

УДК. 514.18

**Конструювання дискретного каркасу двовимірного
геометричного образу суперпозиціями точкових множин прямих
ліній**

Воронцов О.В., к.т.н.,

Тулупова Л.О., к.ф.-м.н.

Полтавський національний технічний університет імені Юрія

Кондратюка (м. Полтава, Україна).

Тел., (095) 092 30 89

Воронцова І.В., к.пед.н.

Полтавський коледж нафти і газу

Полтавського національного технічного університету імені Юрія

Кондратюка (м. Полтава, Україна).

Тел., (050) 275 02 91

У статті розглянуто спосіб моделювання двовимірного геометричного образу у вигляді каркасу дискретно представленої поверхні на основі суперпозицій одновимірних точкових множин, що належать прямим лініям. Запропонований спосіб моделювання дозволяє керувати формою поверхні, як варіацією форми опорного контуру, так зміною аплікату центрального вузла і вузлів опорного контуру.

Ключові слова: двовимірні геометричні образи, дискретно представлені поверхні, суперпозиції точкових множин, коефіцієнти суперпозиції, числові послідовності.

Постановка проблеми. Сучасні дослідження науковців у галузі прикладної геометрії розкривають нові можливості статико-геометричного методу, доводять, що ці можливості далеко не вичерпані та подальші дослідження є перспективними.

В основу математичного апарату статико-геометричного методу покладено розв'язок досить громіздких систем лінійних рівнянь, що ускладнює процес комп'ютерної реалізації розрахунків. Тому однією із задач даного дослідження є саме удосконалення та розвиток даного методу за рахунок дослідження нових підходів до дискретного моделювання геометричних образів, що дозволяють одержувати геометричний образ без складання і розв'язання систем лінійних рівнянь

Аналіз останніх досліджень. У роботі [1] визначено поняття апарату суперпозицій множин у прикладній геометрії. Доведено ряд

властивостей, що дозволили зробити висновки про перспективність глибокого всебічного дослідження апарату суперпозицій.

У роботах [2, 3, 4] авторів даної статті доведено окремі властивості суперпозицій точкових множин і досліджено новий підхід до дискретного геометричного моделювання кривих ліній на основі геометричних апаратів аналітичної геометрії та суперпозицій одновимірних точкових множин.

Формулювання цілей статті. Метою даної статті є дослідження способу моделювання двовимірного геометричного образу у вигляді каркасу дискретно представленої поверхні (ДПП) на основі геометричних апаратів аналітичної геометрії та суперпозицій одновимірних точкових множин, де управління формою поверхні може здійснюватися, як варіацією форми опорного контуру, так зміною аплікату центрального вузла і вузлів опорного контуру.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо один із способів конструювання дискретних каркасів двовимірних геометричних образів на основі визначених у роботі [2] властивостей суперпозицій одновимірних точкових множин.

Якщо, наприклад, двовимірний геометричний образ може бути представлений подвійною числовою послідовністю виду

$z_{ij} = i^n + j^m,$	
-----------------------	--

то його дискретний каркас може бути сформований на квадратній у плані сітці за принципом формування дискретного ряду точок поліноміальної кривої, що запропонований у роботі [2].

На рисунку 1 показано формування дискретних точок кривих $z=i^2$, $z=j^2$, які послідовно задають кінці векторів в процесі побудови суперпозиції точок A_{1-5} , N_{1-5} , що належать заданим прямим. Точки A_{1-5} , N_{1-5} належать, відповідно, площинам $i=5$, $j=5$, та задають числову послідовність

$z_n = 2nz_1 - z_1,$	(1)
----------------------	-----

де: $z_1 = z_{A_1}$, $z_1 = z_{N_1}$	
---------------------------------------	--

Дискретний каркас вузлових точок, наприклад, подвійної числової послідовності

$z_{ij} = i^2 + j^2,$	
-----------------------	--

може бути сформований послідовним процесом побудови суперпозицій точок A_{1-5} , B_{1-5} , C_{1-5} , D_{1-5} , E_{1-5} , F_{1-5} , N_{1-5} одновимірної числової послідовності (1), що належать заданим прямим у відповідних площинах (рис. 1).

