УДК. 514.18

ФОРМУВАННЯ ОДНОВИМІРНОГО ДИСКРЕТНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО ОБРАЗУ СУПЕРПОЗИЦІЯМИ ТОЧКОВИХ МНОЖИН НА ОСНОВІ ДВОХ ТА ОДНОГО ЗАДАНИХ ОБРАЗІВ

Воронцов О.В., к.т.н.,
Тулупова Л.О., к.ф.-м.н.
Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка (м. Полтава, Україна).
Тел., (095) 092 30 89
Воронцова І.В., к.пед.н.
Полтавський коледж нафти і газу
Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка (м. Полтава, Україна).
Тел., (050) 275 02 91

У статті розглянуто спосіб дискретного моделювання кривих ліній на основі суперпозицій двох кривих, що сформовані статико-геометричним методом та на основі суперпозицій вузлових точок однієї кривої сформованої статико-геометричним методом. Запропонований спосіб моделювання дозволяє формувати врівноважені дискретні структури, сформовані на заданих контурних вузлах, а також, що проходять через задані вузлові точки без складання і розв'язання систем рівнянь.

Ключові слова: одновимірні геометричні образи, дискретні моделі кривих, суперпозиції точкових множин, коефіцієнти суперпозиції, статико-геометричний метод.

Постановка проблеми. Одним із важливих напрямів дискретної геометрії є статико-геометричний метод (СГМ) [1], створений на основі статичної інтерпретації класичного методу скінченних різниць. Його простота і практичність виявляються у конструктивності та наочності процесу формоутворення геометричного образу деякого неперервного об'єкта під дією зовнішнього навантаження з урахуванням заданих умов. Сам дискретний образ являє собою ідеалізовану модель сітки, в'язі якої є нерозтяжними нитками, а зовнішні навантаження сприймаються вузлами цієї сітки. Зручність СГМ полягає також у можливості інтерпретувати не тільки об'єкти, топологічно близькі до стрижневих або сітчастих конструкцій, а й будь-які фізичні процеси, які передбачають урахування взаємодії між окремими їх компонентами, довільним чином розташованими у просторі.

Однак головним недоліком СГМ є необхідність складання і розв'язання громіздких систем лінійних рівнянь. Цього недоліку можна позбутися за рахунок використання геометричного апарату суперпозицій. Тому задачею даного дослідження є удосконалення даного методу шляхом залучення геометричного апарату суперпозицій точкових множин для формування одновимірних геометричних образів.

Аналіз останніх досліджень. У роботі [2] досліджувались питання конструювання дискретних каркасів поверхонь функціональним додаванням на основі двох заздалегідь розрахованих статико-геометричним методом каркасів. Проте, перевірка сіток, отриманих в результаті суперпозиції вихідних сіток з різними коефіцієнтами розтягування в'язей показала, що результуюча сітка не є урівноваженою при заданому зовнішньому навантаженні на вузли, тобто результати таких суперпозицій виявилися не точними, а наближеними.

У роботі [3] визначено поняття апарату суперпозицій множин у прикладній геометрії. Доведено ряд властивостей, що дозволили зробити висновки про перспективність глибокого всебічного дослідження апарату суперпозицій.

У роботах [4—7] авторів даної статті показано підходи до визначення дискретних аналогів певних функціональних залежностей на основі геометричного апарату суперпозицій одновимірних точкових множин, що дозволяє формувати дискретні образи без складання і розв'язання громіздких систем рівнянь. Управління формою дискретно представлених кривих здійснюється варіюванням величинами коефіцієнтів суперпозиції.

Формулювання цілей статті. Метою даної статті є дослідження способу моделювання одновимірного геометричного образу у вигляді дискретно представленої кривої із застосуванням геометричного апарату суперпозицій одновимірних точкових множин на основі однієї кривої сформованої статико геометричним методом.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо спочатку приклад формування дискретної моделі кривої на основі суперпозицій двох кривих, що закріплені у двох заданих вузлах, побудованих статико-геометричним методом (рис. 1).

Дискретні значення першої кривої сформовані за вихідними даними $y_{A_1} = 8$, $y_{A_3} = 8$, $P_i = -1$.

