УДК 514.18

О.В. ВОРОНЦОВ,
Л.О. ТУЛУПОВА
Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка
І.В. ВОРОНЦОВА
Полтавський коледж нафти і газу Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка

ДИСКРЕТНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБРАЗІВ СУПЕРПОЗИЦІЯМИ ДВОВИМІРНИХ ТОЧКОВИХ МНОЖИН ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ

У статті проведено дослідження визначення полінома двох змінних n-го степеня довільними дискретними значеннями. Виведено формули обчислення коефіцієнтів суперпозицій двовимірних точкових множин що дозволяють визначати аналітичні вирази дискретних аналогів двовимірних геометричних образів у загальному вигляді.

Ключові слова: дискретна інтерполяція, геометричний апарат суперпозицій, коефіцієнти суперпозиції, двовимірні точкові множини, числові послідовності.

О. В. ВОРОНЦОВ,
Л.А. ТУЛУПОВА
Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка
И.В. ВОРОНЦОВА
Полтавский колледж нефти и газа Полтавского национального технического университета имени Юрия Кондратюка

ДИСКРЕТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ СУПЕРПОЗИЦИЯМИ ДВУМЕРНЫХ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

В статье проведено исследование определения полинома двух переменных n-й степени произвольными дискретными значениями. Выведены формулы вычисления коэффициентов суперпозиций двумерных точечных множеств позволяющие определять аналитические выражения дискретных аналогов двумерных геометрических образов в общем виде.

Ключевые слова: дискретная интерполяция, геометрический аппарат суперпозиций, коэффициенты суперпозиции, двумерные точечные множества, числовые последовательности.

O.V. VORONTSOV,
L.A. TULUPOVA
Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University
I.V. VORONTSOVA
Poltava Petroleum Geological College of PoltavaNational Technical Yuri Kondratyuk University

DISCRETE INTERPOLATION OF GEOMETRIC IMAGES BY SUPERPOSITIONS OF TWO-DIMENSIONAL POINT SETS OF FUNCTIONAL DEPENDENCES

In the article, the definition of a polynomial of two variables of the nth power was studied by arbitrary discrete values. Formulae for calculating superposition coefficients of two-dimensional point sets were found. These formulae define an analytic form of discrete analogues of two-dimensional geometric images in the general case.

Keywords: discrete interpolation, geometric apparatus of superpositions, superposition coefficients, two-dimensional point sets, numerical sequences.

Постановка проблеми. Управління формою дискретних моделей геометричних образів (поверхонь, явищ, процесів) вимагає чіткого уявлення про зміст процесу формування, параметри форми моделей, можливості оперативного змінення ходу розрахунків модельованої поверхні. Крім того формування дискретних моделей геометричних образів (ГО) передбачає залучення методів, що вимагають використання значних обчислювальних ресурсів. Тому необхідно проводити дослідження нових методів формування ГО які дозволяють забезпечити мінімальні витрати на отримання результату.

Ефективність методик формування ГО у великій мірі залежить від ефективності алгоритмів переходу від неперервної форми представлення геометричних образів до їх дискретних аналогів і навпаки.

Вищеназвані алгоритми розроблені у [1] за допомогою математичного апарату числових послідовностей. Координати вузлів модельованих дискретних аналогів кривих визначаються за відомими координатами суміжних вузлів. Дискретно представлені криві (ДПК) подаються координатами вузлів із рівномірним кроком по осі. Геометричний апарат суперпозицій дозволяє підвищити ефективність даних алгоритмів за рахунок економії обчислювальних ресурсів при формуванні ДПК вузлами із довільними кроками по осі за даними координатами довільних вузлів.

Дослідження геометричного апарату суперпозицій у поєднанні із класичним методом скінчених різниць, статико-геометричним методом, математичним апаратом числових послідовностей сприятиме подальшому розвитку і удосконаленню математичних моделей у процесі конструювання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питанням досліджень дискретного моделювання ГО суперпозиціями одновимірних числових послідовностей присвячені роботи [2, 3, 4] авторів даної статті.

