УДК. 514.18

Воронцов О.В., к.т.н., доцент
Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка
Воронцова І.В., к.пед.н.
Полтавський нафтовий геологорозвідувальний технікум Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка

ДИСКРЕТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБРАЗІВ ОБ'ЄКТІВ ПРОЕКТУВАННЯ СУПЕРПОЗИЦІЯМИ ОДНОВИМІРНИХ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ З УРАХУВАННЯМ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Запропоновано новий спосіб дискретного моделювання об'єктів проектування на основі геометричного апарату суперпозицій, що дозволяє одержувати формули, які зв'язують значення скінченного ряду довільних членів послідовностей за довільними вихідними даними (координатами несуміжних членів даних послідовностей) за рахунок варіювання величинами коефіцієнтів суперпозиції та вибору функції розподілу зовнішнього навантаження. Досліджено дискретні аналоги поліноміальних функціональних залежностей, сформованих суперпозиціями точкових множин з урахуванням зовнішнього навантаження.

Ключові слова: *дискретне моделювання, дискретні аналоги, рекурентні формули, числові послідовності, функціональне навантаження, геометричний апарат суперпозицій.*

УДК. 514.18

Воронцов О.В., к.т.н., доцент
Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка
Воронцова И.В., к.пед.н.
Полтавский нефтяной геологоразведывательный техникум Полтавского национального технического университета имени Юрия Кондратюка

ДИСКРЕТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ ОБЪЕКТОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СУПЕРПОЗИЦИЯМИ ОДНОМЕРНЫХ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С УЧЕТОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Предложен новый способ дискретного моделирования объектов проектирования на основе геометрического аппарата суперпозиций, который позволяет получать формулы, связывающие значения конечного ряда произвольных членов последовательностей с произвольными исходными данными (координатами несмежных членов данных последовательностей) за счёт варьирования величин коэффициентов суперпозиции и выбора функции распределения внешней нагрузки. Исследованы дискретные аналоги полиномиальных функциональных зависимостей, сформированных суперпозициями точечных множеств с учётом внешней нагрузки.

Ключевые слова: *дискретное моделирование, дискретные аналоги, рекуррентные формулы, числовые последовательности, функциональная нагрузка, геометрический аппарат суперпозиций.*

UDK. 514.18

Vorontsov Oleg, PhD, Associate Professor,
Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University
Vorontsova Irina, PhD
Poltava Petroleum Geological College of PoltavaNational Technical Yuri Kondratyuk University

DISCRETE MODELING OF GEOMETRIC IMAGES OF DESIGNING OBJECTS WITH SUPERPOSITIONS OF ONE-DIMENSIONAL NUMERICAL SEQUENCE INCLUDING FUNCTIONAL LOAD

Designing the systems of automated engineering and preproduction is impossible without mathematical modeling of facilities and production processes. Except mathematical description geometric modeling gives a visual representation of the object or process. One of the most complex processes of geometrical modeling is the design and restoration of surfaces with complex forms that must meet a number of specified criteria. Modeling of such surfaces is an up-to-date problem in many construction and engineering industries such as aircraft building, machine building, hydraulic machinery construction and shipbuilding.

Discrete representation of any engineering object or process has significant advantages over the continuous one. It is the only possible representation in some practical problems.

As a kind of mathematical modeling, discrete geometric modeling sets the same goals and objectives. It is based on mathematical methods and uses mathematical symbols. However, the geometrical model always has a property of visualization and could be reflected graphically.

The classical method of finite differences, static-geometrical method, mathematical apparatus of numerical sequences and geometrical apparatus of superpositions give different representations of the same mathematical apparatus. Each of the methods has its advantages and disadvantages to solve specific problems.

The geometrical apparatus of superpositions allows to obtain formulas linking values of finite series of constant terms sequences from initial data (coordinates of nonadjacent terms of given sequences). It is possible due to the variation of coefficient values of superposition and the choice of the distribution function of the external load. Thus it significantly saves computational resource.

Control the form of discrete represented curve (DRC) in the static-geometrical method can be carried out not only with varying of functional external load, but also with coefficients in computing stencil which are the basis for making up the finite-difference equations of forming the DRC and show an partial participation of adjacent nodes in the formation of required result.

The article determines the influence of superposition coefficients as adjacent as arbitrary nodes of numerical sequences on the formation of discrete analogues of polynomial functional dependencies.

This article does research to determine the discrete analogues of geometrical images of designing objects in the form of one-dimensional numerical sequences including functional load from initial data based on geometrical apparatus of superpositions.