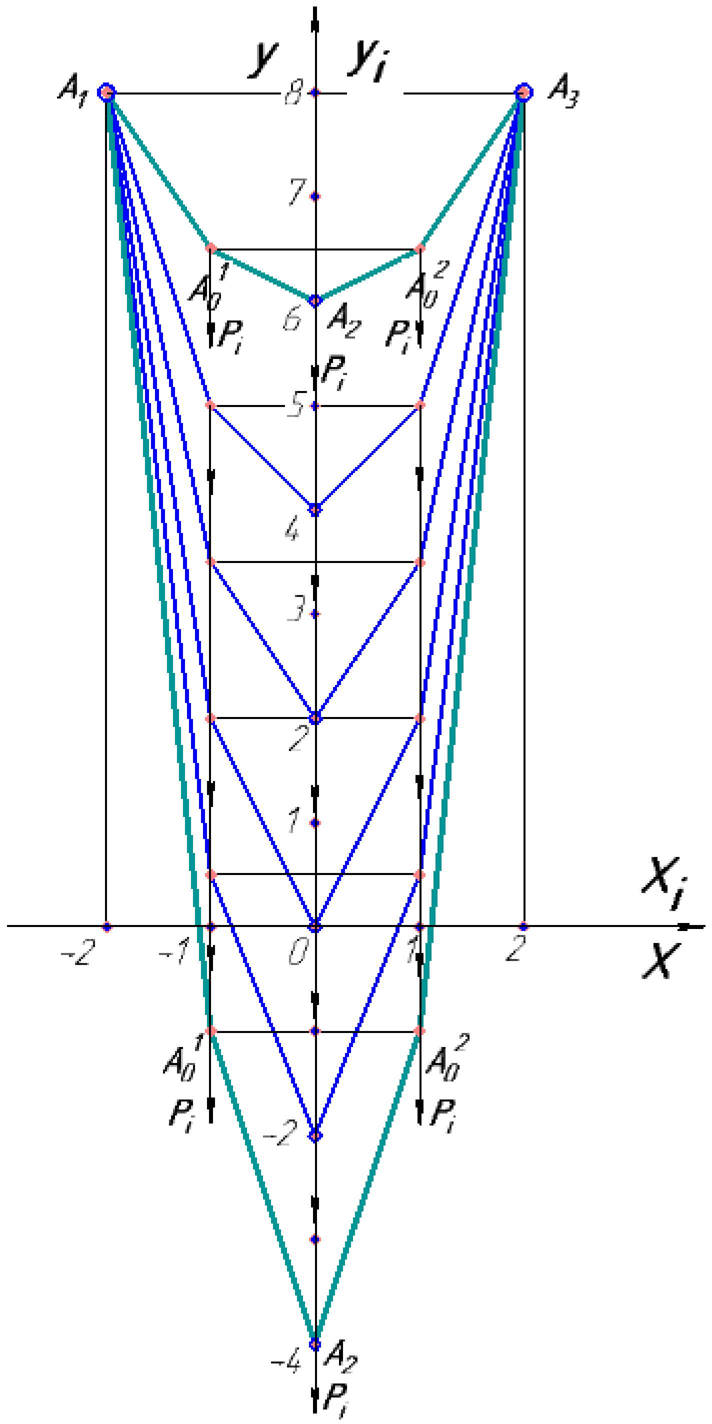

Рисунок 1. Формування дискретних моделей кривих на основі суперпозицій двох дискретно заданих кривих.

Система рівнянь для визначення ординат шуканих точок матиме вигляд [1]:

$$\begin{cases} 8-2y_{A_0^1}+y_{A_2}=1 \\ y_{A_0^1}-2y_{A_2}+y_{A_0^2}=1 \\ y_{A_2}-2y_{A_0^2}+8=1 \end{cases}.$$

Розв'язання цієї системи дає результат: $y_{A_2}=6$, $y_{A_0^1}=6{,}5$, $y_{A_0^2}=6{,}5$.