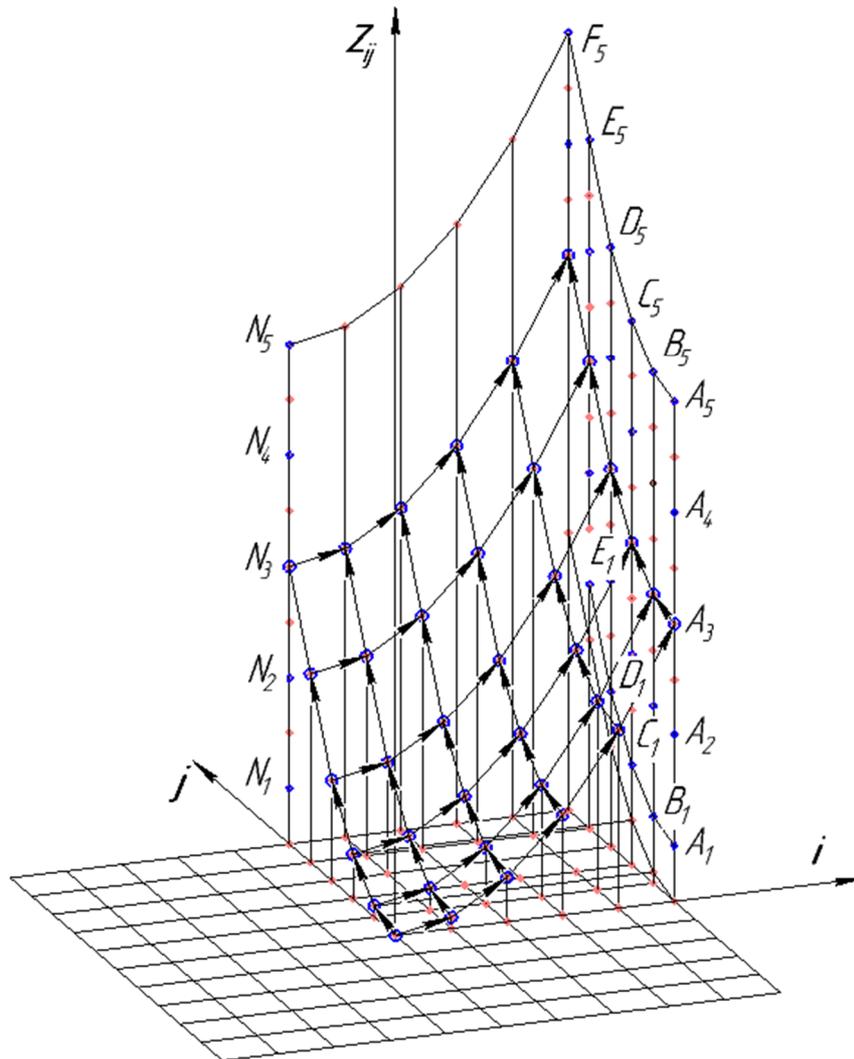


Рис. 1. Конструювання дискретного каркасу відсіку поверхні суперпозиціями точкових множин прямих ліній.

У процесі побудови суперпозицій вищевказаних множин точок із коефіцієнтами суперпозиції відповідно $k_1=k_2=k_3=k_4=k_5=0,2$, кінці векторів будуть задавати дискретні значення кривих — складових дискретного каркасу поверхні, а саме точки: A_{1-5}^l , B_{1-5}^l , C_{1-5}^l , D_{1-5}^l , E_{1-5}^l , F_{1-5}^l , N_{1-5}^l .