Формулювання мети дослідження. Метою даної роботи є дослідження питань дискретної інтерполяції ГО двовимірними числовими послідовностями за координатами вузлових точок взятих із довільними кроками по координаційних осях, а саме – визначення полінома двох змінних ***n***-го степеня довільними дискретними значеннями; зокрема – виведення формул обчислення коефіцієнтів суперпозицій двовимірних точкових множин що дозволяють визначати аналітичні вирази дискретних аналогів двовимірних геометричних образів у загальному вигляді.

Виклад основного матеріалу дослідження. В основі класичного методу скінчених різниць, на який спираються найпростіші способи дискретної інтерполяції, лежить або поліном однієї змінної ***n***-го степеня :

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_k x^k + \dots + a_n x^n ,$$

що може бути дискретно визначений нескінченною одновимірною числовою послідовністю

$$y = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3 + \dots + a_k i^k + \dots + a_n i^n .$$

Або поліном двох змінних ***n***-го степеня

$$z = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \\ + \dots + a_{n0}x^n + a_{kn-k}x^k y^{n-k} + a_{0n}y^n , \quad (1)$$

що може бути дискретно визначений нескінченною двовимірною числовою послідовністю

$$z_{ij} = a_{00} + a_{10}i + a_{01}j + a_{20}i^2 + a_{11}ij + a_{02}j^2 + \\ + \dots + a_{n0}i^n + a_{kn-k}i^k j^{n-k} + a_{0n}j^n . \quad (2)$$

Враховуючи результати досліджень роботи [2], виведемо формули обчислення коефіцієнтів суперпозицій двовимірних точкових множин що дозволяють визначати аналітичні вирази дискретних аналогів двовимірних ГО у загальному вигляді. Ці формули також можуть бути використані для дискретного моделювання двовимірних ГО числовими послідовностями вищеназваних аналітичних залежностей без складання і розв'язання систем лінійних рівнянь.

Координати будь-якої точки двовимірного ГО можуть бути визначені як суперпозиції координат чотирьох заданих довільних точок даного образу за формулою [3]:

$$u_0 = k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 + (1 - k_1 - k_2 - k_3)u_4 ,$$

де u_i $(i = \overline{0,4})$ – узагальнене позначення відповідної координати.

Замкнена форма числової послідовності, довільний член якої обчислюється за формулою (2), визначає двовимірну числову послідовність *n*-го степеня (1).

При *n=1* послідовність (2) має вигляд:

$$z_{ij} = a_{00} + a_{10}i + a_{01}j \quad (3)$$

Таку послідовність, у свою чергу, можна визначити рекурентною залежністю [5]

$$4z_{ij} = z_{i-1,j} + z_{i+1,j} + z_{i,j-1} + z_{i,j+1}, \quad (4)$$

що буде дискретним представленням поліному двох змінних 1-го степеня.

Рекурентна формула (4) одержується додаванням двох рекурентних формул (5) і (6)

$$2z_i = z_{i-1} + z_{i+1}, \quad (5)$$

$$2z_j = z_{j-1} + z_{j+1}, \quad (6)$$

які дискретно представляють дві числові послідовності

$$z_i = a_0 + a_1 i, \quad (7)$$

$$z_j = b_0 + b_1 j. \quad (8)$$

Рекурентні формули, що зв'язують значення кінцевого ряду довільних членів послідовностей (7) і (8) матимуть вигляд [4]:

$$z_{i+p} = k_1 z_{i+p_1} + k_2 z_{i+p_2}, \quad (9)$$

$$z_{j+m} = k_1 z_{j+m_1} + k_2 z_{j+m_2}, \quad (10)$$

Додаванням (9) і (10) одержимо рекурентні залежності, що зв'язують значення кінцевого ряду довільних членів послідовності (3):

$$2z_{i+p,j+m} = k_1 z_{i+p_1,j+m} + k_2 z_{i+p_2,j+m} + k_1 z_{i+p,j+m_1} + k_2 z_{i+p,j+m_2}, \quad (11)$$