Коефіцієнти суперпозиції заданих точок A_1, A_2, A_3 обчислені за формулами [4]

$k_1 = \frac{(x_0 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_0 - y_3)}{(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)}$,	
$k_2 = \frac{(x_1 - x_3)(y_0 - y_3) - (x_0 - x_3)(y_1 - y_3)}{(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)}$,	

матимуть значення: $k_1 = 0{,}375$, $k_2 = 0{,}75$, $k_3 = -0{,}125$.

Дискретні значення другої кривої сформовані за вихідними даними $y_{A_1} = 8$, $y_{A_3} = 8$, $P_i = -6$.

Система рівнянь матиме вигляд:

$\begin{cases} 8 - 2y_{A_0^1} + y_{A_2} = 6 \\ y_{A_0^1} - 2y_{A_2} + y_{A_0^2} = 6 \\ y_{A_2} - 2y_{A_0^2} + 8 = 6 \end{cases}$.	

Розв’язання цієї системи дає результат: $y_{A_0^1} = -1$; $y_{A_2} = -4$; $y_{A_0^2} = -1$.

Коефіцієнти суперпозиції заданих точок A_1 , A_2 , A_3 для визначення шуканих точок A_0^1 і A_0^2 , матимуть значення: $k_1 = 0{,}375$, $k_2 = 0{,}75$, $k_3 = -0{,}125$.

Величина зовнішнього формоутворюючого навантаження та ординати вузлових точок шуканих дискретних моделей кривих як суперпозиції двох попередньо сформованих статико-геометричним методом дискретних моделей кривих (рис. 1) будуть визначені за формулами:

$P_i = k_1 P_i^1 + k_2 P_i^2$,	
$y_i = k_1 y_i^1 + k_2 y_i^2$,	

де:

P_i^1 — величина рівномірно розподіленого зовнішнього формоутворюючого навантаження прикладеного до вузлів модельованої першої кривої, а P_i^2 — другої;

y_i^1 — ордината i –го вузла першої кривої, а y_i^2 — другої кривої.

Величина зовнішнього формоутворюючого навантаження та ординати вузлових точок шуканих дискретних моделей кривих із рівномірним кроком вздовж осі y для центрального вузла від 6 до -4 будуть визначені за формулами:

$P_i = k_1 P_i^6 + k_2 P_i^{-4}$,	
$y_i = k_1 y_i^6 + k_2 y_i^{-4}$,	

Враховуючи рівномірний крок зміни величини навантаження від 1 до 6:

$6 - 1 = 5$; $\frac{1}{5} = 0{,}2$, одержимо $k_1, k_2 = 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6;\ 0{,}8$.

Наприклад, величина навантаження $P_i^{A_2}$ та ординати вузлових точок $y_i^{A_2}$ формованих кривих будуть визначені за формулами:

$P_i^{A_2=4} = 0{,}2 \cdot (-6) + 0{,}8 \cdot (-1) = -1{,}2 + (-0), 8 = -2$,	
$P_i^{A_2=2} = 0{,}4 \cdot (-6) + 0{,}6 \cdot (-1) = -2{,}4 + (-0{,}6) = -3$,	
$P_i^{A_2=0} = 0{,}6 \cdot (-6) + 0{,}4 \cdot (-1) = -3{,}6 + (-0{,}4) = -4$,	
$P_i^{A_2=-2} = 0{,}8 \cdot (-6) + 0{,}2 \cdot (-1) = -4{,}8 + (-0{,}2) = -5$,	
$y_{P_i=-2}^{A_2} = 0{,}2 \cdot (-4) + 0{,}8 \cdot 6 = -0{,}8 + 4{,}8 = 4$,	
$y_{P_i=-3}^{A_2} = 0{,}4 \cdot (-4) + 0{,}6 \cdot 6 = -1{,}6 + 3{,}6 = 2$,	
$y_{P_i=-4}^{A_2} = 0{,}6 \cdot (-4) + 0{,}4 \cdot 6 = -2{,}4 + 2{,}4 = 0$,	
$y_{P_i=-5}^{A_2} = 0{,}8 \cdot (-4) + 0{,}2 \cdot 6 = -3{,}2 + 1{,}2 = -2$.	