Величина z_{B_1} послідовності (1) для точки B_1 визначиться за формулою:

$z_{B_1} = z_{A_1} + z_{01}$.	
--------------------------------	--

Для точки C_1 :

$z_{C_1} = z_{A_1} + z_{02}$.	
--------------------------------	--

І далі:

$z_{D_1} = z_{A_1} + z_{03}$, $z_{E_1} = z_{A_1} + z_{04}$, $z_{F_1} = z_{A_1} + z_{05}$.	
--	--

Точки A_{1-5} , B_{1-5} , C_{1-5} , D_{1-5} , E_{1-5} , F_{1-5} , N_{1-5} , що розташовані на відповідних прямих задають числову послідовність (1), і визначаються рекурентною формулою (2)

$z_{i+1} = z_i + m_i,$	(2)
де: $m_i = 2z_1 = 10$	

Точки A_{1-5}^l , B_{1-5}^l , C_{1-5}^l , D_{1-5}^l , E_{1-5}^l , F_{1-5}^l , N_{1-5}^l , що одержані в ході побудови суперпозицій точок A_{1-5} , B_{1-5} , C_{1-5} , D_{1-5} , E_{1-5} , F_{1-5} , N_{1-5} належать квадратним параболоам.

Для визначення n точок квадратної параболи на відповідній прямій необхідно задати n точок: $z_{A_1} = n$ і далі — за формулою:

$z_n = 2nz_1 - z_1; z_{A_n} = 2n^2 - n.$	
--	--

n точок параболи будуть визначені у ході побудови суперпозиції заданих на відповідній прямій точок із показниками суперпозиції:

$k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_n = 1/n .$	
---	--

Вихідними умовами конструювання дискретного каркасу параболічної поверхні і одночасно поверхні паралельного переносу представленої на рисунку 1 будуть суперпозиції одновимірних точкових множин заданих прямих ліній.

За даним принципом можна формувати дискретні каркаси двовимірних геометричних образів на квадратній у плані сітці, континуальними аналогами яких будуть параболічні поверхні. Складовими дискретних каркасів будуть поліноміальні криві різних степенів.

Для побудови дискретного аналогу поліному n -го степеня із використанням запропонованого підходу, на прямій $i=n$, де n – кількість точок на прямій, можна задати точки рекурентною залежністю: $\Delta^{n-1}y_i = m_i$ [3], де $m_i = m_{i-1}nz_1$, а n – степінь поліному, або за формулами [5], що зв'язують значення кінцевого ряду довільних членів послідовності

$z_{i+p} = k_1z_{i+p_1} + k_2z_{i+p_2} + k_3z_{i+p_3} + \dots + k_kz_{i+p_k} + \dots + k_nz_{i+p_n} + k_{n+1}z_{i+p_{n+1}},$	
--	--

де значення для обчислення коефіцієнтів суперпозиції $k_1, k_2, k_3, \dots, k_k, \dots, k_n, \dots, k_{n+1}$ заданих на відповідних прямих точок можна одержати за формулами [5]:

$k_s = \frac{(-1)^n \prod_{i=2}^{n+1} (p-p_i)}{(p-p_s) \prod_{i=1}^{s-1} (p_i-p_s) \cdot \prod_{i=s+1}^{n+1} (p_i-p_s)},$ де $s = \overline{2, n+1}.$	
---	--

Крім того, вихідними умовами конструювання дискретного каркасу параболічної поверхні і одночасно поверхні паралельного переносу представленої на рисунку 3 можуть бути аплікати двох точок на кожній із заданих прямих $A_{1,5}, B_{1,5}, C_{1,5}, D_{1,5}, E_{1,5}, F_{1,5}, N_{1,5}$. Аплікати решти точок $A_{2-4}, B_{2-4}, C_{2-4}, D_{2-4}, E_{2-4}, F_{2-4}, N_{2-4}$ на прямих будуть визначені як суперпозиції двох заданих:

$$\begin{aligned}
& z_{A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, N_2} = k_1 z_{A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, N_1} + \\
(1 - k_1) z_{A_5, B_5, C_5, D_5, E_5, F_5, N_5} & \Rightarrow k_1 = 0,75; k_2 = 0,25, \\
& z_{A_3, B_3, C_3, D_3, E_3, F_3, N_3} = k_1 z_{A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, N_1} + \\
(1 - k_1) z_{A_5, B_5, C_5, D_5, E_5, F_5, N_5} & \Rightarrow k_1 = 0,5; k_2 = 0,5, \\
& z_{A_4, B_4, C_4, D_4, E_4, F_4, N_4} = k_1 z_{A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, N_1} + \\
(1 - k_1) z_{A_5, B_5, C_5, D_5, E_5, F_5, N_5} & \Rightarrow k_1 = 0,25; k_2 = 0,75.
\end{aligned}$$