де $k_1 + k_2 = 1$, або:

$$z_{i+p,j+m} = k_1 z_{i+p_1,j+m} + k_2 z_{i+p_2,j+m} + k_1 z_{i+p,j+m_1} + k_2 z_{i+p,j+m_2}, \quad (12)$$

де $k_1 + k_2 = 0{,}5$.

Підставляючи (3) у (12) одержимо рівняння, розчіпляючи яке за змінними i та j, зможемо скласти систему визначальних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{2} k_i = \frac{1}{2} \\ k_1[a_{10}(p_1 + p) + a_{01}(m_1 + m)] + k_2[a_{10}(p_{21} + p) + a_{01}(m_2 + m)] = a_{10}p + a_{01}m \end{cases} \quad (13$$

Розв'язуючи (13) за методом Крамера, знайдемо визначники $\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2,$ у вигляді:

$$\Delta = a_{10}(p_2 - p_1) + a_{01}(m_2 - m_1);$$
$$\Delta_1 = \frac{1}{2}a_{10}(p_2 - p) + \frac{1}{2}a_{01}(m_2 - m);$$
$$\Delta_2 = \frac{1}{2}a_{10}(p - p_1) + \frac{1}{2}a_{01}(m - m_1).$$

Звідси:

$$k_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a_{10}(p_2-p)+a_{01}(m_2-m)}{a_{10}(p_2-p_1)+a_{01}(m_2-m_1)};$$
$$k_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a_{10}(p-p_1)+a_{01}(m-m_1)}{a_{10}(p_2-p_1)+a_{01}(m_2-m_1)}.$$

Крім того, оскільки числова послідовність (3) розпадається на суму двох (7) і (8) [6], то рекурентна формула, що зв'язує значення кінцевого ряду її довільних членів може бути представлена у вигляді:

$$z_{i+p,j+m} = k_1^i z_{i+p_1,j+m} + k_2^i z_{i+p_2,j+m} + k_1^j z_{i+p,j+m_1} + k_2^j z_{i+p,j+m_2}, \quad (14)$$

де $k_1^i + k_2^i = 1$, $k_1^j + k_2^j = 1$.

Враховуючи результати роботи [4], зможемо записати:

$$z_{i+p,j+m} = \frac{p_2-p}{p_2-p_1} z_{i+p_1,j+m} + \frac{p-p_1}{p_2-p_1} z_{i+p_2,j+m} + \frac{m_2-m}{m_2-m_1} z_{i+p,j+m_1} + \frac{m-m_1}{m_2-m_1} z_{i+p,j+m_2}, \quad (15)$$

При $n=2$ послідовність (2) має вигляд :

$$z_{ij} = a_{00} + a_{10}i + a_{01}j + a_{20}i^2 + a_{11}ij + a_{02}j^2 \quad (16)$$

Рекурентна формула, що зв'язує значення кінцевого ряду довільних членів послідовності (16) може бути записана у вигляді:

$$z_{i+p,j+m} = k_1 z_{i+p_1,j+m} + k_2 z_{i+p_2,j+m} + k_3 z_{i+p,j+m_1} + k_4 z_{i+p,j+m_2}. \quad (17)$$