Величина навантаження та аплікати вузлових точок шуканих дискретних моделей кривих представлені у таблиці 1.

Таблиця 1.

Величина зовнішнього формоутворюючого навантаження та ординати вузлових точок шуканих дискретних моделей кривих.

	$k_1 = 0{,}8$ $k_2 = 0{,}2$	$k_1 = 0{,}6$ $k_2 = 0{,}4$	$k_1 = 0{,}4$ $k_2 = 0{,}6$	$k_1 = 0{,}2$ $k_2 = 0{,}8$	
$P_i^{A_2=6} = -1$	$P_i^{A_2=4} = -2$	$P_i^{A_2=2} = -3$	$P_i^{A_2=0} = -4$	$P_i^{A_2=-2} = -5$	$P_i^{A_2=-4} = -6$
$y_{P_i=-1}^{A_2} = 6$	$y_{P_i=-2}^{A_2} = 4$	$y_{P_i=-3}^{A_2} = 2$	$y_{P_i=-4}^{A_2} = 0$	$y_{P_i=-5}^{A_2} = -2$	$y_{P_i=-6}^{A_2} = -4$
$y_{P_i=-1}^{A_0^1} = 6{,}5$	$y_{P_i=-2}^{A_0^1} = 5$	$y_{P_i=-3}^{A_0^1} = 3{,}5$	$y_{P_i=-4}^{A_0^1} = 2$	$y_{P_i=-5}^{A_0^1} = 0{,}5$	$y_{P_i=-6}^{A_0^1} = -1$
$y_{P_i=-1}^{A_0^2} = 6{,}5$	$y_{P_i=-2}^{A_0^2} = 5$	$y_{P_i=-3}^{A_0^2} = 3{,}5$	$y_{P_i=-4}^{A_0^2} = 2$	$y_{P_i=-5}^{A_0^2} = 0{,}5$	$y_{P_i=-6}^{A_0^2} = -1$

Результати обчислених коефіцієнтів суперпозиції за формулами (1) координат заданих точок A_1, A_2, A_3 для визначення координат невідомих точок A_0^1 і A_0^2 формованих дискретних моделей кривих з рівномірним кроком $h=1$ уздовж осі Ox, представлених на рисунку 1наведені в таблиці 2.

$$\begin{cases} x_0 = k_1x_1 + k_2x_2 + (1-k_1-k_2)x_3 \\ y_0 = k_1y + k_2y_2 + (1-k_1-k_2)y_3 \end{cases} \quad (1)$$

Таблиця 2.

Значення коефіцієнтів суперпозиції

	A_1	A_0^1	A_2	A_0^2	A_3
			P_i=-1		
x_0	-2	-1	0	1	2

y_0	8	6,5	6	6,5	8
k_1		*0,375*		*-0,125*	
k_2		*0,75*		*0,75*	
$k_3=1-k_1-k_2$		*-0,125*		*0,375*	
$P_i=-2$					
x_0	-2	-1	0	1	2
y_0	8	5	4	5	8
k_1		*0,375*		*-0,125*	
k_2		*0,75*		*0,75*	
$k_3=1-k_1-k_2$		*-0,125*		*0,375*	
$P_i=-3$					
x_0	-2	-1	0	1	2
y_0	8	3,5	2	3,5	8
k_1		*0,375*		*-0,125*	
k_2		*0,75*		*0,75*	
$k_3=1-k_1-k_2$		*-0,125*		*0,375*	
$P_i=-4$					
x_0	-2	-1	0	1	2
y_0	8	2	0	2	8
k_1		*0,375*		*-0,125*	
k_2		*0,75*		*0,75*	
$k_3=1-k_1-k_2$		*-0,125*		*0,375*	
$P_i=-5$					
x_0	-2	-1	0	1	2
y_0	8	0,5	-2	0,5	8
k_1		*0,375*		*-0,125*	
k_2		*0,75*		*0,75*	
$k_3=1-k_1-k_2$		*-0,125*		*0,375*	
$P_i=-6$					
x_0	-2	-1	0	1	2
y_0	8	-1	-4	-1	8
k_1		*0,375*		*-0,125*	
k_2		*0,75*		*0,75*	
$k_3=1-k_1-k_2$		*-0,125*		*0,375*	

За результатами, що наведені у таблиці 2 можна зробити висновок, що величини коефіцієнтів суперпозиції заданих крайових умов (координат початкового і останнього вузлів) та, наприклад центрального вузла для визначення координат шуканих вузлів будуть однаковими для всіх дискретних моделей кривих, які формуються на одних і тих же крайових умовах.

