УДК. 514.18

РЕКУРЕНТНІ ФОРМУЛИ СИНУСОЇДИ У ФОРМУВАННІ ОДНОВИМІРНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБРАЗІВ

Воронцов О.В., к.т.н.,
Тулупова Л.О., к.ф.-м.н.
Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка (м. Полтава, Україна).
Тел., (095) 092 30 89

***Анотація* — у статті розглянуті питання аналізу можливостей переходу від замкненої до рекурентної форми задання числових послідовностей трансцендентних кривих. Досліджено синусоїдальну функціональну залежність з метою її використання для формування одновимірних геометричних образів.**

Ключові слова: **рекурентні формули, числові послідовності, трансцендентні криві, синусоїда, дискретне геометричне моделювання.**

Постановка проблеми. У роботі [1] зазначено, що більшість вхідних даних, та умов вирішуваних прикладних задач, форми представлення, обробки та аналізу даних на ЕОМ мають дискретний характер, хоча найбільш суттєві теоретичні та прикладні результати створення методик моделювання отримані для неперервних форм вхідних даних.

Дослідження рекурентних формул числових послідовностей, як дискретних аналогів неперервних функціональних залежностей з точки зору їх застосування у формуванні геометричних образів є актуальними тому, що на їх основі можуть бути створені ефективні алгоритми переходу від дискретно представленого образу до його неперервного аналогу і навпаки.

Аналіз останніх досліджень. Питання дослідження властивостей та узагальнення переходу від неперервних залежностей класів елементарних функцій до рекурентних формул задання дискретних числових послідовностей шляхом заміни неперервних параметрів дискретними, розглянуті у статтях авторів даної роботи [2, 3, 4]. У цих же статтях зроблені посилання на роботи інших авторів присвячених питанням аналізу рекурентних формул числових послідовностей для дискретного моделювання і формування геометричних образів, що показали нові можливості дискретного геометричного моделювання.

Формулювання цілей статті. Метою даної статті є дослідження можливостей переходу від замкненої до рекурентної форми задання числових послідовностей синусоїдальних функціональних залежностей з метою подальшого формування одновимірних геометричних образів даними числовими послідовностями.

Основна частина. Синусоїдальна зміна довільної величини називається гармонійним коливанням. Прикладами можуть бути будь-які коливальні процеси починаючи від гойдання маятника і закінчуючи звуковими хвилями (гармонійні коливання повітря) – коливання напруги у електричній мережі змінного струму, зміни струму і напруги у коливальному контурі й ін. Тому рекурентні аналоги синусоїдальних кривих є цікавими для досліджень вищеперерахованих процесів.

Плоска крива, що задається у прямокутних координатах рівнянням

$$y = a + b\sin(cx + d) \tag{1}$$

називається синусоїдою.

Графік рівняння виду

$$y = a + b\cos(cx + d)$$

також найчастіше називається синусоїдою. Даний графік одержується із синусоїдального зсувом на $\frac{\pi}{2}$ у від'ємному напрямку осі абсцис (рис. 1).

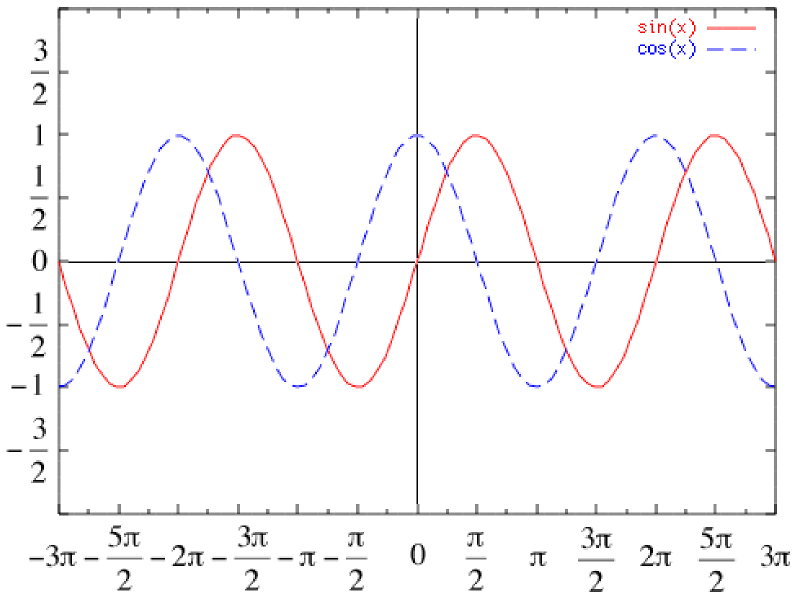

Рисунок 1. Графіки синусоїд

Термін косинусоїда практично відсутній у офіційній літературі оскільки є зайвим.

