УДК. 514.18

ВПЛИВ КОЕФІЦІЄНТІВ СУПЕРПОЗИЦІЇ НА ДИСКРЕТНЕ ФОРМУВАННЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ

DOI

Воронцов О.В., к.т.н.,
voronoleg6163@gmail.com, **ORCID: 0000-0001-7339-9196**
Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка» (м. Полтава, Україна).
Воронцова І.В., к.пед.н.,
ira061061@gmail.com, **ORCID: 0000-0001-9131-2816**
Полтавський коледж нафти і газу
Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка» (м. Полтава, Україна).

У статті представлено узагальнений підхід до дискретного моделювання одновимірних дискретних геометричних образів (ДГО) шаблонами, де управління формою дискретно представленої кривої (ДПК), що моделюється здійснюється не тільки функцією розподілу між суміжними вузами каркасу величини кінцевої різниці, а і функцією розподілу коефіцієнтів суперпозиції.

Встановлено закономірності зміни величин коефіцієнтів суперпозиції та величини кінцевої різниці, яка слугує функціональним аналогом навантаження у межах статико-геометричного методу під час моделювання одновимірних точкових множин. Такий підхід дозволяє ефективно розв'язувати задачі суцільної дискретної інтерполяції та екстраполяції числовими послідовностями для довільних одновимірних функціональних залежностей, що задаються через дві вибрані вузлові точки.

Однією з основних задач дослідження є продовження розробки теоретичних засад побудови дискретних аналогів криволінійних об'єктів на основі класичного апарату кінцевих різниць, статико-геометричного методу моделювання та геометричного інструментарію суперпозицій.

У рамках дослідження проаналізовано процес формування дискретних одновимірних геометричних образів на прикладі поліноміальних функціональних залежностей, використовуючи задані величини коефіцієнтів суперпозиції. Виявлено закономірності зміни коефіцієнтів суперпозиції між суміжними вузловими точками поліноміальної функції, а також величини кінцевої різниці, що ілюструються у вигляді графіків числових послідовностей для вибраної розрахункової конфігурації.

Встановлено залежності величини кінцевої різниці від ординат модельованої кривої, а також від значень коефіцієнтів суперпозиції між суміжними вузловими точками.

Отримані результати дозволяють формувати одновимірні геометричні образи у межах заданої розрахункової схеми на основі відомих ординат двох опорних вузлових точок, коефіцієнтів суперпозиції та відповідної кінцевої різниці.

Таким чином, дослідження пропонує універсальний підхід до визначення закономірностей варіації коефіцієнтів суперпозиції та кінцевих різниць у рамках заданих розрахункових схем, що дозволяє визначати ординати точок довільних одновимірних функціональних залежностей і точкових множин.

Ключові слова: дискретне моделювання, статико-геометричний метод, геометричний апарат суперпозицій, величина кінцевої різниці, коефіцієнти суперпозиції.

Постановка проблеми. Залучення геометричного апарату суперпозицій для розв’язання задач інтерполяції значно розширює можливості дискретного моделювання геометричних образів.

Встановлення закономірностей зміни величин коефіцієнтів суперпозиції та величини кінцевої різниці, яка слугує функціональним аналогом навантаження у межах статико-геометричного методу під час моделювання одновимірних точкових множин дозволить ефективно розв’язувати задачі суцільної дискретної інтерполяції та екстраполяції числовими послідовностями для довільних одновимірних функціональних залежностей, що задаються через дві вибрані вузлові точки.

Аналіз останніх досліджень Питанням застосування для дискретного моделювання ГО геометричного апарату суперпозицій в поєднанні з класичним методом кінцевих різниць, статико-геометричним методом, математичним апаратом числових послідовностей присвячені роботи авторів даної статті [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

Формулювання цілей статті. Метою даної статті є методика створення обчислювальних шаблонів для дискретного формування поліноміальних функціональних залежностей суперпозиціями координат суміжних точок з подальшим дослідженням впливу величин коефіцієнтів суперпозиції у даних шаблонах на формоутворення ДГО.