Доведемо даний висновок записавши систему рівнянь[1] для вище визначених дискретних моделей кривих у загальному вигляді:

$$\begin{cases} 8-2y_{A_0^1}+y_{A_2}=P_i \\ y_{A_0^1}-2y_{A_2}+y_{A_0^2}=P_i \; . \\ y_{A_2}-2y_{A_0^2}+8=P_i \end{cases}$$

Розв'язання цієї системи дає результат:

$$y_{A_2}=\frac{y_{A_1}+y_{A_3}-4P_i}{4}\,,\; y_{A_0^1}=\frac{3y_{A_1}+y_{A_3}-6P_i}{2}\,,\; y_{A_0^2}=\frac{y_{A_1}+3y_{A_3}-6P_i}{4}\;.$$

Звідси, координати вузлових точок заданих і модельованих дискретних кривих матимуть вигляд:

$$A_2\left(0;\frac{y_{A_1}+y_{A_3}-4P_i}{2}\right),\; A_0^1\left(-1;\frac{3y_{A_1}+y_{A_3}-6P_i}{4}\right),\; A_0^2\left(1;\frac{y_{A_1}+3y_{A_3}-6P_i}{4}\right),$$
$$A_1(-2;8)\,,\; A_3(2;8)\;.$$

Підставляючи у систему рівнянь [4]

$$\begin{cases} x_0-x_3=k_1(x_1-x_3)+k_1(x_2-x_3) \\ y_0-y_3=k_1(y_1-y_3)+k_1(y_2-y_3) \end{cases}$$

координати точок A_2 , A_0^1 і A_0^2 , одержимо:

$$\begin{cases} k_1(-2-2)+k_2(0-2)=-1-2 \\ k_1(8-8)+k_2\left(\dfrac{y_{A_1}+y_{A_3}-4P_i}{2}-8\right)=\dfrac{3y_{A_1}+y_{A_3}-6P_i}{4}-8 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} -4k_1-2k_2=-3 \\ 0\cdot k_1+\left(\dfrac{y_{A_1}+y_{A_3}-4P_i}{2}-8\right)\cdot k_2=\dfrac{3y_{A_1}+y_{A_3}-6P_i}{4}-8 \end{cases}$$

Розв'язання цієї системи дає результат:

$$k_1=\frac{3P_i-8+8}{8P_i-2\cdot 8-2\cdot 8+32}=\frac{3}{8}=0{,}375\;;\; k_2=\frac{6P_i-8-3\cdot 8+32}{8P_i-2\cdot 8-2\cdot 8+32}=\frac{3}{4}=0{,}75\;.$$

Підставляючи у систему рівнянь (1.30) координати точок A_2 і A_0^2 , одержимо:

$$\begin{cases} k_1(-2-2)+k_2(0-2)=-1-2 \\ k_1(8-8)+k_2\left(\dfrac{y_{A_1}+y_{A_3}-4P_i}{2}-8\right)=\dfrac{y_{A_1}+3y_{A_3}-6P_i}{4}-8 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} -4k_1-2k_2=-3 \\ 0\cdot k_1+\left(\dfrac{y_{A_1}+y_{A_3}-4P_i}{2}-8\right)\cdot k_2=\dfrac{y_{A_1}+3y_{A_3}-6P_i}{4}-8 \end{cases}$$

Розв'язання цієї системи дає результат:

$$k_1=\frac{8-P_i-8}{8P_i-2\cdot 8-2\cdot 8+32}=-\frac{1}{8}=-0{,}125\;;\; k_2=\frac{6P_i-3\cdot 8-8+32}{8P_i-2\cdot 8-2\cdot 8+32}=\frac{3}{4}=0{,}75\;.$$

Висновки. Таким чином за однією дискретною моделлю кривої, сформованою статико-геометричним методом можна сформувати методом суперпозицій будь-яку кількість врівноважених дискретних моделей кривих із довільною кількістю вузлових точок за однаковими крайовими умовами та різними величинами зовнішнього формоутворюючого навантаження без складання і розв'язання великих систем лінійних рівнянь, що, у свою чергу дозволяє дискретно моделювати криві різної форми і розв'язувати задачі дискретної інтерполяції на площині.

