***Oleg Vorontsov**,*
Ph.D., Associate Professor,
Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University,
Faculty of Architecture,
***Larisa Tulupova**,*
Ph.D., Associate Professor,
Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University,
Faculty of Electromechanics

Superpositions of one-dimensional numerical sequences of hyperbolical functions in creation of geometrical images

Abstract: In the article we have studied discrete analogues of some geometric images of design objects. These analogues were obtained using one-dimensional numerical sequences of hyperbolic functions with arbitrary initial data and geometric apparatus of superpositions. A discrete analogue of the numerical sequence of hyperbolic cosine, which describes a catenary, was also investigated.

Keywords: discrete design, discrete analogues, recurrent formulae, numerical sequences, hyperbolic functions, geometric apparatus of superpositions.

Олег Воронцов,
Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка, кандидат технічних наук,
архітектурний факультет,
Лариса Тулупова,
Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка,
канд. фіз.-мат. наук, електромеханічний факультет

Суперпозиції одновимірних числових послідовностей гіперболічних функцій у формуванні геометричних образів

Анотація: Проведено дослідження з визначення дискретних аналогів геометричних образів об'єктів проектування одновимірними числовими послідовностями гіперболічних функцій за довільними вихідними даними на основі геометричного апарату суперпозицій. Визначено дискретний аналог числової послідовності гіперболічного косинуса, якою описується ланцюгова лінія.

Ключові слова: дискретне моделювання, дискретні аналоги, рекурентні формули, числові послідовності, гіперболічні функції, геометричний апарат суперпозицій.

Вступ. У процесі створення методик дискретного моделювання геометричних образів поширеними є задачі переходу від дискретної інформації до неперервної, що розв'язуються методами інтерполяції, а також зворотні задачі переходу від неперервної інформації про геометричний образ до дискретної. Залучення математичного апарату числових послідовностей [1, 2] дозволяє одержувати рекурентні формули, що зв'язують значення скінченого ряду сусідніх членів послідовності та будуть дискретними аналогами різних функціональних залежностей, якими описуються певні явища, процеси і об'єкти. Дані формули у правій частині повинні мати коефіцієнти, число яких дорівнює числу параметрів функції і, які одержуються із неперервних аналітичних залежностей, а також передбачають наявність вихідних даних у вигляді координат обов'язково суміжних членів відповідних послідовностей. Для визначення координат шуканих вузлів необхідно послідовно обчислювати координати попередніх.

Геометричний апарат суперпозицій дозволяє одержувати формули, що зв'язують значення скінченого ряду довільних членів послідовностей, що є дискретними аналогами неперервних функціональних залежностей, за довільними вихідними даними (координатами несуміжних членів даних послідовностей), і тим самим здійснювати прості переходи від неперервно заданого геометричного образу до дискретного і навпаки.

Огляд останніх джерел досліджень і публікацій. У роботах [3,4,5] авторів даної статті досліджено питання методики дискретного представлення ряду аналітичних функціональних залежностей у вигляді числових послідовностей суперпозиціями одновимірних точкових множин. Були одержані формули для визначення величин коефіцієнтів суперпозиції двох довільних вузлових точок і початку системи координат, за якими обчислюються координати довільних вузлових точок даних числових послідовностей.

Актуальними є дослідження методики дискретної інтерполяції числовими послідовностями функціональних залежностей, що описують конкретні явища, об'єкти і процеси на основі геометричного апарату суперпозицій.

Постановка завдання. Мета роботи полягає у визначенні формул загального вигляду, для обчислення координат довільних вузлових точок за трьома заданими, гіперболічних функціональних залежностей на прикладі ланцюгової лінії, що дозволить створювати методики дискретної інтерполяції числовими послідовностями трансцендентних функцій.

Основний матеріал і результати. Трансцендентні функціональні залежності мають багато важливих властивостей для практики моделювання певних явищ, процесів і об'єктів.