Основна частина. Дискретно представлену на рисунку 1 криву можна розглядати як модель нерозтяжної натягнутої нитки, на яку з рівномірним кроком $h = 1$ діють зосереджені зусилля P_i . Система рівнянь (1) рівноваги вузлів із заданими крайовими умовами (координатами вузлів A і E) визначає форму ламаної, яка є дискретною моделлю кривої при заданому зовнішньому навантаженні.

$$\begin{aligned} x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1} + KP_{i,x} &= 0 \\ y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + KP_{i,y} &= 0 \end{aligned} , \qquad (1)$$

i - номер вузла; x_i , y_i – координати i-го вузла; $P_{i,x}$, $P_{i,y}$ – координатні складові зовнішнього зусилля; K – коефіцієнт пропорційності.

При рівномірному кроці вузлів уздовж осі *Ox* досить скласти для кожного невідомого вузла тільки друге рівняння системи (1):

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + KP_{i,y} = 0 . \qquad (2)$$

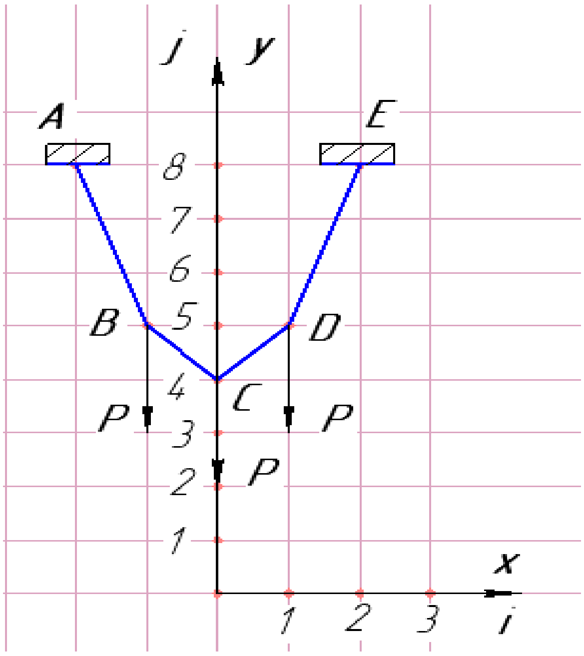


Рисунок 1. Дискретно представлена крива (ДПК) $y = x^2 + 4$.

Якщо необхідно побудувати дискретну модель натягнутої нитки під навантаженням $KP_i = -2$, яка закріплена у вузлах *A*(*x_A*=-2; *y_A*=8) і *B*(x_B=2; y_A=8) з рівномірним кроком *h=1* уздовж осі *Ox* необхідно скласти і розв'язати систему рівнянь (1) для усіх невідомих вузлів моделі (рис. 1):

$$\begin{cases} y_A - 2y_B + y_C + KP_B = 0 \\ y_B - 2y_C + y_D + KP_C = 0 \\ y_C - 2y_D + y_E + KP_D = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

При $KP = KP_B = KP_C = KP_D = -2$, $y_A = 8$, $y_E = 8$, розв'язання цієї системи дає результат: $y_B = 5;\ y_C = 4;\ y_D = 5$.

Варіювання функції $P_i = f(i)$ розподілу зовнішнього навантаження між вузлами дозволяє дискретно моделювати криві різної форми і вирішувати завдання дискретної інтерполяції на площині.

Одночасно, згідно доведених раніше у роботах авторів властивостей, усі скінчено-різницеві оператори побудовані на основі суперпозиції координат групи суміжних вузлів та координати кожного вузла є суперпозиціями однойменних координат решти вузлів, тому можна спростити методику моделювання дискретних кривих на основі геометричного апарату суперпозицій.