Література

1. Ковалев С.Н. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций: дис. … доктора техн. наук: 05.01.01 / С.Н. Ковалев − М.: МАИ, 1986. – 348 с.
2. Чан Хонг Хай. Управление формой растянутых систем на основе функционального сложения: дис. … канд. техн. наук: 05.01.01. / Ч.Х. Хай. – К., 1994. – 124 с.
3. Ковалев С. Н. О суперпозициях / Сергей Николаевич Ковалев. // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА.. – 2010. – №84. – С. 38–42.
4. Воронцов, О.В., Радченко, Г.О. Дискретне визначення кривих на основі різних методів геометричного моделювання / О.В. Воронцов, Г.О. Радченко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 88. – С. 116-120.
5. Воронцов О.В. Визначення дискретного аналогу полінома **n**-го степеня суперпозиціями точок числової послідовності **n**-го порядку / О.В. Воронцов // Прикладна геометрія та інженерна графіка: зб. наук. праць – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 90. – С. 63 – 67.
6. Воронцов О.В. Дискретна інтерполяція суперпозиціями точок числових послідовностей дробово-лінійних функцій / О.В. Воронцов, Н.О. Махінько // Прикладна геометрія та інженерна графіка: праці ТДАТА. – Мелітополь: ТДАТА, 2013. Вип. 4. – Т. 57. – С. 62 – 67.
7. Воронцов О.В. Определение дискретных аналогов классов элементарных функций суперпозициями одномерных точечных множеств [Электронный ресурс] / О.В. Воронцов, Л.О. Тулупова // Universsum. Сер.: Технические науки: электрон. научн. журн. − 2014. − № 3(4). − Режим доступа: URL: http: // 7universsum. Com /ru/ tech/ archive/ item/1135.

Воронцов, Г.О. Радченко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 88. – С. 116-120.

ФОРМИРОВАНИЕ ОДНОМЕРНОГО ДИСКРЕТНОГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ОБРАЗА СУПЕРПОЗИЦИЯМИ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ НА ОСНОВЕ ДВУХ И ОДНОГО ЗАДАННЫХ ОБРАЗОВ

О.В. Воронцов, Л.А. Тулупова, И.В. Воронцова

В статье рассмотрен способ дискретного моделирования кривых линий на основе суперпозиций двух кривых,

сформированных статико-геометрическим методом и на основе суперпозиций узловых точек одной кривой сформированной статико-геометрическим методом. Предложенный способ моделирования позволяет формировать уравновешены дискретные структуры, сформированные на заданных контурных узлах, а также проходящих через заданные узловые точки без составления и решения систем уравнений.

Ключевые слова: одномерные геометрические образы, дискретные модели кривых, суперпозиции точечных множеств, коэффициенты суперпозиции, статико-геометрический метод.

MODELING ONE-DIMENSIONAL DISCRETE GEOMETRIC IMAGE BY SUPERPOSITIONS OF POINT SETS ON THE BASIS OF TWO AND SINGLE ADJUSTED IMAGES

O. Vorontsov, L. Tulupova, I. Vorontsova

In the article the method of discrete modeling of curves is considered. This method is based on superpositions of two curves and on superpositions of nodal points of one curve. All these curves were formed by the static-geometric method. The proposed method allows modeling balanced discrete structures, which were formed on adjusted contour nodes and pass through given nodal points without making up and solving any system of equations.

Key words: one-dimensional geometric images, discrete models of curves, superposition of point sets, superposition coefficients, static-geometric method.