УДК 514.18 **Воронцов О.В.**, канд. техн. наук., доц.

# ДИСКРЕТНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ СУПЕРПОЗИЦІЯМИ ОДНОВИМІРНИХ ТОЧКОВИХ МНОЖИН ПОКАЗНИКОВИХ ФУНКЦІЙ

Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка, Україна

***Анотація. У даній роботі проведено дослідження впливу коефіцієнтів суперпозиції на дискретне формування одновимірних геометричних образів та можливостей розв'язувати задачі дискретної інтерполяції числовими послідовностями показникових функцій.***

**Постановка проблеми.** У процесі створення методик дискретного моделювання геометричних образів можуть бути використані чисельний метод скінченних різниць, статико-геометричний метод, математичний апарат числових послідовностей, що мають свої переваги і недоліки відносно розв'язання конкретних практичних завдань. Застосування геометричного апарату суперпозицій у поєднанні з вище переліченими методами дозволяє істотно підвищити ефективність і розширити можливості процесу дискретного моделювання геометричних образів. Зокрема дослідити можливість використання у якості інтерполянтів не тільки параболічних функцій, а й інших елементарних функціональних залежностей.

**Аналіз останніх досліджень.** Геометричне трактування методу скінчених різниць дозволило аналітично описувати дискретні геометричні образи. Статико-геометричний метод дискретного геометричного моделювання кривих ліній і поверхонь [1] дозволяє отримати дискретні каркаси криволінійних поверхонь під дією зовнішнього формоутворюючого навантаження та, крім того, є простим і наочним. Використання статико-геометричного методу дозволяє отримати дискретні каркаси криволінійних поверхонь на довільному опорному контурі. В основу математичного апарату статико-геометричного методу [1] покладено розв'язок громіздких систем лінійних рівнянь, що ускладнює процес комп'ютерної реалізації розрахунків. Питанням розширення формоутворюючих можливостей статико-геометричного методу за допомогою математичного апарату числових послідовностей, що дозволяє, зокрема, уникнути складання систем лінійних рівнянь при формуванні дискретних образів, присвячена робота [2].

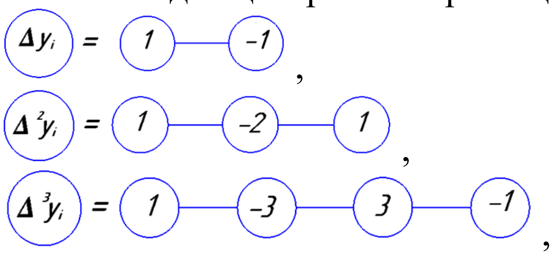
У роботі [3] автора даної статті показано підходи до визначення дискретних аналогів геометричних образів на основі геометричного апарату суперпозицій точкових множин, що дозволяє формувати дискретні образи без складання і розв'язання громіздких систем рівнянь. Управління формою дискретно представлених образів здійснюється варіюванням величинами коефіцієнтів суперпозиції.

**Формулювання цілей та завдання статті.** Метою даної статті є розширення можливостей використання класичного методу скінчених різниць і статико-геометричного методу для дискретного моделювання геометричних образів за рахунок використання у якості інтерполянтів показникових функцій.

**Основна частина.** Метод скінчених різниць дозволяє аналітично описувати дискретні геометричні образи. Для дискретно представленої кривої лінії точками з певним кроком $h$ уздовж осі $Ox$: $x_{i+1} = x_i + h$, права скінчена різниця першого порядку має вигляд: $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$.

Права скінчена різниця другого порядку утворюється як різниця між двома скінченими різницями першого порядку: $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$. Відповідно центральна різниця другого поряду має вигляд: $y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}$.

Для наочності скінчені різниці часто представляють у вигляді «обчислювальних шаблонів» або «різницевих операторів». Такі обчислювальні шаблони для центральних різниць мають вигляд:




Розглянемо числову послідовність, що є дискретним аналогом показникової функції (1):

$$y_i = a^i . \tag{1}$$

У роботі [3] було доведено властивість згідно якої координати будь-якої точки одновимірної множини точок є суперпозицією (2) координат трьох довільних точок цієї множини.

$$\begin{aligned} x_0 &= k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 \\ y_0 &= k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3 \end{aligned}, \tag{2}$$

де: $k_3 = 1 - k_1 - k_2$.

Та виведені формули (3) для обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції $k_1$, $k_2$:

$$k_1 = \frac{(x_0 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_0 - y_3)}{(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)};$$

$$k_2 = \frac{(x_1 - x_3)(y_0 - y_3) - (x_0 - x_3)(y_1 - y_3)}{(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)}. \tag{3}$$

Розглянемо можливість утворення обчислювального шаблону для дискретного визначення числової послідовності (1) подібного до шаблонів, які можна утворити для поліноміальних кривих.