The discrete analogs of polynomial functional dependencies formed with superpositions of point sets including external load. have been studied.

***Keywords**: discrete modeling, discrete analogs, recurrent formulas, numerical sequences, functional load, geometrical apparatus of superpositions.*

Вступ. У XVII столітті шотландський математик Дж. Грегорі довів, що теоретична вісь арки дзеркально відповідає формі нитки, закріпленої в п'ятах арки. Ця властивість дозволяє використовувати форму провисаючої нитки для конструкцій, що працюють як на стискування, так і на розтягування. Урахування статичних особливостей конструкції дає можливість здійснювати пошук форми, яка відповідає мінімуму виникаючих у ній небажаних напруг та їх концентрацій і, отже, веде до економії будівельних матеріалів, що витрачаються для забезпечення додаткової жорсткості й опірності різним навантаженням.

Модель кривої лінії значно простіше піддається всебічним дослідженням, ніж модель поверхні. Слід очікувати, що ряд властивостей, які має дискретна модель лінії, може бути перенесений на модель поверхні, що формується за тими ж законами, якщо цю лінію розглядати як складову каркаса поверхні. Інші властивості дискретної моделі поверхні можуть бути одержані в результаті узагальнення відповідних властивостей моделі лінії.

Провисаюча нитка, рівномірно навантажена по довжині, приймає форму ланцюгової лінії, а при розподіленні рівномірного навантаження вздовж горизонтальної осі – форму параболи. При зміні графіка навантаження нитки з'являється можливість управління її формою, що відповідає одному із принципів статико-геометричного способу конструювання кривих ліній і обводів [1]. Аналітично рівняння кривої одержують подвійним інтегруванням диференціального рівняння рівноваги нерозтяжної гнучкої нитки.

Інше ідеалізоване трактування нитки як абсолютно розтяжної дозволяє аналітично просто описати її форму в дискретному вигляді.

Аналіз останніх джерел досліджень і публікацій. Із робіт [1, 2] відомо, що форма континуального аналога дискретно представленої кривої безпосередньо залежить від характеру функціонально заданого управляючого навантаження, яке формує дискретно представлену криву (ДПК).

Окремі аспекти зв'язку між статико-геометричним способом формування дискретних каркасів поверхонь і аналітичним описом неперервної поверхні розкрито в публікаціях [2, 3], де показано такий зв'язок через синтез статико-геометричного способу формування дискретних каркасів поверхонь і способу моделювання їх каркасів двовимірними числовими послідовностями. Також окремі питання визначення відповідності рівнянь неперервної поверхні дискретній функції розподілу зовнішнього навантаження розглянуто у роботі [4].

У процесі створення методик дискретного моделювання геометричних образів проектування об'єктів машинобудування, будівництва й архітектури поширеними є задачі переходу від дискретної інформації до неперервної, що розв'язуються методами інтерполяції, а також зворотні задачі переходу від неперервної інформації про геометричний образ до дискретної. Одним із перспективних напрямів розв'язання зазначених проблем є широке застосування методів дискретного геометричного моделювання, що дозволяють істотно спростити алгоритми і програми та забезпечити економію обчислювальних ресурсів. Дискретне геометричне моделювання є найбільш перспективним напрямом розвитку прикладної геометрії в сучасний період, який умовно можна поділити на дослідження з дискретизації неперервних геометричних образів та формоутворення за дискретними вихідними даними [5, 6, 7].

Виділення не розв'язаних раніше частин загальної проблеми. Залучення математичного апарату числових послідовностей [2] дозволяє одержувати рекурентні формули, що зв'язують значення скінченного ряду сусідніх членів послідовності та будуть дискретними аналогами різних функціональних залежностей, якими описуються певні явища, процеси й об'єкти. Такі формули у правій частині повинні мати коефіцієнти, число котрих дорівнює числу параметрів функції і які одержуються з неперервних аналітичних залежностей, а також передбачають наявність вихідних даних у вигляді координат обов'язково суміжних членів відповідних послідовностей. Для визначення координат шуканих вузлів необхідно послідовно обчислювати координати попередніх.

Геометричний апарат суперпозицій дозволяє одержувати формули, що пов'язують значення скінченного ряду довільних членів послідовностей за довільними вихідними даними (координатами несуміжних членів цих послідовностей), і тим самим значно економити обчислювальні ресурси.

У роботах [8, 9, 10] досліджено питання методики дискретного представлення ряду аналітичних функціональних залежностей у вигляді числових послідовностей суперпозиціями одновимірних точкових множин. Були одержані формули для визначення величин коефіцієнтів суперпозиції двох довільних вузлових точок і початку системи координат, за якими обчислюються координати довільних вузлових точок цих числових послідовностей.

