УДК. 514.18

ДИСКРЕТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБРАЗІВ СУПЕРПОЗИЦІЯМИ ТОЧКОВИХ МНОЖИН ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ ФУНКЦІЙ

Воронцов О.В., к.т.н.,
Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка (м. Полтава, Україна).
Тел., (095) 092 30 89

У статті пропонується застосування у поєднанні з класичним методом скінченних різниць геометричного апарату суперпозицій, що дозволяє істотно підвищити ефективність і розширити можливості процесу дискретного моделювання геометричних образів. Зокрема дослідити можливість використання у якості інтерполянтів не тільки параболічних, а й трансцендентних функціональних залежностей. На основі геометричного апарату суперпозицій одержані обчислювальні шаблони для дискретного формування геометричних образів числовими послідовностями трансцендентних функціональних залежностей, що розширює можливості дискретного геометричного моделювання. Звичайні способи інтерполяції не дозволяють застосовувати трансцендентні функції як інтерполянт тому, що при підстановці в них значень вихідних умов отримаємо систему трансцендентних рівнянь, яку не вдається розв'язати у загальному випадку.

Розроблений спосіб дозволяє проводити трансцендентні криві через задані точки, що у більшості випадків є неможливим при застосуванні звичайних методів інтерполяції.

Результати даної роботи можуть бути основою подальших досліджень дискретного формування геометричних образів одновимірними числовими послідовностями не тільки параболічних, гіперболічних, а й інших елементарних функціональних залежностей, а також можуть бути використані для подальших досліджень суцільної двовимірної інтерполяції (ГО) складовими каркаса яких будуть дискретні аналоги трансцендентних функцій.

Ключові слова: дискретне моделювання, геометричні образи, метод скінчених різниць, статико-геометричний метод, геометричний апарат суперпозицій, трансцендентні функції.

Постановка проблеми. Синусоїдальна зміна довільної величини називається гармонійним коливанням. Прикладами можуть бути будь-які коливальні процеси [1]. Коливання широко розповсюджені в природі і техніці. В багатьох випадках вони грають негативну роль. Коливання моста, які виникають внаслідок поштовхів, що передаються йому колесами потягу при проходженні через стики рейок, коливання (вібрації) корпусу корабля, викликані обертанням гребного гвинта, вібрації крил літака – все це процеси, які можуть привести до катастрофічних наслідків. В подібних випадках усувають причини виникнення коливань, або протидіють тому, щоб коливання досягли небезпечних розмірів.

Разом з тим, коливання є основою різних галузей техніки. Так, наприклад, вся радіотехніка заснована на коливальних процесах.

Тому дискретні аналоги синусоїдальних кривих є цікавими для досліджень вищеперерахованих процесів.

У процесі створення методик дискретного моделювання геометричних образів можуть бути використані чисельний метод скінченних різниць, статико-геометричний метод, математичний апарат числових послідовностей, що мають свої переваги і недоліки відносно розв’язання конкретних практичних завдань. Застосування геометричного апарату суперпозицій у поєднанні з вище переліченими методами дозволяє істотно підвищити ефективність і розширити можливості процесу дискретного моделювання геометричних образів (ГО). Зокрема дослідити можливість використання у якості інтерполянтів не тільки параболічних функцій, а й інших елементарних функціональних залежностей.

Дослідження можливостей геометричного апарату суперпозицій щодо формування дискретно визначених (ГО) сприятиме подальшому розвитку і удосконаленню математичних моделей у процесі конструювання.

Аналіз останніх досліджень У роботах [2-9] автора даної статті досліджено аспекти використання для дискретного геометричного моделювання, наряду із параболічними функціями, інших елементарних функціональних залежностей. Одержано обчислювальні шаблони для формування (ГО) дискретними аналогами показникових та гіперболічних функцій.

Формулювання цілей статті. Метою даної статті є розширення можливостей використання класичного методу скінчених різниць і статико-геометричного методу для дискретного моделювання геометричних образів за рахунок використання у якості інтерполянтів трансцендентних функцій.

Виклад основного матеріалу. Для наочності скінчені різниці часто представляють у вигляді «обчислювальних шаблонів» або «різницевих операторів» [5]. Такі обчислювальні шаблони, наприклад, для центральних різниць мають вигляд:

$$\Delta y_i = 1 \text{ — } -1 ,$$

$$\Delta^2 y_i = 1 \text{ — } -2 \text{ — } 1 ,$$

$$\Delta^3 y_i = 1 \text{ — } -3 \text{ — } 3 \text{ — } -1 ,$$

Розглянемо числову послідовність, що є дискретним аналогом синусоїди (1):

$$y_i = \sin i. \tag{1}$$

У роботі [2] було доведено властивість згідно якої координати будь-якої точки одновимірної множини точок є суперпозицією (2) координат трьох довільних точок цієї множини.

$$\begin{aligned} x_0 &= k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 \ ; \\ y_0 &= k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3 \ , \end{aligned} \tag{2}$$

де: $k_3 = 1 - k_1 - k_2$.