У групі трансцендентних кривих особливе місце для дискретного геометричного моделювання об'єктів посідає ланцюгова лінія (як і у групі алгебраїчних кривих – парабола).

Ланцюговою лінією називається плоска крива, форма якої відповідає однорідній гнучкій нерозтяжній важкій нитці, закріпленій в обох кінцях, і що провисає під дією сили тяжіння. Ланцюгова лінія за формою нагадує параболу, але вона описується гіперболічним косинусом:

$$y = a \cdot ch\frac{x}{a} \qquad (1)$$

При ***a=1***, замкнена форма числової послідовності даної трансцендентної функції матиме вигляд:

$$y_i = chi \qquad (2)$$

На основі доведеної у роботі [5] властивості 1, відповідно до якої координати будь-якої точки одновимірної множини точок є суперпозицією (3) координат трьох довільних точок даної множини, можна припустити, що координати будь-якої точки ланцюгової лінії будуть визначені як суперпозиція координат трьох довільних точок даної кривої.

$$\begin{cases} x_0 = k_1x_1 + k_2x_2 + (1 - k_1 - k_2)x_3 \\ y_0 = k_1y_1 + k_2y_2 + (1 - k_1 - k_2)y_3 \end{cases}. \qquad (3)$$

Виведемо загальні формули обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції трьох довільних точок $A_1(i+p_1;y_{i+p_1})$, $A_2(i+p_2;y_{i+p_2})$, $A_3(i+p_3;y_{i+p_3})$ послідовності (2) для визначення координат будь-якої точки $A^0_{i+p}(i+p;y_{i+p})$ даної послідовності.

Знайдемо такі числа k_1, k_2, k_3, щоб:

$$\begin{cases} k_1(i+p_1)+k_2(i+p_2)+k_3(i+p_3)=i+p \\ k_1ch(i+p_1)+k_2ch(i+p_2)+k_3ch(i+p_3)=ch(i+p) \\ k_1+k_2+k_3=1 \end{cases} \tag{4}$$

Формули для обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції одержимо в результаті розв'язання системи рівнянь (4):

$$k_1=\frac{(p_3-p_2)ch(i+p)+(p-p_3)ch(i+p_2)+(p_2-p)ch(i+p_3)}{(p_3-p_2)ch(i+p_1)+(p_1-p_3)ch(i+p_2)+(p_2-p_1)ch(i+p_3)};$$

$$k_2=\frac{(p_3-p)ch(i+p_1)+(p_1-p_3)ch(i+p)+(p-p_1)ch(i+p_3)}{(p_3-p_2)ch(i+p_1)+(p_1-p_3)ch(i+p_2)+(p_2-p_1)ch(i+p_3)};$$

$$k_3=\frac{(p-p_2)ch(i+p_1)+(p_1-p)ch(i+p_2)+(p_2-p_1)ch(i+p)}{(p_3-p_2)ch(i+p_1)+(p_1-p_3)ch(i+p_2)+(p_2-p_1)ch(i+p_3)}.$$

Вираз

$$k_1ch(i+p_1)+k_2ch(i+p_2)+k_3ch(i+p_3)=ch(i+p)$$

можемо переписати у вигляді:

$$k_1\left\{chi\cdot chp_1+shi\cdot shp_1\right\}+k_2\left\{chi\cdot chp_2+shi\cdot shp_2\right\}+$$
$$+k_3\left\{chi\cdot chp_3+shi\cdot shp_3\right\}=chi\cdot chp+shi\cdot shp.$$

Прирівнюємо відповідні коефіцієнти біля chi і shi:

$$chi:\quad k_1chp_1+k_2chp_2+k_3chp_3=chp,$$
$$shi:\quad k_1shp_1+k_2shp_2+k_3shp_3=shp.$$

Складаємо систему визначальних рівнянь:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 1 \\ k_1 chp_1 + k_2 chp_2 + k_3 chp_3 = chp \\ k_1 shp_1 + k_2 shp_2 + k_3 shp_3 = shp \end{cases} . \tag{5}$$