Актуальними є дослідження методики дискретної інтерполяції числовими послідовностями функціональних залежностей, що описують конкретні явища, об'єкти і процеси на основі геометричного апарату суперпозицій.

Постановка завдання. Мета роботи полягає у визначенні дискретних аналогів поліноміальних функціональних залежностей, сформованих суперпозиціями точкових множин з урахуванням зовнішнього навантаження за довільними вихідними даними.

Основний матеріал і результати. Нехай задано диференціальне рівняння кривої лінії $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2$ на інтервалі $-2 \le x \le 2$; задані також координати початкової і кінцевої точок дуги кривої (крайові умови) :

$x_A = -2$, $y_A = 8$, $x_E = 2$ $y_E = 8$ (рис.1).

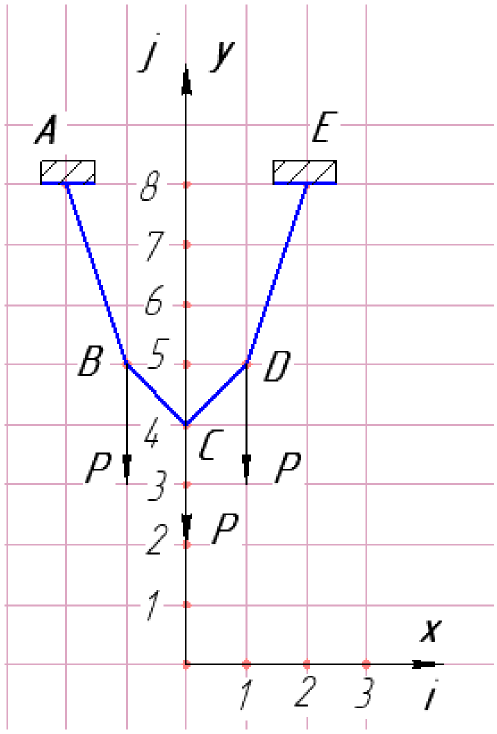


Рисунок 1 – Дискретно представлена крива $y = x^2 + 4$

Визначимо ординати дискретного ряду її точок з рівномірним кроком ($h = 1$) уздовж осі Ox .

Диференціальне рівняння кривої замінимо центральною скінченною різницею

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \approx \frac{\delta^2 y_i}{h^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \; ; \; y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} \qquad (1)$$

Складемо різницеві рівняння (1) для всіх невідомих точок дискретного ряду на інтервалі $-2 \le x \le 2$:

$$\begin{aligned} &y_A - 2y_B + y_C = 2; \\ &y_B - 2y_C + y_D = 2; \\ &y_C - 2y_D + y_E = 2. \end{aligned} \qquad (2)$$

У систему (2) підставляємо значення координат заданих точок A і E (крайові умови) :

$$\begin{aligned} &8 - 2y_B + y_C = 2; \\ &y_B - 2y_C + y_D = 2; \\ &y_C - 2y_D + 8 = 2. \end{aligned} \qquad (3)$$

Розв'язання системи (3) дає такий результат: $y_B = 5$; $y_C = 4$; $y_D = 5$. Знайдені точки належать параболі $y = x^2 + 4$.

Дискретно представлену на рисунку 1 криву можна розглядати як модель нерозтяжної натягнутої нитки, на яку з рівномірним кроком $h=1$ діють зосереджені зусилля P_i . Система рівнянь (4) рівноваги вузлів із заданими крайовими умовами (координатами вузлів A і E) визначає форму ламаної, котра є дискретною моделлю кривої при заданому зовнішньому навантаженні.

$$\begin{cases} x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1} + KP_{i,x} = 0 \\ y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + KP_{i,y} = 0 \end{cases} , \qquad (4)$$

де i – номер вузла; x_i , y_i – координати i-го вузла; $P_{i,x}$, $P_{i,y}$ – координатні складові зовнішнього зусилля; K – коефіцієнт пропорційності.

Рівняння (4) тотожні рівнянню (1) і надають йому статичне трактування. Варіювання функції $P_i = f(i)$ розподілу зовнішнього навантаження між вузлами дозволяє дискретно моделювати криві різної форми та розв'язувати завдання дискретної інтерполяції на площині.