Підставляючи (16) у (17), одержимо рівняння, розчіпляючи яке за змінними i та j у різних степенях, зможемо скласти систему визначальних рівнянь (18):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{4} k_i = 1 \\ a_{11}(k_2p_2 + k_1p_1 + k_4p + k_3p - p) + 2a_{02}(k_4m_2 + k_3m_1 + k_2m + k_1m - m) = 0 \\ 2a_{20}(k_2p_2 + k_1p_1 + k_4p + k_3p - p) + a_{11}(k_4m_2 + k_3m_1 + k_2m + k_1m - m) = 0 \\ a_{20}(k_2p_2^2 + k_1p_1^2 + k_4p^2 + k_3p^2 - p^2) + a_{11}(k_2mp_2 + k_1mp_1 + k_4m_2p + k_3m_1p - mp) + \\ a_{10}(k_2p_2 + k_1p_1 + k_4p + k_3p - p) + a_{02}(k_4m_2^2 + k_3m_1^2 + k_2m^2 + k_1m^2 - m^2) + \\ +a_{01}(k_4m_2 + k_2m + k_1m + k_3m_1 - m) = 0 \end{cases}. \quad (18)$$

Розв'язуючи дану систему за методом Крамера, знаходимо визначники $\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3,\ \Delta_4$ у вигляді:

$$\Delta = (m_1 - m_2)(p_2 - p_1)\{a_{20}(p - p_1)(p - p_2) + a_{02}(m - m_1)(m_2 - m)\};$$
$$\Delta_1 = a_{02}(m_1 - m)(m_2 - m)(m_2 - m_1)(p_2 - p);$$
$$\Delta_2 = -a_{02}(m_1 - m)(m_2 - m)(m_2 - m_1)(p_1 - p);$$
$$\Delta_3 = -a_{20}(m_2 - m)(p_1 - p)(p_2 - p)(p_2 - p_1);$$
$$\Delta_4 = a_{20}(m_1 - m)(p_1 - p)(p_2 - p)(p_2 - p_1).$$

Звідси:

$$k_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{a_{02}(m-m_1)(m_2-m)(p_2-p)}{(p_2-p_1)\{a_{20}(p-p_1)(p-p_2)+a_{02}(m-m_1)(m_2-m)\}};$$
$$k_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{a_{02}(m_1-m)(m_2-m)(p_1-p)}{(p_2-p_1)\{a_{20}(p-p_1)(p-p_2)+a_{02}(m-m_1)(m_2-m)\}};$$
$$k_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{a_{20}(m_2-m)(p-p_1)(p_2-p)}{(m_1-m_2)\{a_{20}(p-p_1)(p-p_2)+a_{02}(m-m_1)(m_2-m)\}};$$
$$k_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{a_{20}(m_1-m)(p_1-p)(p_2-p)}{(m_1-m_2)\{a_{20}(p-p_1)(p-p_2)+a_{02}(m-m_1)(m_2-m)\}}.$$

У самому загальному випадку рекурентна формула, що зв'язує значення кінцевого ряду довільних членів послідовності (16) матиме вигляд:

$$z_{i+p,j+m} = k_1 z_{i+p_1,j+m_1} + k_2 z_{i+p_2,j+m_2} + k_3 z_{i+p_3,j+m_3} + k_4 z_{i+p_4,j+m_4}. \quad (19)$$

Підставляючи (16) у (19) одержимо рівняння, розчіпляючи яке за змінними i та j у різних степенях, зможемо скласти систему визначальних рівнянь (20):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{4} k_i = 1 \\ a_{20}\sum_{i=1}^{4} k_ip_i^2 + a_{10}\sum_{i=1}^{4} k_ip_i + a_{02}\sum_{i=1}^{4} k_im_i^2 + a_{01}\sum_{i=1}^{4} k_im_i + a_{00}\sum_{i=1}^{4} k_i + \\ +a_{11}\sum_{i=1}^{4} k_im_ip_i = a_{20}p^2 + a_{10}p + a_{02}m^2 + a_{01}m + a_{00} + a_{11}mp \\ 2a_{20}\sum_{i=1}^{4} k_ip_i + a_{10}\sum_{i=1}^{4} k_i + a_{11}\sum_{i=1}^{4} k_i\,m_i = \\ = 2a_{20}p + a_{10} + a_{11}m \\ 2a_{20}\sum_{i=1}^{4} k_ip_i + a_{10}\sum_{i=1}^{4} k_i + a_{11}\sum_{i=1}^{4} k_i\,m_i = \\ = 2a_{02}m + a_{01} + a_{11}p \end{cases} \quad (20)$$

