючи результати досліджень, що одержані у роботі [3], розглянемо варіант організації ланцюга суперпозицій для визначення аплікат дев'яти (враховуючи умови симетрії опорного контуру – лише трьох) внутрішніх вузлів, як суперпозицій заданих аплікат центрального та усіх контурних вузлів, відсіку дискретного каркасу поверхні, план якої представлений на рисунку 1.

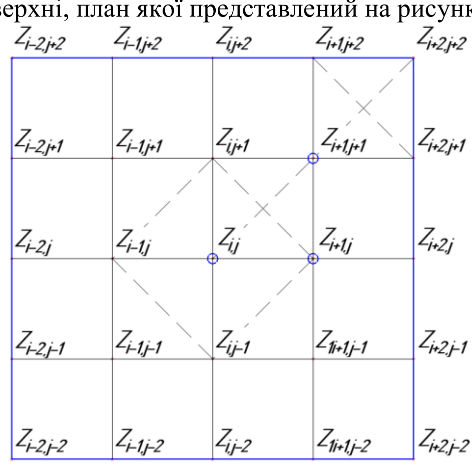

Рисунок 1. План каркаса відсіку поверхні (9 внутрішніх вузлів).

Для поверхні паралельного переносу, у якої всі твірні конгруентні справедливі залежності для будь-яких трьох суміжних точок:

$$z_i = k_1 z_{i-1} + k_2 z_{i+1} - P \ , \tag{5}$$

$$z_j = k_3 z_{j-1} + k_4 z_{j+1} - P \ , \tag{6}$$

де:

1) k_1, k_2, k_3, k_4 – коефіцієнти суперпозиції аплікат суміжних вузлових точок;
2) $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0{,}5$;
3) $z_{i+1} = z_{i-1}$, $z_{i+2} = z_{i-2}$, $z_{j+1} = z_{j-1}$, $z_{j+2} = z_{j-2}$,
4) P – величина рекурентної залежності, що дорівнює 0,5 величини зовнішнього формоутворюючого навантаження статико-геометричного методу: $P = 0{,}5 \cdot KP$.

Додаванням (5) та (6) одержимо нову залежність, що справедлива для будь-яких п'яти суміжних точок:

$$2z_{ij} = k_1 z_{i-1,j} + k_2 z_{i+1,j} + k_3 z_{i,j-1} + k_4 z_{i,j+1} - 2P \ ,$$

або тотожну їй формулу:

$$z_{ij} = k_1 z_{i-1,j} + k_2 z_{i+1,j} + k_3 z_{i,j-1} + k_4 z_{i,j+1} - P \ , \tag{7}$$

де:

1) $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0{,}25$;
2) P – величина рекурентної залежності, що дорівнює 0,25 величини зовнішнього формоутворюючого навантаження статико-геометричного методу: $P = 0{,}25 \cdot KP$.

Враховуючи вищенаведене, для плану відсіку поверхні (рис. 1) із формул (5, 6) зможемо одержати:

$$z_i = z_{i+1} - P \ ; \ z_{i+1} = z_i + P \ ; \tag{8}$$

$$z_j = z_{j+1} - P \ ; \ z_{j+1} = z_j + P \ . \tag{9}$$

Додаванням (8) та (9) одержимо:

$$2z_{ij} = z_{i+1,j} - P + z_{i,j+1} - P = z_{i+1,j} + z_{i,j+1} - 2P\ ;$$

або тотожну їй формулу:

$$z_{ij} = 0{,}5z_{i+1,j} + 0{,}5z_{i,j+1} - P\ ;$$
$$P = z_{ij} - 0{,}5z_{i+1,j} - 0{,}5z_{i,j+1}\ .$$

Для наступної вузлової точки:

$$z_{i+1} = 0{,}5z_i + 0{,}5z_{i+2} - P\ ; \qquad (10)$$
$$z_j = 0{,}5z_{j-1} + 0{,}5z_{j+1} - P\ . \qquad (11)$$

Додаванням (10) та (11) одержимо:

$$2z_{i+1,j} = 0{,}5z_{i,j} + 0{,}5z_{i+2,j} + 0{,}5z_{i+1,j-1} + 0{,}5z_{i+1,j+1} - 2P\ ;$$

або тотожну їй формулу:

$$z_{i+1,j} = 0{,}25z_{i,j} + 0{,}25z_{i+2,j} + 0{,}25z_{i+1,j-1} + 0{,}25z_{i+1,j+1} - P\ .$$