При рівномірному кроці вузлів уздовж осі O_x досить скласти для кожного невідомого вузла тільки друге рівняння системи (4)

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + KP_{i,y} = 0 \; . \qquad (5)$$

Якщо необхідно побудувати дискретну модель натягнутої нитки під навантаженням $KP_i = -2$, яке закріплене у вузлах A($x_A=-2$; $y_A=8$) і B($x_E=2$; $y_E=8$) з рівномірним кроком $h = 1$ уздовж осі Ox , слід скласти та розв'язати систему рівнянь (5) для всіх невідомих вузлів моделі (рис. 1)

$$\begin{cases} y_A - 2y_B + y_C + KP_B = 0 \\ y_B - 2y_C + y_D + KP_C = 0 \\ y_C - 2y_D + y_E + KP_D = 0. \end{cases} \tag{6}$$

При $KP = KP_B = KP_C = KP_D = -2$, $y_A = 8,\ y_E = 8$ розв’язання цієї системи дає результат: $y_B = 5;\ y_C = 4;\ y_D = 5$.

Інше диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = -0,5 \tag{7}$$

задає сімейство прямих $y = -0,5x + C$, з якого, наприклад, за допомогою початкової умови $x_{A_{i-2}} = -3$, $y_{A_{i-2}} = 1,5$ (рис. 2) виділяємо пряму

$$y = -0,5x\ .$$

Скінченнорізницева апроксимація диференціального рівняння (7) матиме вигляд

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\Delta y_i}{h} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\ ;\ \ \Delta y_i = y_i - y_{i-1}\ . \tag{8}$$

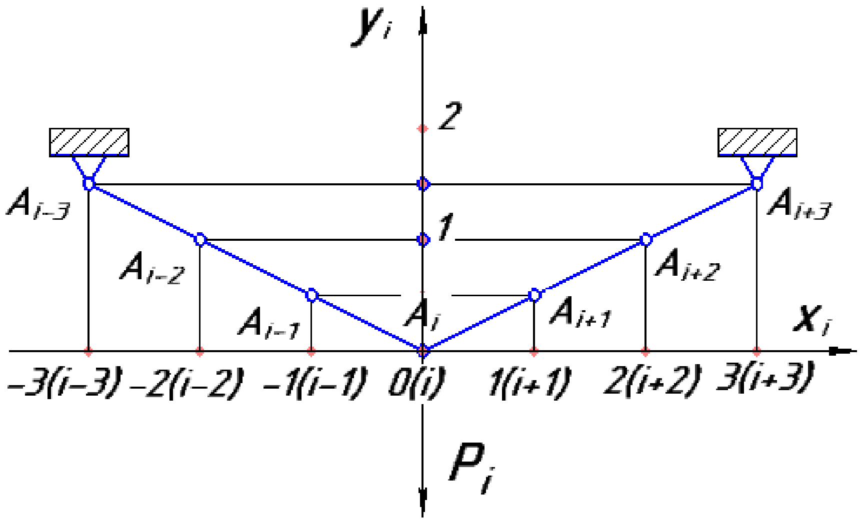


Рисунок 2 – Дискретна модель прямих $y = -0,5x$ та $y = 0,5x$ у формі нерозтяжної натягнутої нитки

Складемо різницеві рівняння (8) для невідомих точок дискретного ряду на інтервалі $-3 \le x \le 0$ (рис. 2) :

$$\begin{cases} y_{i-2} - y_{i-1} = 0,5 \\ y_{i-3} - y_{i-2} = 0,5 \end{cases}. \tag{9}$$

У систему (9) підставляємо значення координат заданої точки $A_{i-3}(-3,\ 1,5)$:

$$\begin{cases} y_{i-2} - y_{i-1} = 0,5 \\ 1,5 - y_{i-2} = 0,5 \end{cases}. \tag{10}$$

Розв’язком системи (10) є $y_{i-1} = 0,5$; $y_{i-2} = 1$.

У роботі [1] сформульовану таку властивість: «Кожні три суміжні вузли розтягнутої нитки будуть належати прямій лінії, якщо до середнього з них не прикладене зовнішнє навантаження». Скінченнорізницева триточкова залежність матиме вигляді

$$y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i = 0 \ . \tag{11}$$

При двоточковій залежності скінченнорізницевий вираз можна подати у вигляді

$$KP_i = y_i - y_{i-1} \ , \tag{12}$$

де P_i − зовнішнє зусилля, прикладене до точки A_i ; K – коефіцієнт пропорційності.

Рівняння (12) тотожне рівнянню (11) і надає йому статичного трактування. Варіювання величиною P_i зовнішнього навантаження дозволяє дискретно моделювати будь-які прямі на площині (рис. 2). Вищезазначену властивість роботи [1] можна доповнити таким визначенням: «Кожні два суміжних вузли розтягнутої нитки належать лінії, що описується поліномом першого ступеня, якщо до незакріпленого вузла прикладене зовнішнє навантаження».