Та виведені формули (3) для обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції k_1, k_2 :

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{(x_0 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_0 - y_3)}{(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)} , \\ k_2 &= \frac{(x_1 - x_3)(y_0 - y_3) - (x_0 - x_3)(y_1 - y_3)}{(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)} . \end{aligned} \tag{3}$$

Розглянемо можливість утворення обчислювального шаблону для дискретного визначення числової послідовності (1) подібного до шаблонів, які можна утворити для поліноміальних кривих.

Складемо систему рівнянь для визначення ординат вузлових точок послідовності (1) за аналогією із рівняннями (2):

$$\begin{cases} y_i - y_{i+2} = k_1(y_{i-1} - y_{i+2}) + k_2(y_{i+1} - y_{i+2}) \\ y_{i+1} - y_{i+3} = k_1(y_i - y_{i+3}) + k_2(y_{i+2} - y_{i+3}) \end{cases} . \tag{4}$$

Із (4) знаходимо [10] вирази для обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції подібні формулам (3):

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{(y_i - y_{i+2})(y_{i+2} - y_{i+3}) - (y_{i+1} - y_{i+2})(y_{i+1} - y_{i+3})}{(y_{i-1} - y_{i+2})(y_{i+2} - y_{i+3}) - (y_{i+1} - y_{i+2})(y_i - y_{i+3})} , \\ k_2 &= \frac{(y_{i-1} - y_{i+2})(y_{i+1} - y_{i+3}) - (y_i - y_{i+2})(y_i - y_{i+3})}{(y_{i-1} - y_{i+2})(y_{i+2} - y_{i+3}) - (y_{i+1} - y_{i+2})(y_i - y_{i+3})} . \end{aligned} \tag{5}$$

Значення ординат суміжних точок візьмемо для вихідних даних

1. $y_{i-1} = 0{,}9092974268$, $y_i = 0{,}1411200081$, $y_{i+1} = -0{,}7568024953$; $y_{i+2} = -0{,}9589242747$.

Величини коефіцієнтів суперпозиції для обчислення ординати шуканої точки за даними ординатами трьох суміжних точок визначимо із формул (5):

$k_1 = 4{,}806295219952881 \cdot 10^{-1}$; $k_2 = 1$;

2. $y_{i-1} = -0{,}7568024953$, $y_i = -0{,}9589242747$,

$y_{i+1} = -0{,}2794154982$; $y_{i+2} = 0{,}6569865987$,

величини коефіцієнтів суперпозиції обчислені за формулами (5):

$k_1 = 4{,}806295219952881 \cdot 10^{-1}$; $k_2 = 1$;

Як видно із двох вищенаведених прикладів, коефіцієнти суперпозиції трьох суміжних із шуканою точок будуть однаковими тому, як і для поліноміальних кривих може бути утворений обчислювальний шаблон для дискретного моделювання одновимірних геометричних образів шляхом інтерполяції заданих вузлових точок синусоїдальними функціями у вигляді:

1 = 0,4806295219952881 — 1 — –0,4806295219952881 .

Для числової послідовності

$$y_i = \operatorname{sh} i$$

обчислювальний шаблон матиме такий же вигляд, як і для числової послідовності $y_i = chi$ [9]:

1 = 0,244728471055 — 1 — –0,244728471055 .

Обчислювальний шаблон для числової послідовності

$$y_i = \operatorname{th} i$$

матиме вигляд:

1 ≈ 0,016 — 7,38 — -6,396 .

Обчислювальний шаблон для числової послідовності

$$y_i = \frac{1}{shi}$$

матиме вигляд:

1 ≈ 0,042 — 3,25 — –2,292 .

Обчислювальний шаблон для числової послідовності

$$y_i = \frac{1}{chi}$$

матиме такий же вигляд:

1 ≈ 0,042 — 3,25 — –2,292 .

Висновки. На основі геометричного апарату суперпозицій одержані обчислювальні шаблони для дискретного формування (ГО) числовими послідовностями трансцендентних функціональних залежностей, що розширює можливості дискретного геометричного моделювання.

Розроблений спосіб дозволяє проводити трансцендентні криві через задані точки, що у більшості випадків є неможливим при застосуванні звичайних методів інтерполяції.

Перспективи подальших досліджень. Результати даної роботи можуть бути основою подальших досліджень суцільної двовимірної інтерполяції (ГО) складовими каркаса яких будуть дискретні аналоги трансцендентних функцій.

Література

1. Воронцов О.В. Рекурентні формули синусоїди у формуванні одновимірних геометричних образів / О.В. Воронцов, Л.О. Тулупова // Сучасні проблеми моделювання. Збірник наукових праць Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького. Мелітополь: – МДПУ. Випуск 4. 2015. С. – 26 − 30.