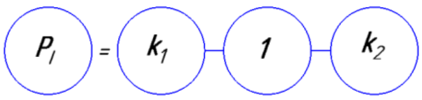
Терміни «величина або функція розподілу зовнішнього формоутворюючого навантаження» використовують, якщо геометричний образ формується статико-геометричним методом, оскільки зосереджені зусилля у вузлових точках передбачають наявність урівноважуючих зусиль у ланках ламаної.

При формуванні дискретних образів на основі геометричного апарату суперпозицій доцільно використовувати терміни «величина, або функція розподілу величини кінцевої різниці», що буде в окремому випадку тотожною величині зовнішнього навантаження.

Величину кінцевої різниці, що буде прообразом функції розподілу зовнішнього формоутворюючого навантаження, для формування дискретного аналогу поліному 2-го ступеня на основі суперпозицій заданих вузлових точок зможемо записати у вигляді:

$$P_i = y_i - k_1 y_{i-1} - k_2 y_{i+1} \, , \qquad (3)$$

Або, у вигляді обчислювального шаблону :



(4)

Таким чином система рівнянь, що буде тотожною рівнянням (2) для вихідних даних представленої на рисунку 1 кривої матиме вигляд:

$$\begin{cases} k_1 y_A - y_B + k_2 y_C + P_B = 0 \\ k_1 y_B - y_C + k_2 y_D + P_C = 0 \\ k_1 y_C - y_D + k_2 y_E + P_D = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

При $P_i = P_B = P_C = P_D = -1$, $y_A = 8$, $y_E = 8$, розв’язання цієї системи дає результат: $y_B = 5$; $y_C = 4$; $y_D = 5$.

Таким чином для шаблону (4) маємо два управляючих параметри k_1 , k_2 , процес зміни яких можна здійснювати за двома напрямками.

Підбираючи певним чином параметри k_1 , k_2 можна одержати велику кількість врівноважених каркасів кривих ліній.

Змінювати дольову участь суміжних вузлів у формуванні центрального можна добираючи різні комбінації співвідношень величин коефіцієнтів суперпозиції і, таким чином, одержувати велику кількість врівноважених дискретних каркасів кривих ліній, що відповідають наперед заданим вимогам при рівномірно розподіленій у вузлах величині кінцевої різниці, так і розподіленій за різними функціональними залежностями.

Розглянемо приклади побудови дискретних каркасів кривих, сформованих на заданій схемі (рисунок1) для наведених нижче можливих комбінацій значень коефіцієнтів суперпозиції:

$$k_1 = (-\infty; +\infty), \; k_2 = (-\infty; +\infty) \, ,$$

де $k_1 + k_2 = 1$.

Для визначення координат шуканих вузлів дискретного каркасу, що моделює певну криву за даними координатами 2-х вузлів опорного контуру (рис. 1) і величиною кінцевої різниці:

$P_i = P_B = P_C = P_D = -1$; $y_A = 8$; $y_E = 8$.

Розглянемо, як приклади, два варіанти комбінацій величин коефіцієнтів суперпозиції із множини можливих (6):

1) $k_1 = 0{,}1$, $k_2 = 0{,}9$; 2) $k_1 = 0{,}5$, $k_2 = 0{,}5$;

Для визначення ординат шуканих вузлів необхідно скласти систему рівнянь (5).

Розв'язання цієї системи рівнянь дає аплікати невідомих вузлів при рівномірно розподіленій між вузлами каркасу величині кінцевої різниці

P_i =1.

Результати розв'язку для двох варіантів представлені у таблиці 1. Приклади побудови ДПК показані на рисунках 2 – 3.