Варіювання функції розподілу зовнішнього навантаження $P_i = f(i)$ між вузлами дозволяє дискретно моделювати криві різної форми і розв’язувати задачі дискретної інтерполяції на площині [3].

Зв’язок чотирьох суміжних вузлів дискретної моделі розтягнутої нитки, із яких до двох середніх прикладені вільні вертикальні зусилля (рис. 3), описується поліномом другого ступеня (13)

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \tag{13}$$

або числовою послідовністю

$$y_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 \ . \tag{14}$$

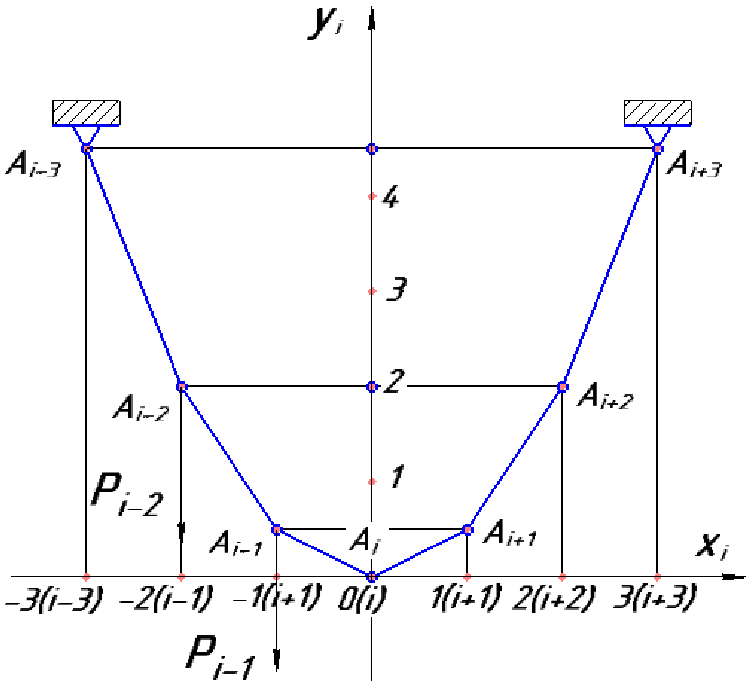


Рисунок 3 – Дискретна модель квадратної параболи $y = 0,5x^2$ у формі нерозтяжної натягнутої нитки

Ординати чотирьох суміжних вузлів нитки при такому навантаженні будуть пов’язані залежностями:

$$\begin{cases} y_{i-3} - 2y_{i-2} + y_{i-1} + KP_{i-2} = 0 \\ y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i + KP_{i-1} = 0 \\ KP_{i-1} = KP_{i-2}. \end{cases} \qquad (15)$$

Система (15) буде рівносильною системі

$$\begin{cases} y_{i-3} - 3y_{i-2} + 3y_{i-1} - y_i = 0 \\ y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i + KP_{i-1} = 0 \\ KP_{i-2} - KP_{i-1} = 0 \end{cases} \qquad (16)$$

й описуватиме дискретну множину точок числової послідовності (14).

П’ять суміжних вузлів дискретної моделі нерозтяжної натягнутої нитки, із яких до трьох середніх прикладене лінійно розподілене навантаження, пов’язані скінченно-різницевою залежністю, котру можемо записати у вигляді системи лінійних рівнянь виду

$$\begin{cases} y_{i-3} - 4y_{i-2} + 6y_{i-1} - 4y_i + y_{i+1} = 0 \\ y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i + KP_{i-1} = 0 \\ y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + KP_i = 0 \\ KP_{i-2} - 2KP_{i-1} - KP_i = 0 \end{cases}, \ (3 \le i \le n) \qquad (17)$$

і яка описує дискретну множину точок числової послідовності

$$y_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3 \ . \qquad (18)$$

У загальному випадку скінченнорізницева залежність між ординатами $n+1$ суміжних вузлів може бути записана за допомогою рекурентної формули n-ї різниці

$$\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i \ .$$

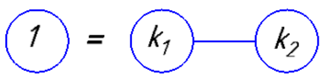
У роботі [2] зазначено, що управління формою ДПК у статико-геометричному методі можна здійснювати не тільки за рахунок варіювання функціонального зовнішнього навантаження, а й за рахунок коефіцієнтів в обчислювальних шаблонах, які є основою для складання систем скінченнорізницевих рівнянь формування ДПК і показують часткову участь суміжних вузлів у формуванні шуканого.