Переписуючи її у вигляді (21)

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{4} k_i = 1 \\ \sum_{i=1}^{4} k_i = (a_{20}p_i^2 + a_{10}p_i + a_{02}m_i^2 + a_{01}m_i + a_{00} + a_{11}m_ip_i) = \\ = a_{20}p^2 + a_{10}p + a_{02}m^2 + a_{01}m + a_{00} + a_{11}mp \\ \sum_{i=1}^{4} k_i(2a_{20}p_i + a_{10} + a_{11}m_i) = \\ = 2a_{20}p + a_{10} + a_{11}m \\ \sum_{i=1}^{4} k_i(2a_{02}m_i + a_{01} + a_{11}p_i) = \\ = 2a_{02}m + a_{01} + a_{11}p \end{cases}, \quad (21)$$

і розв'язуючи за методом Крамера, знаходимо вирази для обчислення визначників $\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3,\ \Delta_4$:

$$\Delta = -4(a_{02}a_{20} - a_{11}^2)\cdot\{A_4(M_{21}p_1 + M_{13}p_2 + M_{32}p_1) +$$
$$+A_3(M_{12}p_4 + M_{41}p_2 + M_{24}p_1) + A_2(M_{31}p_4 + M_{14}p_3 + M_{43}p_1) +$$
$$A_1(M_{23}p_4 + M_{42}p_3 + M_{34}p_2) + a_{11}(M_{21}m_4 + M_{12}m_3)(p_3p_4 + p_1p_2) +$$
$$+a_{11}(M_{13}m_4 + M_{31}m_2)(p_2p_4 + p_1p_3) + a_{11}(M_{32}m_4 + M_{23}m_1)(p_1p_4 + p_2p_3)\};$$
$$\Delta_1 = -4(a_{02}a_{20} - a_{11}^2)\cdot\{A_4(M_{20}p_3 + M_{03}p_2 + M_{32}p) +$$
$$+A_3(M_{02}p_4 + M_{40}p_2 + M_{24}p) + A_2(M_{30}p_4 + M_{04}p_3 + M_{43}p) +$$
$$A_0(M_{23}p_4 + M_{42}p_3 + M_{34}p_2) + a_{11}(M_{20}m_4 + M_{02}m_3)(p_3p_4 + pp_2) +$$
$$a_{11}(M_{03}m_4 + M_{30}m_2)(p_2p_4 + pp_3) + a_{11}(M_{32}m_4 + M_{23}m)(p_2p_3 + pp_4)\};$$
$$\Delta_2 = 4(a_{02}a_{20} - a_{11}^2)\cdot\{A_4(M_{10}p_3 + M_{03}p_1 + M_{31}p) +$$
$$+A_3(M_{02}p_4 + M_{40}p_1 + M_{14}p) + A_1(M_{30}p_4 + M_{04}p_3 + M_{43}p) +$$
$$A_0(M_{13}p_4 + M_{41}p_3 + M_{34}p_1) + a_{11}(M_{10}m_4 + M_{01}m_3)(p_3p_4 + pp_1) +$$
$$a_{11}(M_{03}m_4 + M_{30}m_1)(p_1p_4 + pp_3) + a_{11}(M_{31}m_4 + M_{13}m)(pp_4 + p_1p_3)\};$$
$$\Delta_3 = -4(a_{02}a_{20} - a_{11}^2)\cdot\{A_4(M_{10}p_2 + M_{02}p_1 + M_{21}p) +$$
$$+A_2(M_{01}p_4 + M_{40}p_1 + M_{14}p) + A_1(M_{20}p_4 + M_{04}p_2 + M_{42}p) +$$
$$A_0(M_{12}p_4 + M_{41}p_2 + M_{24}p_1) + a_{11}(M_{10}m_4 + M_{01}m_2)(p_2p_4 + pp_1) +$$
$$a_{11}(M_{02}m_4 + M_{20}m_1)(p_1p_4 + pp_2) + a_{11}(M_{21}m_4 + M_{12}m)(pp_4 + p_1p_2)\};$$
$$\Delta_4 = 4(a_{02}a_{20} - a_{11}^2)\cdot\{A_3(M_{10}p_2 + M_{02}p_1 + M_{21}p) +$$
$$+A_2(M_{01}p_3 + M_{30}p_1 + M_{13}p) + A_1(M_{20}p_3 + M_{03}p_3 + M_{32}p) +$$
$$A_0(M_{12}p_3 + M_{31}p_2 + M_{23}p_1) + a_{11}(M_{10}m_3 + M_{01}m_2)(p_2p_3 + pp_1) +$$
$$a_{11}(M_{02}m_3 + M_{20}m_1)(p_1p_3 + pp_2) + a_{11}(M_{21}m_3 + M_{12}m)(pp_3 + p_1p_2)\}.$$