Таблиця 1

Дискретні значення ординат каркасів модельованих кривих

			k_1=0,1	k_2=0,9	
i	-2	-1	0	1	2
y_i	8	4,804878049	5,56097561	6,756097561	8
			k1=0,5	*k2=0,5*	
i	-2	-1	0	1	2
y_i	8	5	4	5	8

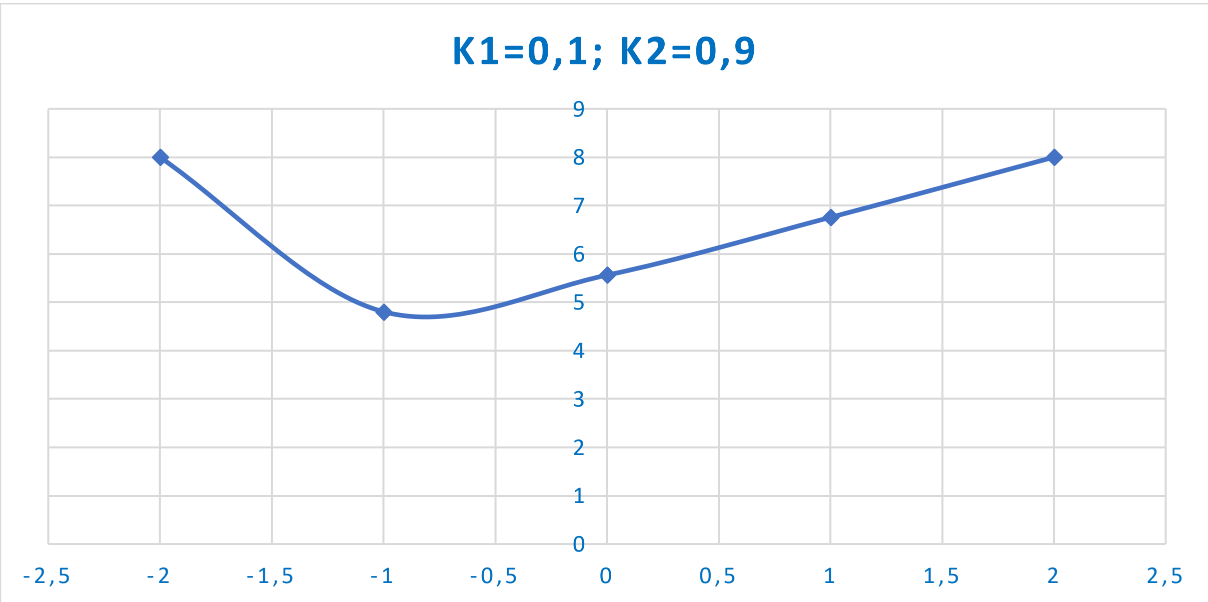


Рисунок 2. 1) $k_1 = 0{,}1$, $k_2 = 0{,}9$

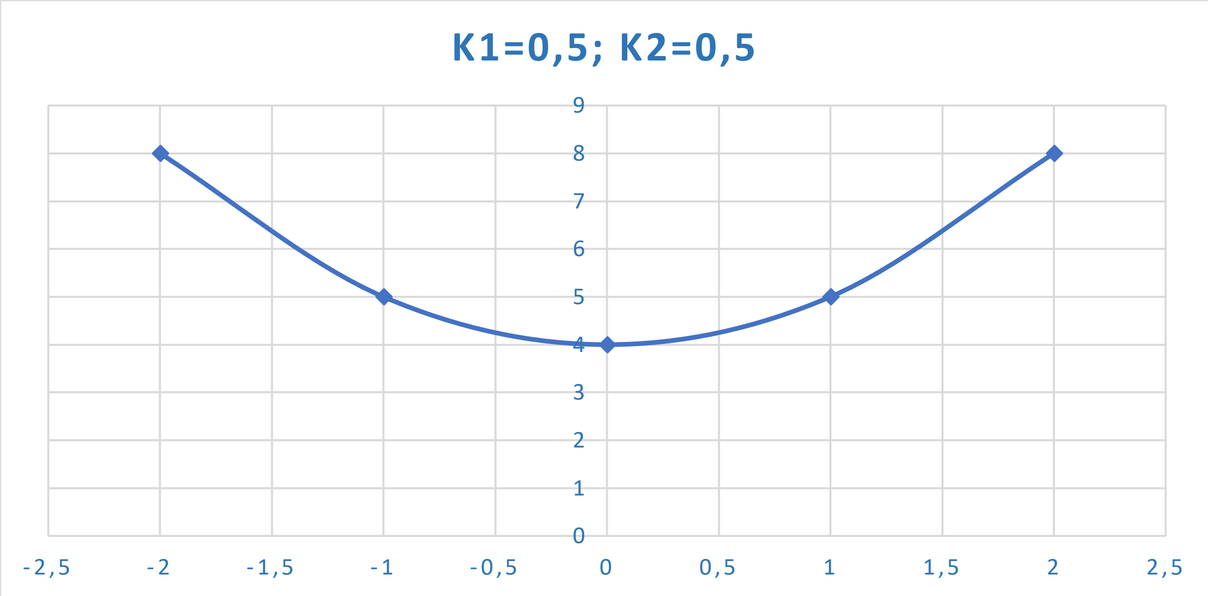


Рисунок 3. 2) $k_1 = 0{,}5$, $k_2 = 0{,}5$

Одночасно ці ж самі каркаси можна отримати розв'язанням системи рівнянь (5) за даними координатами 3-х вузлових точок (рис. 1):
$y_A = 8$; $y_C = 4$; $y_E = 8$; та – за умови: $k_1 = k_2 = 0{,}5$.

Розв'язання цієї системи рівнянь дає ті ж самі аплікати невідомих вузлів та дискретні значення функції розподілу величини кінцевої різниці між вузлами каркасу.

Результати розв'язку для двох варіантів представлені у таблиці 2. Дискретні значення величини кінцевої різниці графічно представлені на рисунках 4 – 5.

Таблиця 2

Дискретні значення ординат каркасів модельованих кривих

			k_1=0,5	k_2=0,5	
i	-2	-1	0	1	2
$\boldsymbol{y_i}$	8	4,804878049	5,56097561	6,756097561	8
$\boldsymbol{P_i}$		-1,975609756	-0,219512195	-0,024390244	
			k_1=0,5	k_2=0,5	
i	-2	-1	0	1	2
$\boldsymbol{y_i}$	8	5	4	5	8
$\boldsymbol{P_i}$		-1	-1	-1	