За аналогією з вищезазначеним розглянемо вплив коефіцієнтів суперпозиції як суміжних, так і довільних вузлів числових послідовностей на формування дискретних аналогів поліноміальних функціональних залежностей.

У роботі [8] були визначені формули для обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції k_1, k_2 і рекурентна формула, що пов’язує значення скінченного ряду довільних членів послідовності першого порядку. Ця формула для суміжних членів такої послідовності запишеться у вигляді

$$y_i = k_1 y_{i-1} + k_2 y_{i+1} \qquad (19)$$

або у вигляді обчислювального шаблона



.

Ураховуючи одиничний крок по осі абсцис у формулах обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції

$$k_1 = \frac{p_2 - p}{p_2 - p_1} \ ; \ k_2 = \frac{p - p_1}{p_2 - p_1} \ ,$$

зможемо записати $p - \forall$ ($\forall$ – квантор загальності); $p_1 = p-1$; $p_2 = p+1$.

Тоді

$$k_1 = \frac{p+1-p}{p+1-(p-1)} = \frac{1}{2} \ ; \ k_2 = \frac{p-(p-1)}{p+1-(p-1)} = \frac{1}{2} \ .$$

Формула (19) матиме вигляд

$$y_i = 0{,}5y_{i-1} + 0{,}5y_{i+1} \ , \tag{20}$$

або у вигляді обчислювального шаблона

,

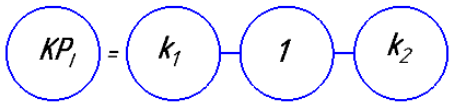
і буде тотожною скінченнорізницевій триточковій залежності

$$2y_i = 1y_{i-1} + 1y_{i+1} \ ,$$

тому функція розподілу зовнішнього навантаження для формування дискретного аналогу поліному 2-го ступеня на основі суперпозицій заданих вузлових точок має вигляд

$$KP_i = y_i - k_1 y_{i-1} - k_2 y_{i+1} \ ,$$

або у вигляді обчислювального шаблона:



За умови, що $k_1 + k_2 = 1$,

$$KP_i = y_i - k_1 y_{i-1} - (1 - k_1) y_{i+1} \ ;$$

$$k_1 (y_{i-1} - y_{i+1}) = y_i - y_{i+1} - KP \ .$$

Звідси за відомої величини зовнішнього навантаження, можуть бути визначені величини коефіцієнтів суперпозиції за формулами:

$$k_1 = \frac{y_i - y_{i+1} - KP_i}{y_{i-1} - y_{i+1}} \ ;$$

$$k_2 = 1 - k_1 \ ,$$

або

$$KP_i = y_i - y_{i+1} - k_1 (y_{i-1} - y_{i+1}) \ .$$

Властивість. Координати будь-якої точки числової послідовності ***n***-го порядку можна визначити як суперпозицію координат двох довільних точок цієї послідовності за відомої величини зовнішнього функціонального навантаження.

Для послідовності другого порядку при рівномірно розподіленому навантаженні зможемо записати

$$\begin{cases} 2y_i - y_{i-1} - y_{i+1} + KP_i = 0 \\ y_i - k_1 y_{i-1} - k_2 y_{i+1} + KP_i = 0 \\ k_1 + k_2 = 1 \end{cases} . \tag{21}$$

Для послідовності другого порядку при рівномірно розподіленому навантаженні, довільному значенні y_{i+p} та за умови введення позначень:

$$p - \forall \; ; \; p_1 = p-1 \; ; \; p_2 = p+1 \; ; \; \ldots \; p_s = p+s-1 \; , \quad s \in N, \; s > 1$$

система (21) може бути записана у вигляді

$$\begin{cases} 2y_{i+p} - y_{i+(p-1)} - y_{i+(p+1)} + KP_i = 0 \\ y_{i+p} - k_1 y_{i+(p-1)} - k_2 y_{i+(p+1)} + KP_i = 0 \\ k_1 + k_2 = 1 \end{cases} . \tag{22}$$