За аналогією із формулами обчислення правих скінчених різниць, якщо взяти координати трьох наступних за шуканою точок, та обчисливши величини коефіцієнтів суперпозиції за формулами (3), то можна пересвідчитись, що коефіцієнти суперпозиції трьох суміжних із шуканою точок будуть однаковими та матимуть вигляд:

$k_1 = 2 + \frac{1}{a}$; $k_2 = -1 - \frac{2}{a}$ ; $k_3 = \frac{1}{a}$ .

Тому може бути утворений обчислювальний шаблон для дискретного моделювання одновимірних геометричних образів шляхом інтерполяції заданих вузлових точок показниковими функціями у вигляді (4):

$$1 = 2+\frac{1}{a} \;—\; -1-\frac{2}{a} \;—\; \frac{1}{a} \qquad (4)$$

За аналогією із формулами визначення центральних скінчених різниць, обчисливши величини коефіцієнтів суперпозиції за формулами (3), можна пересвідчитись, що коефіцієнти суперпозиції трьох суміжних із шуканою точок будуть однаковими та матимуть вигляд:

$k_1 = \frac{a}{2a+1}$; $k_2 = \frac{a+2}{2a+1}$ ; $k_3 = -\frac{1}{2a+1}$ .

Тому, як і для поліноміальних кривих може бути утворений обчислювальний шаблон для дискретного моделювання одновимірних геометричних образів шляхом інтерполяції заданих вузлових точок показниковими функціями у вигляді (5):

$$1 = \frac{a}{2a+1} \;—\; \frac{a+2}{2a+1} \;—\; \frac{-1}{2a+1} \qquad (5)$$

Напишемо систему рівнянь для визначення ординат вузлових точок послідовності (1) за аналогією із рівняннями (2):

$$\begin{cases} y_i - y_{i+2} = k_1(y_{i-1} - y_{i+2}) + k_2(y_{i+1} - y_{i+2}) \\ y_{i+1} - y_{i+3} = k_1(y_i - y_{i+3}) + k_2(y_{i+2} - y_{i+3}) \end{cases} . \qquad (6)$$

Із (6) знаходимо вирази для обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції подібні формулам (3):

$$k_1 = \frac{(y_i - y_{i+2})(y_{i+2} - y_{i+3}) - (y_{i+1} - y_{i+2})(y_{i+1} - y_{i+3})}{(y_{i-1} - y_{i+2})(y_{i+2} - y_{i+3}) - (y_{i+1} - y_{i+2})(y_i - y_{i+3})};$$

$$k_2 = \frac{(y_{i-1} - y_{i+2})(y_{i+1} - y_{i+3}) - (y_i - y_{i+2})(y_i - y_{i+3})}{(y_{i-1} - y_{i+2})(y_{i+2} - y_{i+3}) - (y_{i+1} - y_{i+2})(y_i - y_{i+3})}. \qquad (7)$$

За аналогією із формулами визначення центральних скінчених різниць, обчисливши величини коефіцієнтів суперпозиції за формулами (7), можна пересвідчитись, що коефіцієнти суперпозиції трьох суміжних із шуканою точок будуть однаковими та матимуть вигляд:

$k_1 = \frac{a-(c-1)a^2}{a^2+a+1}$; $k_2 = c$ ; $k_3 = \frac{a^2(c-1)-a}{a^2+a+1}$ ,

де $c$ – довільна стала.

Тому, як і для поліноміальних кривих одержимо обчислювальний шаблон у вигляді (8):

$$1 = \frac{a-(c-1)a^2}{a^2+a+1} \;—\; c \;—\; \frac{a^2(c-1)-a}{a^2+a+1} \qquad (8)$$

Тоді, якщо $c = 1$ то:

$$k_1 = \frac{a}{a^2+a+1}\ ;\ k_2 = 1\ ;\ k_3 = -\frac{a}{a^2+a+1}\ ,$$

і обчислювальний шаблон матиме вигляд (9):

$$1 = \frac{a}{a^2+a+1} - 1 - \left(-\frac{a}{a^2+a+1}\right) \qquad (9)$$

**Приклад.** Побудуємо дискретні моделі кривих за наступними вихідними даними:

1. $A(x_A=0,\ y_A=3)$; $B(x_B=3,\ y_B=1)$; $C(x_C=6,\ y_C=5)$;
2. $A(x_A=0,\ y_A=3)$; $B(x_B=3,\ y_B=0)$; $C(x_C=6,\ y_C=5)$;
3. $A(x_A=0,\ y_A=3)$; $B(x_B=3,\ y_B=-1)$; $C(x_C=6,\ y_C=5)$.