2. Воронцов О.В. Дискретное моделирование кривых поверхностей суперпозициями двумерных точечных множеств / О.В. Воронцов, Л.О. Тулупова // Сборник статей по материалам XL международной научно-практической конференции «Технические науки – от теории к практике». – Новосибирск, 2014. – №11 (36). – С. 7 – 16.

3. Воронцов О.В. Определение дискретных аналогов гиперболических функциональных зависимостей суперпозициями одномерных точечных множеств. [Электронный ресурс] / О.В. Воронцов // Universsum. Сер.: Технические науки: электрон. научн. журн. − 2015. − № 6(18). − Режим доступа: URL: http: // 7universsum. com /ru/ tech/ archive/ item/1135.

4. Воронцов О.В. Дискретна інтерполяція суперпозиціями одновимірних точкових множин показникових функцій. // Прикладна геометрія та інженерна графіка.: зб. наук. праць – Вип. 94. – К.: КНУБА, 2018. – С. 296-300.

5. Vorontsov, O.V., Tulupova L.O. (2015). Superpositions of one-dimensional numerical sequences of hyperbolical functions in creation of geometrical images. Canadian Journal of Education and Engineering, Volume III (12), 74 – 80.

6. Vorontsov, O.V., Tulupova L.O. (2015). Recurrence formulae of a catenary in creation of geometric images. Oxford Journal of Scientific research, Volume IV (9), 134 – 140.

7. Vorontsov, O.V. (2014). Superposition point set of ***n***-dimensional numerical sequence in discrete geometric modeling. British Journal of science, Education and culture. Volume I (6), 137 – 144.

8. Vorontsov, O.V., Tulupova L.O., Vorontsova, I.V. (2018). Parabolic discrete interpolation by superpositions of one-dimensional point sets. Journal of Engineering Education, Volume 107 (2), 134 – 140.

9. Vorontsov, O.V., Tulupova L.O., Vorontsova, I.V. (2018). Discrete modeling of building structures geometric images. International Journal of Engineering & Technology, 7 (3.2), 727-731.

ДИСКРЕТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ СУПЕРПОЗИЦИЯМИ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКИЙ

О.В. Воронцов

В статье предлагается применение в сочетании с классическим методом конечных разностей геометрического аппарата суперпозиций, что позволяет существенно повысить эффективность и расширить возможности процесса дискретного моделирования геометрических образов. В частности исследовать возможность использования в качестве интерполлянтов не только параболических, но и трансцендентных функциональных зависимостей. На основе геометрического аппарата суперпозиций получены вычислительные шаблоны для дискретного формирования геометрических образов числовыми последовательностями трансцендентных функциональных зависимостей, что расширяет возможности дискретного геометрического моделирования. Обычные способы интерполяции не позволяют применять трансцендентные функции как интерполянт, так как при подстановке в них значений исходных условий получим систему трансцендентных уравнений, которую не удается решить в общем случае.

Разработанный способ позволяет проводить трансцендентные кривые через заданные точки, что в большинстве случаев невозможно при применении обычных способов интерполяции.

Результаты данной работы могут быть основой дальнейших исследований дискретного формирования геометрических образов одномерными числовыми последовательностями не только параболических, трансцендентных, но и других элементарных функциональных зависимостей, а также могут быть использованы для дальнейших

исследований сплошной двумерной интерполяции (ГО) составляющими каркаса которых будут дискретные аналоги трансцендентных функций.

Ключевые слова: дискретное моделирование, геометрические образы, метод конечных разностей, статико-геометрический метод, геометрический аппарат суперпозиций, трансцендентные функции.

DISCRETE MODELLING OF GEOMETRIC IMAGES BY SUPERPOSITIONS OF POINT SETS OF TRANSCEDENTAL FUNCTIONS

O. Vorontsov

In this article it was proposed to use a geometric apparatus of superpositions together with a classical method of finite differences. This can significantly improve the efficiency and enhance the ability of a discrete modeling process of geometric images. In particular, it also allows examining a possibility of using not only parabolic functional dependencies, but transcendental ones as interpolants. On the basis of the geometrical apparatus of superpositions computational templates were obtained. These templates can be used for discrete formatting geometric images by numerical sequences of transcendental functional dependencies. It extends capabilities of discrete geometric modeling.

Conventional methods of interpolation don't allow using of transcendental functions as interpolants, since if we substitute values of initial conditions into them; we obtain a system of transcendental equations, which cannot be solved in a general case.

The developed method allows conducting transcendental curves through predetermined points, which isn't possible in most cases by conventional interpolation methods.

The results of this work can be a basis for further studies of discrete forming of geometrical images by one-dimensional numerical sequences as parabolic and transcendental functional dependencies as other elementary ones. They can also be used for further studies of continuous two-dimensional interpolation. Components of the frame of this interpolation will be discrete analogs of transcendental functions.

Keywords: discrete modeling, geometric images, method of finite differences, static-geometric method, geometrical apparatus of superpositions, transcendental functions.