Із системи рівнянь (22) одержимо вирази, що визначають взаємозв'язок коефіцієнтів суперпозиції та величини рівномірно розподіленого навантаження:

$$k_1 = \frac{KP_{i+p} + y_{i+p} - y_{i+(p+1)}}{y_{i+(p-1)} - y_{i+(p+1)}} \; ; \; k_2 = \frac{KP_{i+p} + y_{i+p} - y_{i+(p-1)}}{y_{i+(p+1)} - y_{i+(p-1)}} \; ;$$

$$KP_{i+p} = k_1 (y_{i+(p-1)} - y_{i+(p+1)}) + y_{i+(p+1)} - y_{i+p} \; ;$$

$$KP_{i+p} = k_2 (y_{i+(p+1)} - y_{i+(p-1)}) + y_{i+(p-1)} - y_{i+p} \; .$$

Для довільних значень p , p_1 , p_2 взаємозв'язок між коефіцієнтами суперпозиції й величиною рівномірно розподіленого навантаження може бути визначений із системи рівнянь

$$\begin{cases} KP_{i+p} = y_{i+p} - k_1 y_{i+p_1} - k_2 y_{i+p_2} \\ k_1 + k_2 = 1 \end{cases} , \tag{23}$$

або

$$\begin{cases} k_1 y_{i+p_1} + k_2 y_{i+p_2} = y_{i+p} - KP_{i+p} \\ k_1 + k_2 = 1 \end{cases} .$$

Система (23) містить два рівняння та три невідомих – KP_{i+p} , k_1 і k_2 , тому вона має безліч розв'язків із двома базисними невідомими й однією вільною. Наприклад, вільною може виступати KP_{i+p} .

Вирази, що визначають взаємозв'язок коефіцієнтів суперпозиції та величини рівномірно розподіленого навантаження, матимуть вигляд:

$$k_1 = \frac{KP_{i+p} - y_{i+p} + y_{i+p_2}}{y_{i+p_2} - y_{i+p_1}} \; ; \; k_2 = \frac{KP_{i+p} - y_{i+p} + y_{i+p_1}}{y_{i+p_1} - y_{i+p_2}} \; ; \tag{24}$$

$$\begin{aligned} KP_{i+p} &= k_1 (y_{i+p_2} - y_{i+p_1}) + y_{i+p} - y_{i+p_2}; \\ KP_{i+p} &= k_2 (y_{i+p_1} - y_{i+p_2}) + y_{i+p} - y_{i+p_1}. \end{aligned} \tag{25}$$

Звідси довільне значення y_{i+p} обчислимо за формулами:

$$y_{i+p} = KP_{i+p} - k_1(y_{i+p_2} - y_{i+p_1}) + y_{i+p_2};$$
$$y_{i+p} = KP_{i+p} - k_2(y_{i+p_1} - y_{i+p_2}) + y_{i+p_1}. \qquad (26)$$

Розглянемо процес дискретного формування одновимірних геометричних образів суперпозиціями точкових множин із заданими крайовими умовами і зовнішнім функціональним навантаженням на такому прикладі.

Для числової послідовності, представленої на рисунку 4, що є дискретним аналогом полінома 2-го ступеня $y = 0,5x^2$, функція розподілу зовнішнього рівномірного навантаження на основі суперпозицій заданих суміжних вузлових точок має вигляд