Враховуючи одиничний крок по осі $x$ Складемо систему рівнянь для всіх невідомих вузлів моделі ($x_i=1,\ 2,\ 4,\ 5$) числової послідовності $y_i = 2^i$

$$\begin{cases} y_1 = {}^2\!/_7\, y_A + y_2 - {}^2\!/_7\, y_B \\ y_2 = {}^2\!/_7\, y_1 + y_B - {}^2\!/_7\, y_4 \\ y_B = {}^2\!/_7\, y_2 + y_4 - {}^2\!/_7\, y_5 \\ y_4 = {}^2\!/_7\, y_B + y_5 - {}^2\!/_7\, y_6 \end{cases} . \qquad (10)$$

При підстановці до (10) вихідних умов 1, 2, 3 розв’язання системи дає наступні результати:

1. $y_1 = 239/147$ ; $y_2 = 155/147$ ; $y_4 = 211/147$ ; $y_5 = 379/147$ ;
2. $y_1 = 146/147$ ; $y_2 = 20/147$ ; $y_4 = 76/147$ ; $y_5 = 286/147$ ;
3. $y_1 = 53/147$ ; $y_2 =-115/147$ ; $y_4 =-59/147$ ; $y_5 = 193/147$ .

Одержані дискретні моделі кривих за даними вихідними умовами представлені на рисунку 1.

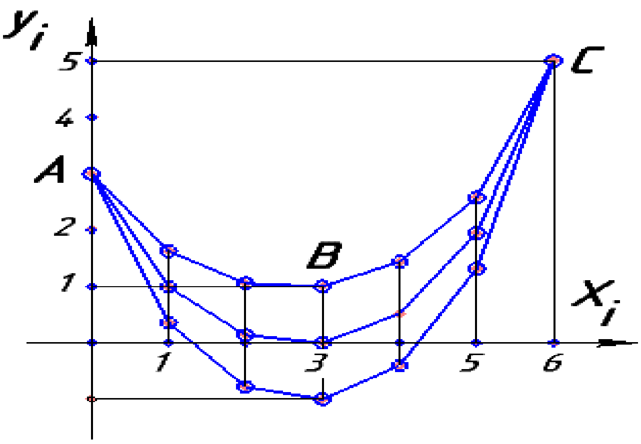



Рисунок 1. Дискретні моделі кривих на основі числової послідовності $y_i = 2^i$ .

**Висновки.** На основі геометричного апарату суперпозицій одержані обчислювальні шаблони для дискретного формування геометричних образів числовими послідовностями показникових функціональних залежностей, що розширює можливості дискретного геометричного моделювання.

**Перспективи подальших досліджень.** Результати даної роботи можуть бути основою подальших досліджень дискретного формування геометричних образів одновимірними числовими послідовностями не тільки параболічних, показникових, а й інших елементарних функціональних залежностей, а також можуть бути використані для формування двовимірних геометричних образів.

## Література


1. Ковалев С.Н. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций: дис. … доктора техн. наук: 05.01.01 / С.Н. Ковалев. − М.: МАИ, 1986. – 348 с.
2. Пустюльга С.І. Дискретне визначення геометричних об’єктів числовими послідовностями: дис. … доктора техн. наук: 05.01.01 / С.І. Пустюльга. – К.: КНУБА, 2006. – 322 с.
3. Воронцов О.В. Дискретное моделирование кривых поверхностей суперпозициями двумерных точечных множеств / О.В. Воронцов, Л.О. Тулупова // Сборник статей по материалам XL международной научно-практической конференции «Технические науки – от теории к практике». – Новосибирск, 2014. – №11 (36). – С. 7 – 16.


## ДИСКРЕТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СУПЕРПОЗИЦИЯМИ ОДНОМЕРНЫХ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

**О.В. Воронцов**

В данной работе проведено исследование влияния коэффициентов суперпозиции на дискретное формирования одномерных геометрических образов и возможностей решать задачи дискретной интерполяции числовыми последовательностями показательных функций.

## DISCRETE INTERPOLATION BY SUPERPOSITIONS OF ONE-DIMENSIONAL POINT SETS OF EXPONENTIAL FUNCTIONS

**O. Vorontsov**

In this article we have investigated an influence of superposition coefficients on discrete formation of one-dimensional geometric images. Beside this, possibility of solving a problem of discrete interpolation by numerical sequences of exponential functions was studied.