де $A_i = a_{20}p_i^2 + a_{02}m_i^2$, $M_{ij} = m_i - m_j$, а вирази для обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції k_1, k_2, k_3, k_4 будуть одержані в результаті розв'язання системи рівнянь (21) за формулами :

$$k_s = \frac{\Delta_s}{\Delta},\ s = \overline{1,4}\ .$$

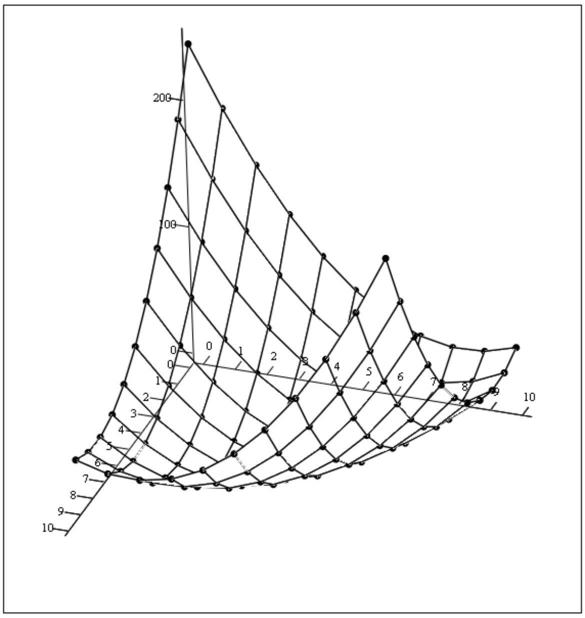

Рисунок 1. Дискретний каркас двовимірної числової послідовності
$\boldsymbol{z_{ij} = 5 + i - 3j - i^2 + 2ij + 4j^2}$ **.**

Для перевірки справедливості виведених формул визначення координат будь-якої точки двовимірного ГО, що заданий формулою (16) як суперпозиції координат чотирьох заданих довільних точок даного образу, розглянемо два приклади із конкретними вихідними даними.

Приклад 1 (рис. 1).

a_{00}=5; *a_{01}=-3*; *a_{10}=1*; *a_{11}=2*; *a_{02}=4*; *a_{20}=-1*; *p=-2*; *p_1=1*; *p_2=2*; *p_3=-1*; *p_4=4*; *m=1*; *m_1=0*; *m_2=-1*; *m_3=5*; *m_4=3*; *i=2*; *j=1.*

Рекурентна формула (19) матиме вигляд

$$z_{02} = k_1 z_{31} + k_2 z_{40} + k_3 z_{16} + k_4 z_{64} \ .$$

Звідси:

$z_{02}=15$; $z_{31}=6$; $z_{40}=-7$; $z_{16}=143$; $z_{64}=-75$;

$k_1=166/57$; $k_2=-31/19$; $k_3=2/19$; $k_2=-22/57$;

$$15 = \frac{166}{57}\cdot 6 - \frac{31}{19}\cdot(-7) + \frac{2}{19}\cdot 143 - \frac{22}{57}\cdot 75 = 15 \ .$$

Приклад 2 (рис. 1).