$$KP_i = y_i - k_1 y_{i-1} - k_2 y_{i+1} .$$

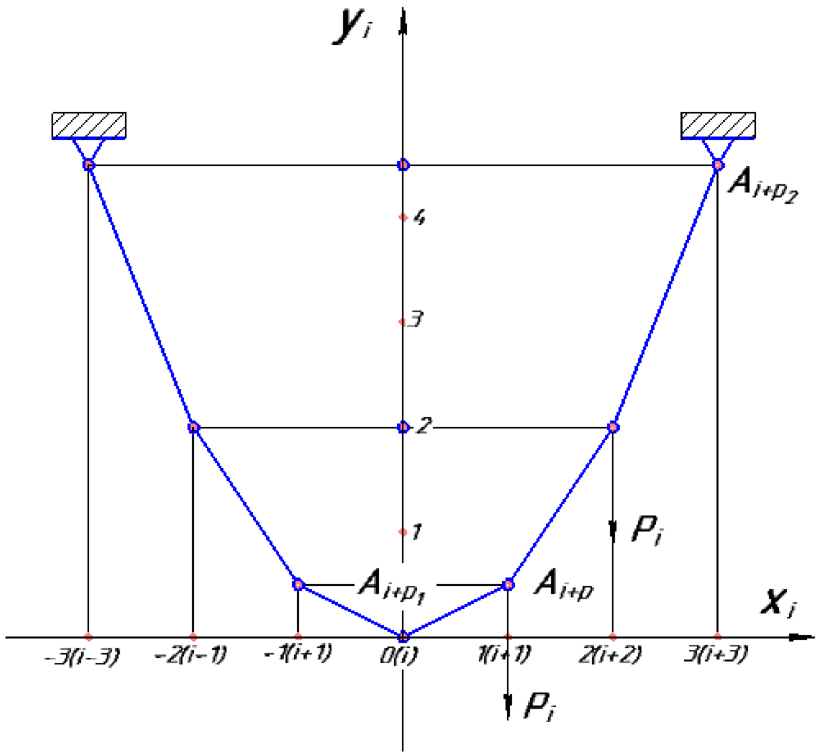


Рисунок 4 – Дискретна модель числової послідовності $y_i = 0,5i^2$

Звідси

$$KP_i = 0 - 0,5 \times 0,5 - 0,5 \times 0,5 = -1 .$$

Візьмемо початкові (крайові) умови: $i=0$, $p=1$, $p_1=0$, $p_2=3$, $y_{i+p}=0,5$, $y_{i+p1}=0$, $y_{i+p2}=4,5$, $KP_{i+p}=-1$.

За формулами (25):

$$-1 = k_1(4,5 - 0) + 0,5 - 4,5 = 4,5k_1 - 4 \Rightarrow k_1 = 0,6667 ,$$
$$-1 = k_2(0 - 4,5) + 0,5 - 0 = -4,5k_2 + 0,5 \Rightarrow k_2 = 0,3333$$

або за формулами (24):

$$k_1 = \frac{-1-0,5+4,5}{4,5-0} = \frac{3}{4,5} = 0,6667 \;;$$

$$k_2 = \frac{-1-0,5+0}{0-4,5} = \frac{-1,5}{-4,5} = 0,3333$$

Перевірка.

При підстановці в перше рівняння системи (25) одержимо

$$0,5 = -1-0,6667(4,5-0)+4,5 = -1-3,00015+4,5 = 0,5 \;.$$

Висновки. Для дискретного моделювання геометричних образів, що можуть бути представлені поліноміальними аналітичними залежностями, може бути застосований геометричний апарат суперпозицій одновимірних точкових множин, що дозволяє визначати координати довільних вузлів дискретного образу за довільними вихідними даними за умови заданої функції розподілу зовнішнього навантаження.

Література

1. Ковалев С.Н. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций: дис. д-ра техн. наук: 05.01.01 / Ковалев Сергей Николаевич. − М., 1986. – 348 с.

2. Пустюльга С.І. Дискретне визначення геометричних об'єктів числовими послідовностями: дис. ... доктора техн. наук: 05.01.01 / С.І. Пустюльга. – К., 2006. – 322 с.

3. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Спеціальні розділи. Випуск 1. Ковальов С.М., Гумен М.С., Пустюльга С.І., Михайленко В.Є., Бурчак І.Н. – Луцьк.: Редакційно-видавничий відділ ЛДТУ, 2006. – С. 142 – 144.

4. Ковальов С.М. Систематизація поверхонь, яким належать вузли дискретних сіток при рівномірному навантаженні / Ковальов С.М., Золотова А.В. // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2009. – Вип. 81. – С. 15 – 19.

5. Coons S. Surfaces of Computer Aided Design of Space Forms. / Coons S. – Report MAC-TR-41, Project MAC, M.I.T., 1967. – 105 p.

6. Meek D. Constrained interpolation with rational cubics / Meek D., Ong B., Walton D. // Computer Aided Geometric Design, 2003. – Vol. 20, Issue 5. – P. 253 −275.

7. Dietz D. Interpolation with cubic spirals / Dietz D., Piper B. // Computer Aided Geometric Design, 2004. − Vol. 21, Issue 2. – P. 165 −180.

8. Воронцов О.В. Моделювання об'єктів будівництва та машинобудування довільними дискретними значеннями числових послідовностей / О.В. Воронцов // Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво) / Полтав. нац. техн. ун-т ім. Юрія Кондратюка. – Полтава: ПолтНТУ, 2013. – Вип. 4(39). – С. 25 – 35.

9. Воронцов О.В. Спеціальні геометричні моделі об'єктів машинобудування та будівництва / О.В. Воронцов // Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво) / Полтав. нац. техн. ун-т ім. Юрія Кондратюка. – Полтава: ПолтНТУ, 2014. – Вип. 2(30). – С. 10 – 15.

10. Воронцов О.В. Дискретное моделирование кривых поверхностей суперпозициями двумерных точечных множеств / О.В. Воронцов, Л.О. Тулупова // Сборник статей по материалам XL международной научно-практической конференции «Технические науки – от теории к практике». – Новосибирск, 2014. – №11 (36). – С. 7 – 16.