Висновки. Таким чином досліджено новий спосіб дискретного геометричного моделювання двовимірних геометричних образів на основі геометричних апаратів аналітичної геометрії та суперпозицій одновимірних точкових множин.

В результаті формування сітчастого каркасу за даним способом можна одержувати моделі двовимірних геометричних образів у вигляді врівноважених дискретних структур коли складові каркасу будуть дискретними аналогами поліномів як другого, так і n -го степенів.

Управління формою модельованого образу може здійснюватися, як варіацією форми опорного контуру, так зміною аплікату центрального вузла і вузлів опорного контуру.

Запропонований підхід може бути використаний для двовимірної дискретної інтерполяції параболічними поверхнями і поверхнями паралельного переносу.

Література

1. Ковалев С. Н. О суперпозициях / Сергей Николаевич Ковалев. // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА.. – 2010. – №84. – С. 38–42.
2. Воронцов О. В. Властивості суперпозицій точкових множин. / Олег Вікторович Воронцов. // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА.. – 2010. – №86. – С. 345–349.
3. Воронцов О. В. Підхід до дискретного представлення безперервних кривих / Олег Вікторович Воронцов. // Геометричне та комп'ютерне моделювання: Збірник наук. праць — Харків: ХДУХТ. – 2011. – №29. – С. 63–66.
4. Воронцов О. В. Узагальнення одного підходу до дискретного представлення кривих ліній / Олег Вікторович Воронцов. // Мелітополь. Праці Таврійського агротехнологічного університету. – 2012. – Випуск №4. Том 53 – С. 104–108.
5. Воронцов О. В. Дискретна інтерполяція геометричних образів об'єктів будівництва одновимірними числовими послідовностями із нерівномірним кроком / Олег Вікторович Воронцов // Збірник наукових праць "Будівництво та техногенна безпека". Сімферополь.

Національна академія природоохоронного та курортного будівництва.
– 2013. – №48. – С. 43–49.

**КОНСТРУИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНОГО КАРКАСА
ДВУМЕРНОГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ОБРАЗА
СУПЕРПОЗИЦИЯМИ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ ПРЯМЫХ
ЛИНИЙ**

О.В. Воронцов, Л.А. Тулупова, И.В. Воронцова

В статье рассмотрен способ моделирования двумерного геометрического образа в виде каркаса дискретно представленной поверхности на основе суперпозиций одномерных точечных множеств, принадлежащих прямым линиям. Предложенный способ моделирования позволяет управлять формой поверхности, как за счет варьирования формой опорного контура, так и за счет изменения аппликат центрального узла и узлов опорного контура.

Ключевые слова: двумерные геометрические образы, дискретно представленные поверхности, суперпозиции точечных множеств, коэффициенты суперпозиции, числовые последовательности.

**FORMING OF THE DISCRETE FRAME OF
A TWO-DIMENSIONAL GEOMETRICAL IMAGE BY
SUPERPOSITIONS OF POINT SETS OF DIRECT LINES**

O. Vorontsov, L. Tulupova, I. Vorontsova

In the article it was proposed a method of modeling of a two-dimensional geometric image as the frame of a discretely represented surface, using superpositions of one-dimensional point sets, which belong to some direct lines. This method allows managing the shape of a surface as by varying the form of a support contour as by changing applicates of a central node and nodes of the support contour.

Keywords: two-dimensional geometric images, discretely represented surfaces, superpositions of point sets, coefficients of superposition, numerical sequences.