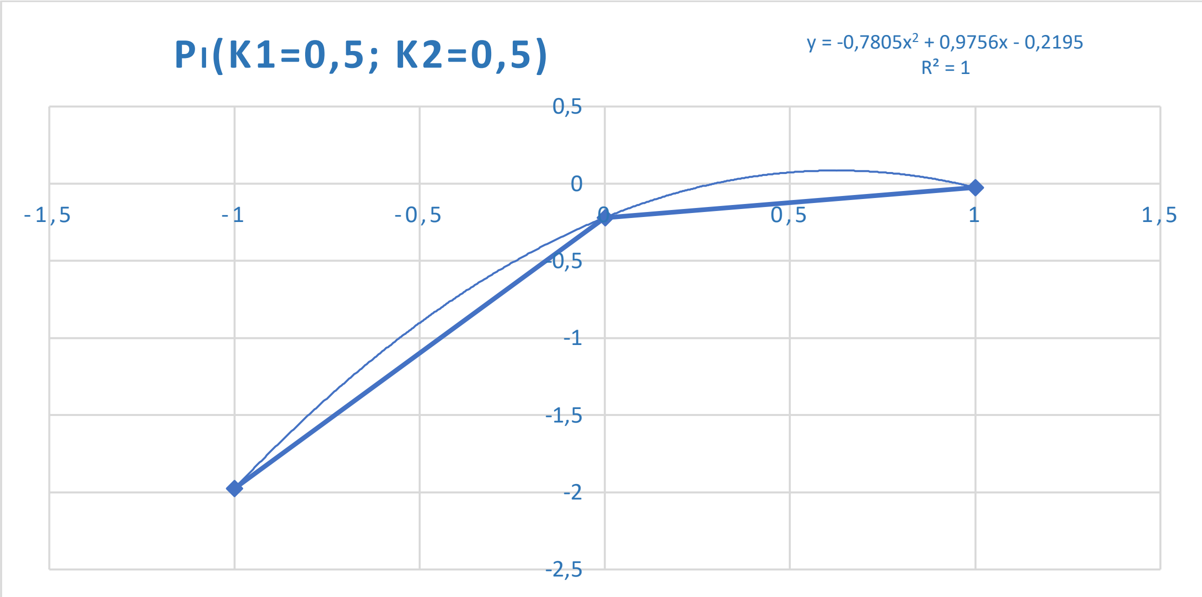


Рисунок 4. 1-й варіант

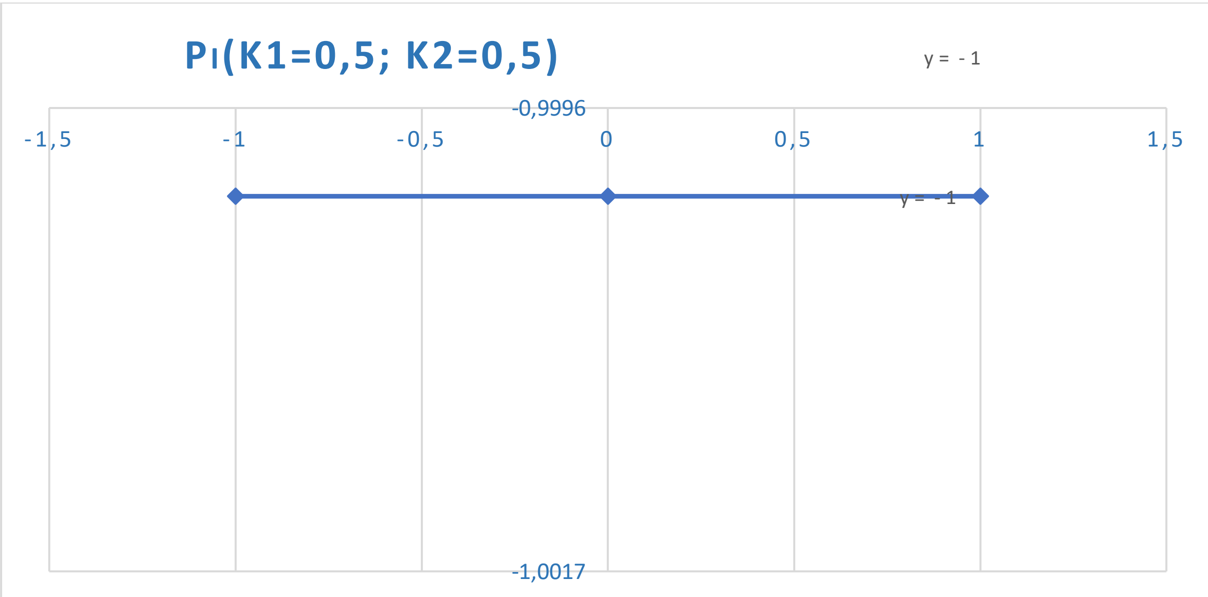


Рисунок 5. 2-й варіант

Висновки. У даній статті запропоновано методику керування формою дискретного каркасу кривої, що моделюється

Отримані результати дозволяють формувати одновимірні геометричні образи у межах заданої розрахункової схеми на основі відомих ординат двох опорних вузлових точок, коефіцієнтів суперпозиції та відповідної кінцевої різниці.

Перспективи подальших досліджень. Дослідження пропонує універсальний підхід до визначення закономірностей варіації коефіцієнтів суперпозиції та кінцевих різниць у рамках заданих розрахункових схем, що уможливлює моделювання ординат точок для довільних одновимірних функціональних залежностей і точкових множин.

