***Oleg Vorontsov**, PhD, Associate Professor,*
Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University,
Faculty of Architecture,
***Larisa Tulupova**, PhD, Associate Professor,*
Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University,
Faculty of Electromechanics

Recurrence formulae of a catenary in creation of geometric images

Abstract: In this article we have studied properties of the transition from classical equations to recurrence formulae of numerical sequences of some transcendent curves. The graph of a hyperbolic function was examined using a catenary as an example.

Keywords: discrete geometric design, recurrence formulae, numerical sequences, transcendental curves, catenary.

***Олег Воронцов**, Полтавський національний технічний університет*
імені Юрія Кондратюка, кандидат технічних наук,
архітектурний факультет,
***Лариса Тулупова**, Полтавський національний технічний університет*
імені Юрія Кондратюка, канд. фіз.-мат. наук,
електромеханічний факультет

Рекурентні формули ланцюгової лінії у формуванні геометричних образів

Анотація: У даній роботі проведено дослідження властивостей переходу від замкненої до рекурентної форми задання числових послідовностей трансцендентних кривих. Досліджено графік гіперболічної функції на прикладі ланцюгової лінії.

Ключові слова: дискретне геометричне моделювання, рекурентні формули, числові послідовності, трансцендентні криві, ланцюгова лінія.

Постановка проблеми. В сучасних умовах при проектуванні споруд, мереж, виробів значне місце займає етап побудови та аналізу геометричних моделей об’єктів, процесів та певних явищ. Важливою проблемою є створення нових способів конструювання ліній і поверхонь, що у повній мірі відповідають меті автоматизованого проектування і відтворення. Розвиток і удосконалення математичних моделей у процесі конструювання значно сприятиме підвищенню продуктивності та ефективності праці на етапі проектування і наукових досліджень.

У практиці проектування об’єктів складної форми широко розповсюджені задачі переходу від дискретної інформації до неперервної, що розв’язуються різними методами апроксимації та інтерполяції, і задачі зворотного переходу – від неперервної інформації про поверхню до дискретної. Використання математичного апарату числових послідовностей [1] дозволяє переходити до неперервних аналогів сформованих дискретних моделей і навпаки; розв’язувати ряд задач дискретного геометричного моделювання зрівноважених образів без розв’язання громіздких систем лінійних рівнянь, що у свою чергу дозволяє забезпечити економію обчислювальних ресурсів. Тому подальші дослідження рекурентних формул числових послідовностей як аналогів аналітичних залежностей та їх застосування у поєднанні з класичним методом скінчених різниць і статико-геометричним методом [2] є актуальним.

Аналіз останніх досліджень. Питання дослідження властивостей та узагальнення переходу від неперервних залежностей класів елементарних функцій до рекурентних формул задання дискретних числових послідовностей шляхом заміни неперервних параметрів дискретними, розглянуті у статтях авторів даної роботи [3, 4, 5]. У цих же статтях зроблені посилання на роботи інших авторів, присвячені питанням аналізу рекурентних формул числових послідовностей для дискретного моделювання і формування геометричних образів, що показали нові можливості дискретного геометричного моделювання.

Постановка завдання. Мета даної роботи полягає у вивченні властивостей заміни неперервних залежностей трансцендентних кривих, а саме гіперболічних функцій рекурентними формулами задання дискретних числових послідовностей із подальшим вивченням можливостей їх використання для формування геометричних образів.

Виклад основного змісту дослідження. У групі трансцендентних кривих особливе місце для дискретного геометричного моделювання об’єктів посідає ланцюгова лінія (як і у групі алгебраїчних кривих – парабола).

Ланцюговою лінією називається плоска крива, форма якої відповідає однорідній гнучкій нерозтяжній важкій нитці, закріпленій в обох кінцях і, що

Рисунок 1

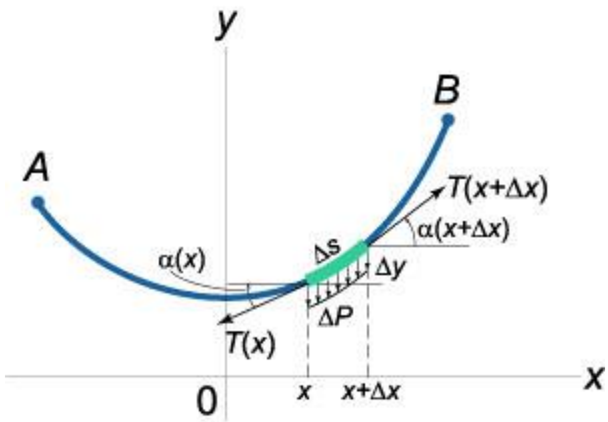

Рисунок 2

провисає під дією сили тяжіння. Ланцюгова лінія за формою нагадує параболу (рис. 1, 2), але її рівняння містить гіперболічний косинус:

$$y = a \times ch\frac{x}{a} \tag{1}$$

Її форма однозначно визначається параметром ***a***, залежність від якого показана на рисунку 3.