Враховуючи результати роботи [3], зможемо записати:

$$z_i = z_{i+2} - 4P;\ z_{i+1} = z_{i+2} - 3P\ ;\ z_j = z_{j+2} - 4P;\ z_{j+1} = z_{j+2} - 3P\ .$$

Додаванням одержимо формули для визначення аплікат внутрішніх вузлів:

$$2z_{i,j} = z_{i+2,j} - 4P + z_{i,j+2} - 4P\ ;\ 2z_{i,j} = z_{i+2,j} + z_{i,j+2} - 8P\ ,$$

або:

$$z_{i,j} = 0{,}5z_{i+2,j} + 0{,}5z_{i,j+2} - 4P\ ;\ P = \frac{0{,}5z_{i+2,j} + 0{,}5z_{i,j+2} - z_{i,j}}{4}\ ; \qquad (12)$$
$$2z_{i+1,j} = z_{i+2,j} - 3P + z_{i+1,j+2} - 4P\ ;\ 2z_{i+1,j} = z_{i+2,j} + z_{i+1,j+2} - 7P\ ;$$

або:

$$z_{i+1,j} = 0{,}5z_{i+2,j} + 0{,}5z_{i+1,j+2} - 3{,}5P\ ;\ P = \frac{0{,}5z_{i+2,j} + 0{,}5z_{i+1,j+2} - z_{i+1,j}}{3{,}5}\ ; \qquad (13)$$
$$2z_{i+1,j+1} = z_{i+2,j+1} - 3P + z_{i+1,j+2} - 3P\ ;\ 2z_{i+1,j+1} = z_{i+2,j+1} + z_{i+1,j+2} - 6P\ ;$$

або:

$$z_{i+1,j+1} = 0{,}5z_{i+2,j+1} + 0{,}5z_{i+1,j+2} - 3P\ ;\ P = \frac{0{,}5z_{i+2,j+1} + 0{,}5z_{i+1,j+2} - z_{i+1,j+1}}{3}\ . \qquad (14)$$

Таким чином, враховуючи вище наведене, формули (12 – 14) та результати роботи [3], для визначення аплікати довільного вузла за відомою аплікатою заданого контурного вузла у напрямі вісі i, зможемо записати:

$$z_{i+n} = z_i + n^2P;\ P = \frac{z_{i+n} - z_i}{n^2}\ ;$$
$$z_i = z_{i+n} - n^2P;\ z_{i+1} = z_{i+n} - (n^2 - 1^2)P;\ z_{i+2} = z_{i+n} - (n^2 - 2^2)P;$$
$$z_{i+3} = z_{i+n} - (n^2 - 3^2)P; \ldots;\ z_{i+k} = z_{i+n} - (n^2 - k^2)P\ ,$$

або:

$$z_{i+k} = z_{i+n} + (k^2 - n^2)P\ , \qquad (15)$$

де:

k — номер шуканого вузла; n — номер заданого контурного вузла .

Для визначення аплікати довільного вузла за відомою аплікатою заданого контурного вузла у напрямі вісі j, також зможемо записати:

$$z_{j+m} = z_j + m^2P;\ P = \frac{z_{j+n} - z_j}{m^2}\ ;$$
$$z_j = z_{j+m} - m^2P;\ z_{j+1} = z_{j+m} - (m^2 - 1^2)P;\ z_{j+2} = z_{j+m} - (m^2 - 2^2)P;$$
$$z_{j+3} = z_{i+m} - (m^2 - 3^2)P; \ldots;\ z_{j+l} = z_{j+m} - (m^2 - l^2)P\ ,$$

або:

$$z_{j+l} = z_{j+m} + (l^2 - m^2)P\ , \qquad (16)$$

де:

l — номер шуканого вузла; m — номер заданого контурного вузла .

Додаванням (15) та (16) одержимо формули для визначення аплікат внутрішніх вузлів, а також величини рекурентної залежності:

$$2z_{i+k,j+l} = z_{i+n,j+l} + (k^2 - n^2)P + z_{i+k,j+m} + (l^2 - m^2)P\ ;$$
$$2z_{i+k,j+l} = z_{i+n,j+l} + z_{i+k,j+m} + (k^2 + l^2 - n^2 - m^2)P\ ;$$

або:

$$z_{i+k,j+l} = 0{,}5 \cdot z_{i+n,j+l} + 0{,}5 \cdot z_{i+k,j+m} + (k^2 + l^2 - n^2 - m^2) \cdot 0{,}5 \cdot P\ ; \qquad (17)$$
$$P = \frac{z_{i+k,j+l} - 0{,}5 \cdot z_{i+n,j+l} - 0{,}5 \cdot z_{i+k,j+m}}{(k^2 + l^2 - n^2 - m^2) \cdot 0{,}5}\ , \qquad (18)$$

де:

k — номер шуканого вузла, n — номер заданого контурного вузла, $z_{i+n,j+l}$ – задана апліката контурного вузла за напрямом осі i ;

l — номер шуканого вузла , m — номер заданого контурного вузла, $z_{i+k,j+m}$ – задана апліката контурного вузла за напрямом осі j ;
P – величина рекурентної залежності, що дорівнює 0,25 величини зовнішнього формоутворюючого навантаження статико-геометричного методу: $P = 0{,}25 \cdot KP$.