Література

1. Воронцов О.В. Дискретна інтерполяція суперпозиціями координат трьох точок одновимірних числових послідовностей на прикладі дробово-лінійних функцій // О.В. Воронцов, І.В. Воронцова // Сучасні проблеми моделювання. Збірник наукових праць Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького. Мелітополь: – МДПУ. Випуск 18. 2020. С. 90.— 98.
https://doi.org/10.33842/2313-125X/2020/18/90/98

2. Воронцов О.В.,Воронцова І.В. Спосіб одновимірної дискретної інтерполяції за координатами трьох точок числових послідовностей на прикладі показникових функцій. Прикладні питання математичного моделювання. Херсон: ХНТУ, Т.3, №2.2. 2020. С. 35 – 43.
https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.3

3. Воронцов О.В., Воронцова І.В. Закономірності зміни величин коефіцієнтів суперпозиції у процесі інтерполяції гіперболічними функціями. Прикладні питання математичного моделювання. Херсон: ХНТУ, Т.4, №1. 2021. С. 59 – 66.
https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.6

4. Воронцов, О.В., Усенко В,Г,, Воронцова І.В. Визначення коефіцієнтів суперпозиції для дискретного формування поліноміальних функціональних залежностей / О.В. Воронцов, В.Г. Усенко, І.В. Воронцова // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2025. – Вип. 107. – С. 42-53. Категорія Б.
https://doi.org/10.32347/0131-579x.2024.107

5. Воронцов, О.В., Воронцова І.В. Залежності величини скінченної різниці та величин коефіцієнтів суперпозиції при формуванні одновимірних геометричних образів / О.В. Воронцов, І.В. Воронцова // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2023. – Вип. 105. – С. 62-80.
https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.105

6. Воронцов, О.В., Усенко В.Г., Воронцова І.В. Систематизація поліноміальних кривих за виглядом функції зовнішнього формоутворюючого навантаження або величини кінцевої різниці / О.В. Воронцов, В.Г, Усенко, О.В. Воронцова // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2022. – Вип. 103. – С. 23-37.
https://doi.org/10.32347/0131-579x.2022.103/23-27

7. Воронцов, О.В., Усенко В.Г., Воронцова І.В. Величина кінцевої різниці у формуванні одновимірних геометричних образів представлених числовими послідовностями елементарних функціональних залежностей / О.В. Воронцов, В.Г, Усенко, О.В. Воронцова // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2022. – Вип. 102. – С. 39-55.
https://doi.org/10.32347/0131-579X.2022.102.39-55

THE INFLUENCE OF SUPERPOSITION COEFFICIENTS ON THE DISCRETE FORMATION OF ELEMENTARY FUNCTIONAL DEPENDENCIES

Oleg Vorontsov, Irina Vorontsova

The article presents a generalized approach to the discrete modeling of one-dimensional discrete geometric objects (DGOs) using templates, where the shape control of a discretely represented curve (DRC) being modeled is performed not only by the distribution function of the finite difference magnitude between adjacent nodes of the framework, but also by the distribution function of superposition coefficients.

Patterns of change in the values of superposition coefficients and the magnitude of the finite difference—which serves as a functional analog of load within the framework of the static-geometric modeling method—have been established during the modeling of one-dimensional point sets. This approach enables the effective solving of problems related to continuous discrete interpolation and extrapolation using numerical sequences for arbitrary one-dimensional functional dependencies defined by two selected nodal points.

One of the primary objectives of the study is to further develop the theoretical foundations for constructing discrete analogs of curvilinear objects based on the classical apparatus of finite differences, the static-geometric modeling method, and the geometric tools of superposition.

The research analyzes the process of forming discrete one-dimensional geometric objects using polynomial functional dependencies, with predefined values of superposition coefficients. It identifies patterns in the variation of superposition coefficients between adjacent nodal points of the polynomial function, as well as in the magnitude of the finite difference, illustrated through graphs of numerical sequences for a selected computational configuration.