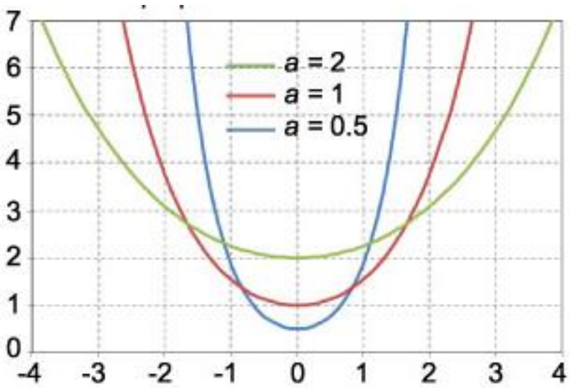

Рисунок 3

Рисунок 4

Ланцюгові лінії часто зустрічаються в природі і техніці. Так, наприклад, прямокутне вітрило під натиском вітру набуває форму, яка в профілі близька до ланцюгової лінії.

В архітектурі та будівництві арки у формі перевернутої ланцюгової лінії (такі як арка Сааринена в Сент-Луісі, показана на рисунку 4) мають високу стійкість завдяки тому, що внутрішні сили стискування ідеально компенсуються і не викликають прогину.

Ланцюгова лінія має ще одну цікаву властивість. При обертанні ланцюгової лінії навколо осі ***Ox*** утворюється поверхня, яка називається катеноїдом. Катеноїд є мінімальною поверхнею, тобто будь-яка її ділянка буде за площею менше, ніж всяка інша поверхня, що обмежена тим самим контуром. Зокрема, мильна плівка між двома колами, прагнучи мінімізувати вільну енергію, набуває форми катеноїда.

Розглянемо процес переходу від замкненої форми опису ланцюгової лінії (1) до рекурентної залежності.

При заміні аргументу x на дискретний параметр i у рівнянні ланцюгової лінії (1), одержимо:

$$y_i = a \times ch\frac{i}{a} . \tag{2}$$

Звідси:

$$i = a \times arch\frac{y_i}{a}$$

Звільняючись від дискретного параметра i одержимо для суміжних вузлів:

$$y_{i+1} = a \times ch\frac{i+1}{a} \Rightarrow y_{i+1} = a \times ch(\frac{i}{a} + \frac{i}{a}) =$$

$$= a\left\{ch\frac{i}{a} \times ch\frac{1}{a} + sh\frac{i}{a} \times sh\frac{1}{a}\right\} = a \times ch\frac{i}{a} \times ch\frac{1}{a} + a \times sh\frac{i}{a} \times sh\frac{1}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i \times ch\frac{1}{a} + a \times sh\frac{1}{a}\sqrt{ch^2\frac{i}{a} - 1} =$$

$$= y_i \times ch\frac{1}{a} + a \times sh\frac{1}{a}\sqrt{\frac{y_i^2}{a} - 1} \Rightarrow y_{i+1} = y_i \times ch\frac{1}{a} + \sqrt{y_i^2 - a^2} \times sh\frac{1}{a} \tag{3}$$

І далі відповідно:

$$y_{i+2} = a \times ch\frac{i+2}{a} = a \times ch(\frac{i}{a} + \frac{i}{a}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{i+2} = y_i \times ch\frac{2}{a} + \sqrt{y_i^2 - a^2} \times sh\frac{2}{a} .$$

$$y_{i+k} = y_i \times ch\frac{k}{a} + \sqrt{y_i^2 - a^2} \times sh\frac{k}{a}$$

$$y_{i-k} = a \times ch\frac{i-k}{a} = a(ch\frac{i}{a} \times ch\frac{k}{a} - sh\frac{i}{a} \times sh\frac{i}{a}) =$$
$$= y_i \times ch\frac{k}{a} + \sqrt{y_i^{\,2} - a^2} \times sh\frac{k}{a}$$

Аналогічно до формули (3) для виразу y_{i+2} одержимо:

$$y_{i+2} = (y_i \times ch\frac{1}{a} + \sqrt{y_i^2 - a^2} \times sh\frac{1}{a}) \times ch\frac{1}{a} +$$
$$+ sh\frac{1}{a} \times \sqrt{(y_i \times ch\frac{1}{a} + \sqrt{y_i^2 - a^2} \times sh\frac{1}{a})^2 - a^2} =$$
$$= y_i \times ch^2\frac{1}{a} + \sqrt{y_i^2 - a^2} \times \frac{1}{2} \times sh\frac{2}{a} + sh\frac{1}{a} \times$$
$$\times \sqrt{y_i^2 \times ch^2\frac{1}{a} + (y_i^2 - a^2) \times sh^2\frac{1}{a} + 2y_i \times ch\frac{1}{a} \times sh\frac{1}{a}\sqrt{y_i^2 - a^2} - a^2} =$$
$$= y_i \times ch^2\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\sqrt{y_i^2 - a^2} \times sh\frac{2}{a} +$$
$$+ sh\frac{1}{a} \times \sqrt{y_i^2 \times ch\frac{2}{a} - a^2 \times sh^2\frac{1}{a} + y_i \times sh\frac{2}{a} \times \sqrt{y_i^2 - a^2} - a^2} =$$
$$= y_i \times ch^2\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\sqrt{y_i^2 - a^2} \times sh\frac{2}{a} +$$
$$+ sh\frac{1}{a} \times \sqrt{y_i^2 \times ch\frac{2}{a} - a^2 \times ch\frac{1}{a} \times sh^2\frac{1}{a} + y_i \times \sqrt{y_i^2 - a^2} \times sh\frac{2}{a}}$$

Також за аналогією до формули (3) можна записати:

$$y_{i-1} = y_i \times ch\frac{1}{a} - \sqrt{y_i^2 - a^2} \times sh\frac{1}{a}\ . \tag{4}$$

Віднявши (4) від (3) одержимо ще одну рекурентну формулу послідовності:

$$y_{i+1} - y_{i-1} = 2\sqrt{y_i^2 - a^2} \times sh\frac{1}{a} \Rightarrow y_{i+1} = 2 \times sh\frac{1}{a}\sqrt{y_i^2 - a^2} + y_{i-1}. \tag{5}$$

Додавши (4) до (3), одержимо наступну рекурентну формулу послідовності:

$$y_{i+1} + y_{i-1} = 2y_i \times ch\frac{1}{a} \Rightarrow y_{i+1} = 2y_i \times ch\frac{1}{a} - y_{i-1}. \tag{6}$$

За аналогією до формули (6) можна записати:

$$y_i = 2y_{i-1} \times ch\frac{1}{a} - y_{i-2}. \quad (7)$$

Віднявши (7) від (6) одержимо:

$$y_{i+1} - y_i = 2 \times ch\frac{1}{a}(y_i - y_{i-1}) - y_{i-1} + y_{i-2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i(2 \times ch\frac{1}{a} + 1) - y_{i-1}(2 \times ch\frac{1}{a} + 1) + y_{i-2} \quad (8)$$

Або:

$$y_{i+1} = (y_i - y_{i-1})(2 \times ch\frac{1}{a} + 1) + y_{i-2}. \quad .... \quad (9)$$

Як приклад перевіримо вірність одержаної рекурентної формули (9) для числової послідовності (2), ряд значень якої наведений у таблиці 1.

Таблиця 1

Значення числової послідовності $y_i = a \times ch\frac{i}{a}$

i	0	1	2	3	4
ch i	1	1,54	3,76	10,07	27,31

Якщо $y_i = 3,76$ та $a = 1$, то

$$y_{i+1} = (y_i - y_{i-1})(2 \times ch\frac{1}{a} + 1) + y_{i-2} =$$
$$= (3,76 - 1,54)(2 \times 1,54 + 1) + 1 = 10,0576.$$

Тобто $10,0576 \approx 10,07$.

Висновок. Гіперболічні функції можуть бути представлені різними рекурентними формулами нескінчених числових послідовностей, які є дискретними моделями одновимірних геометричних образів із заданою кількістю вузлів. Подальші дослідження будуть спрямовані на вивчення можливостей використання одержаних рекурентних аналогів ланцюгової лінії для формування геометричних образів.

Список літератури:

1. Пустюльга С.І. Дискретне визначення геометричних об'єктів числовими послідовностями: дис. … доктора техн. наук: 05.01.01 / С.І. Пустюльга. – К., 2006. – 322 с.
2. Ковалев С.Н. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций: дис. … доктора техн. наук: 05.01.01 / С.Н. Ковалев. – М., 1986. –348 с.
3. Воронцов О.В. Рекурентні аналоги класів елементарних функцій / О.В. Воронцов, Г.О. Радченко // Прикладна геометрія та інженерна графіка.— К.: КНУБА, 2010. — Вип. 83. — С. 136–139.
4. Воронцов О.В. Заміна неперервних форм елементарних функціональних залежностей рекурентними формулами задання дискретних числових послідовностей / О.В. Воронцов // Геометричне та комп'ютерне моделювання: Збірник наук. праць. — Харків: ХДУХТ, 2010. — Вип. 27. – С. 57–62.
5. Воронцов О.В. Дослідження рекурентних форм представлення елементарних функціональних залежностей / О.В. Воронцов, Г.О. Радченко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. — К.: КНУБА, 2011. — Вип. 87.— С. 98–101.