Висновки. Проведені дослідження показують, що суперпозиція n точок може бути замінена ланцюгом послідовних суперпозицій.

Виведено у загальному вигляді формули (17), (18) визначення дискретних значень аплікат внутрішніх вузлових точок врівноваженої кривої поверхні за даними аплікатами контурних та центрального вузлів, або за даними аплікатами контурних вузлів та величною рекурентної залежності, що тотожна величині зовнішнього формоутворюючого навантаження статико-геометричного методу моделювання геометричних образів.

Таким чином, результати проведених досліджень дозволяють моделювати врівноважені дискретно визначені двовимірні геометричні образи без складання і розв'язання великих систем лінійних рівнянь, що сприяє підвищенню ефективності алгоритмів дискретного геометричного моделювання за рахунок значної економії обчислювальних ресурсів.

Список використаної літератури.

1. Vorontsov, O.V., Tulupova L.O., Vorontsova, I.V. (2016). Discrete modeling of mesh frames of covering surfaces by chains of superpositions. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Volume 69 (2), “Oxford University Press”, 651 – 656.

2. Воронцов О.В. Визначення одновимірних геометричних образів ланцюгом послідовних суперпозицій із врахуванням величини рекурентної залежності / О.В. Воронцов, Л.О. Тулупова, І.В. Воронцова // Вісник Херсонського національного технічного університету / Вип. . 3(58) – Херсон: ХНТУ, 2016. – С. 487 − 491.

3. Воронцов О.В. Визначення координат внутрішніх вузлів, як суперпозицій заданих координат центрального та двох контурних вузлів дискретно представленої кривої / О.В. Воронцов, Л.О. Тулупова, І.В. Воронцова // Вісник Херсонського національного технічного університету / Вип. . 3(66), ТОМ 2 – Херсон: ХНТУ, 2018. – С. 120 – 124.

4. Vorontsov O. Discrete modeling of building structures geometric images. / O. Vorontsov, L. Tulupova, O. Vorontsova // International Journal of Engineering & Technology. Vol. 7 No. 3.2 (2018). P. 727 – 731.

References.

1. Vorontsov, O.V., Tulupova L.O., Vorontsova, I.V. (2016). Discrete modeling of mesh frames of covering surfaces by chains of superpositions. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Volume 69 (2), “Oxford University Press”, 651 – 656.

2. Vorontsov O.V. Vyznachennia odnovymirnykh heometrychnykh obraziv lantsiuhom poslidovnykh superpozytsii iz vrakhuvanniam velychyny rekurentnoi zalezhnosti / O.V. Vorontsov, L.O. Tulupova, I.V. Vorontsova // Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu / Vyp. . 3(58) – Kherson: KhNTU, 2016. – S. 487 − 491.

3. Vorontsov O.V. Vyznachennia koordynat vnutrishnikh vuzliv, yak superpozytsii zadanykh koordynat tsentralnoho ta dvokh konturnykh vuzliv dyskretno predstavlenoi kryvoi / O.V. Vorontsov, L.O. Tulupova, I.V. Vorontsova // Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu / Vyp. . 3(66), TOM 2 – Kherson: KhNTU, 2018. – S. 120 – 124.

4. Vorontsov O. Discrete modeling of building structures geometric images. / O. Vorontsov, L. Tulupova, O. Vorontsova // International Journal of Engineering & Technology. Vol. 7 No. 3.2 (2018). P. 727 – 731.

ВОРОНЦОВ Олег Вікторович – к.т.н., доцент, завідуючий кафедрою нарисної геометрії і графіки Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка, **e-mail: voronoleg6163@gmail.com**

ТУЛУПОВА Лариса Олександрівна – к.ф.-м.н., доцент кафедри прикладної та вищої математики Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка, **e-mail: lar2dar @gmail.com**

ВОРОНЦОВА Ірина Валеріївна – к.пед.н., викладач Полтавського коледжу нафти і газу Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка, **e-mail: ira061061@gmail.com**

Наукові інтереси: дискретне геометричне моделювання об'єктів.