The study establishes the dependencies of the finite difference magnitude on the ordinates of the modeled curve and the values of superposition coefficients between adjacent nodal points.
The obtained results make it possible to form one-dimensional geometric objects within a given computational scheme, based on known ordinates of two reference nodal points, superposition coefficients, and the corresponding finite difference.

Thus, the research proposes a universal approach to identifying the patterns of variation in superposition coefficients and finite differences within given computational schemes, enabling the modeling of point ordinates for arbitrary one-dimensional functional dependencies and point sets.

Keywords: discrete modeling, static-geometric method, geometric apparatus of superposition, finite difference magnitude, superposition coefficients.

References

1. Vorontsov O.V. Dyskretna interpoliatsiia superpozytsiiamy koordynat trokh tochok odnovymirnykh chyslovykh poslidovnostei na prykladi drobovo-liniinykh funktsii // O.V. Vorontsov, I.V. Vorontsova // Suchasni problemy modeliuvannia. Zbirnyk naukovykh prats Melitopolskoho derzhavnoho pedahohichnoho universytetu imeni Bohdana Khmelnytskoho. Melitopol: – MDPU. Vypusk 18. 2020. S. 90.— 98.
https://doi.org/10.33842/2313-125X/2020/18/90/98

2. Vorontsov O.V.,Vorontsova I.V. Sposib odnovymirnoi dyskretnoi interpoliatsii za koordynatamy trokh tochok chyslovykh poslidovnostei na prykladi pokaznykovykh funktsii. Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia. Kherson: KhNTU, T.3, №2.2. 2020. S. 35 – 43.
https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.3

3. Vorontsov O.V., Vorontsova I.V. Zakonomirnosti zminy velychyn koefitsiientiv superpozytsii u protsesi interpoliatsii hiperbolichnymy funktsiiamy. Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia. Kherson: KhNTU, T.4, №1. 2021. S. 59 – 66.
https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.6

4. Vorontsov, O.V., Usenko V,H,, Vorontsova I.V. Vyznachennia koefitsiientiv superpozytsii dlia dyskretnoho formuvannia polinomialnykh funktsionalnykh zalezhnostei / O.V. Vorontsov, V.H. Usenko, I.V. Vorontsova // Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. – K.: KNUBA, 2025. – Vyp. 107. – S. 42-53. Katehoriia B.
https://doi.org/10.32347/0131-579x.2024.107

5. Vorontsov, O.V., Vorontsova I.V. Zalezhnosti velychyny skinchennoi riznytsi ta velychyn koefitsiientiv superpozytsii pry formuvanni odnovymirnykh heometrychnykh obraziv / O.V. Vorontsov, I.V. Vorontsova // Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. – K.: KNUBA, 2023. – Vyp. 105. – S. 62-80.
https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.105

6. Vorontsov, O.V., Usenko V.H., Vorontsova I.V. Systematyzatsiia polinomialnykh kryvykh za vyhliadom funktsii zovnishnoho formoutvoriuiuchoho navantazhennia abo velychyny kintsevoi riznytsi / O.V. Vorontsov, V.H, Usenko, O.V. Vorontsova // Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. – K.: KNUBA, 2022. – Vyp. 103. – S. 23-37.
https://doi.org/10.32347/0131-579x.2022.103/23-27

7. Vorontsov, O.V., Usenko V.H., Vorontsova I.V. Velychyna kintsevoi riznytsi u formuvanni odnovymirnykh heometrychnykh obraziv predstavlenykh chyslovymy poslidovnostiamy elementarnykh funktsionalnykh zalezhnostei / O.V. Vorontsov, V.H, Usenko, O.V. Vorontsova // Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. – K.: KNUBA, 2022. – Vyp. 102. – S. 39-55.
https://doi.org/10.32347/0131-579X.2022.102.39-55