Замінюючи аргумент x на дискретний параметр i у синусоїдальній функції (1), матимемо:

$$y_i = a + b Ч sin(ci + d) \tag{2}$$

Звідси:

$$b Ч sin(ci + d) = y_i - a \; ; \quad sin(ci + d) = \frac{y_i}{b} - \frac{a}{b} \; .$$

Шляхом звільнення від дискретного параметра i одержимо вирази для визначення суміжних вузлів:

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= a + bsin\left[c(i+1) + d\right] = a + bsin\left[(ci + d) + c\right] = \\
&= a + b\left\{sin(ci + d)cosc + cos(ci + d)sinc\right\} = \\
&= a + cosc Ч (y_i - a) + b Ч sinc Ч \sqrt{1 - sin^2(ci + d)} = \\
&= a + (y_i - a)cosc + b Ч sinc Ч \sqrt{1 - (\frac{y_i}{b} - \frac{a}{b})^2} = \\
&= a + (y_i - a)cosc + \sqrt{b^2 - (y_i - a)^2} Ч sinc
\end{aligned} \tag{3}$$

Аналогічно до (3) одержимо:

$$y_{i-1} = a + (y_i - a)cosc - \sqrt{b^2 - (y_i - a)^2} Ч sinc \tag{4}$$

Додавши (3) до (4) одержимо наступну рекурентну формулу послідовності:

$$\begin{aligned}
&y_{i+1} + y_{i-1} = 2a + 2(y_i - a)cosc \Rightarrow \\
&\Rightarrow y_{i+1} = 2a + 2(y_i - a)cosc - y_{i-1}
\end{aligned} \tag{5}$$

Аналогічно до (5) одержимо:

$$\begin{aligned}
&y_i = 2a + 2(y_{i-1} - a)cosc - y_{i-2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow y_i = 2a + 2y_{i-1}cosc - 2acosc - y_{i-2}
\end{aligned} \tag{6}$$

Віднявши (6) від (5) одержимо:

$$\begin{aligned}
&y_{i+1} - y_i = 2a + 2y_i cosc - 2acosc - y_{i-1} - \\
&-2a - 2y_{i-1}cosc + 2acosc + y_{i-2} = 2(y_i - y_{i-1})cosc + (y_{i-2} - y_{i-1})
\end{aligned}$$

Звідси:

$$y_{i+1} = y_i + 2y_i cosc - 2y_{i-1}cosc - y_{i-1} + y_{i-2} \; ; \tag{7}$$

$$y_{i+1} = y_i(1 + 2cosc) - y_{i-1}(1 + 2cosc) + y_{i-2} \; ; \tag{8}$$

$$y_{i+1} = (y_i - y_{i-1})(1 + 2cosc) + y_{i-2} \ . \qquad (9)$$

Вірність виведених рекурентних формул (7), (8), (9) числової послідовності (2) нескладно перевірити на відповідних тестових прикладах задавши конкретні параметри даної послідовності.

Висновки. Синусоїдальні функціональні залежності можуть бути представлені різними рекурентними формулами нескінчених числових послідовностей, які є дискретними моделями одновимірних геометричних образів із заданою кількістю вузлів. Подальші дослідження будуть спрямовані на вивчення можливостей використання одержаних рекурентних аналогів синусоїди для дискретного моделювання геометричних образів.

Література

1. *Найдиш А.В.* Дискретна адаптивна поліноміальна інтерполяція / А.В. Найдиш // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2003. – Вип. 73. – С. 81-87.
2. *Воронцов, О.В.* Рекурентні аналоги класів елементарних функцій / О.В. Воронцов, Г.О. Радченко // Прикладна геометрія та інженерна графіка.— К.: КНУБА, 2010. — Вип. 83. — С. 136 — 139.
3. *Воронцов, О.В.* Заміна неперервних форм елементарних функціональних залежностей рекурентними формулами задання дискретних числових послідовностей. /О.В. Воронцов // Геометричне та комп’ютерне моделювання: Збірник наук. праць — Харків: ХДУХТ, 2010. — Вип. 27. – С. 57–62.
4. *Воронцов, О.В.* Дослідження рекурентних форм представлення елементарних функціональних залежностей / О.В. Воронцов, Г.О. Радченко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. — К.: КНУБА, 2011. — Вип. 87.— С. 98 — 101.

РЕКУРРЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ СИНУСОИДЫ В ФОРМИРОВАНИИ ОДНОМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ

О.В. Воронцов, Л.А. Тулупова

***Аннотация* — в статье рассмотрены вопросы анализа возможностей перехода от замкнутой к рекуррентной форме задания числовых последовательностей трансцендентных кривых. Исследована синусоидальная функциональная зависимость с целью ее использования для формирования одномерных геометрических образов.**

RECURRENCE FORMULAE OF A SINUSOID IN CREATION OF ONE-DIMENSIONAL GEOMETRIC IMAGES

O. Vorontsov, L. Tulupova

Summary

In the article we have studied a problem of a possibility of transition from a closed form to a recurrence form of a setting of numerical sequences of transcendental curves. A sinusoidal functional relationship has been investigated to use it for creation of one-dimensional geometrical images.