$a_{00}=5$; $a_{01}=-3$; $a_{10}=1$; $a_{11}=2$; $a_{02}=4$; $a_{20}=-1$; $p3$; $p_1=5$; $p_2=0$; $p_3=-2$; $p_4=-1$; $m=5$; $m_1=-1$; $m_2=3$; $m_3=2$; $m_4=-4$; $i=4$; $j=5$.

Рекурентна формула (19) матиме вигляд

$$z_{7,10} = k_1 z_{94} + k_2 z_{48} + k_3 z_{27} + k_4 z_{31} \ .$$

Звідси:

$z_{7,10}=473$; $z_{94}=57$; $z_{48}=289$; $z_{27}=206$; $z_{31}=6$;

$k_1=-266/1287$; $k_2=1355/429$; $k_3=-893/429$; $k_2=167/1287$;

$$473 = -\frac{266}{1287}\cdot 57 + \frac{1355}{429}\cdot 289 - \frac{893}{429}\cdot 206 + \frac{167}{1287}\cdot 6 = 473 \ .$$

Висновки. Для дискретного моделювання ГО можуть бути застосовані дані дослідження визначення поліномів двох змінних ***n***-го степеня за довільними дискретними значеннями. Одержані в даній статті формули обчислення коефіцієнтів суперпозицій двовимірних точкових множин дозволяють визначати аналітичні вирази дискретних аналогів двовимірних ГО у загальному вигляді.

Список використаної літератури.

1. Пустюльга С. І. Дискретне визначення геометричних об’єктів числовими послідовностями : дис. докт. техн. наук : 05.01.01 / Пустюльга Сергій Іванович – КНУБА, 2006. – 316 с.

2. Воронцов О. В. Дискретна інтерполяція геометричних образів об'єктів будівництва одновимірними числовими послідовностями із нерівномірним кроком / Олег Вікторович Воронцов // Збірник наукових праць "Будівництво та техногенна безпека". Сімферополь. Національна академія природоохоронного та курортного будівництва. – 2013. – №48. – С. 43–49.

3. Воронцов О. В. Властивості суперпозицій точкових множин. / Олег Вікторович Воронцов. // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА.. – 2010. – №86. – С. 345–349.

4. Воронцов О. В. Моделювання об’єктів будівництва та машинобудування довільними дискретними значеннями числових послідовностей / Олег Вікторович Воронцов. // Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво) / Полтав. нац. техн. ун-т ім. Юрія Кондратюка. – Полтава: ПолтНТУ. – 2013. – №4. – С. 25–35.

5. Инженерная геометрия с элементами теории параметризации / В. Е.Михайленко, С. Н. Ковалев, Н. И. Седлецкая, В. А. Анпилогова. – Киев: УМК ВО, 1989. – 84 с.

6. Ковальов С.М., Гумен М.С., Пустюльга С.І., Михайленко В.Є., Бурчак І.Н. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Спеціальні розділи. Випуск 1. — Луцьк.: Редакційно-видавничий відділ ЛДТУ, 2006. — С. 118-176.

ВОРОНЦОВ Олег Вікторович – к.т.н., доцент, завідуючий кафедрою нарисної геометрії і графіки Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка.

ТУЛУПОВА Лариса Олександрівна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри вищої математики Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка.

ВОРОНЦОВА Ірина Валеріївна – к.пед.н., викладач Полтавського коледжу нафти і газу Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка.

Наукові інтереси:

- дискретне геометричне моделювання об'єктів.