Формули для обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції одержимо в результаті розв’язання системи рівнянь (5)

$$k_1 = \frac{sh\frac{p_2 - p}{2} sh\frac{p_3 - p}{2}}{sh\frac{p_1 - p_2}{2} sh\frac{p_1 - p_3}{2}}; \quad k_2 = \frac{sh\frac{p_1 - p}{2} sh\frac{p_3 - p}{2}}{sh\frac{p_2 - p_1}{2} sh\frac{p_2 - p_3}{2}};$$

$$k_3 = \frac{sh\frac{p_1 - p}{2} sh\frac{p_2 - p}{2}}{sh\frac{p_3 - p_1}{2} sh\frac{p_3 - p_2}{2}} . \tag{6}$$

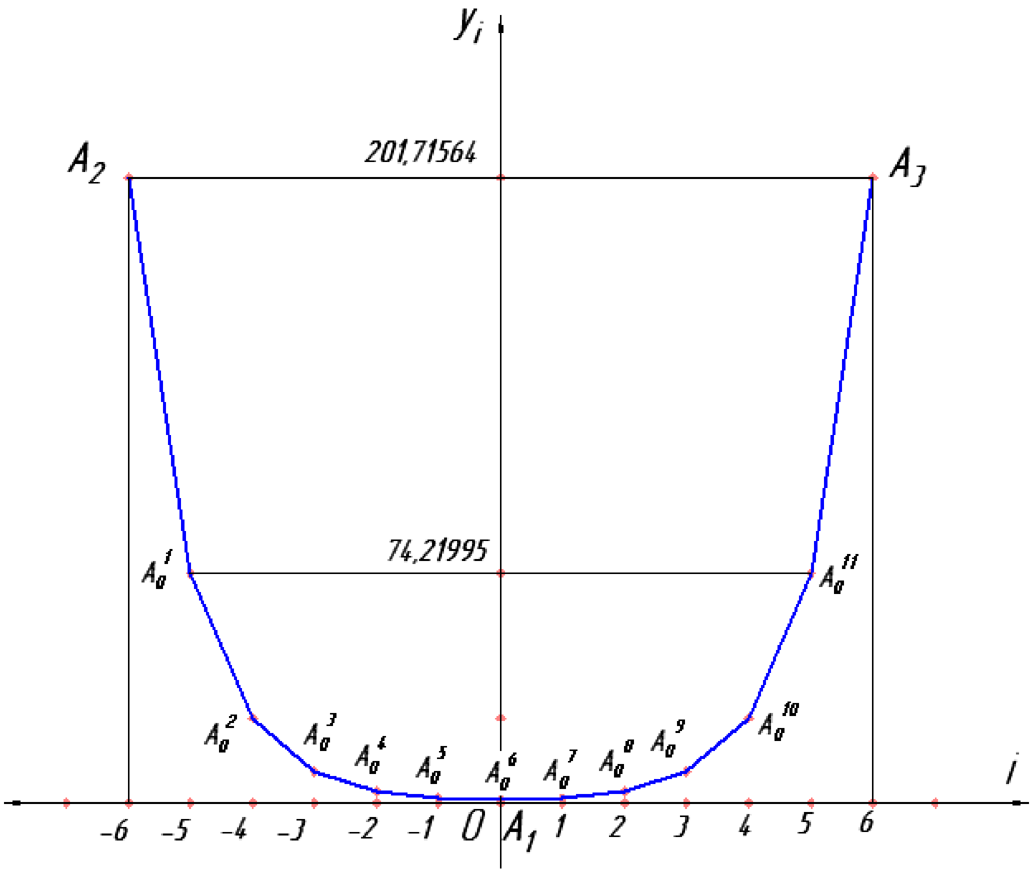

Рисунок 1. Графік числової послідовності $y_i = chi$

На рисунку 1 показано числову послідовність (2), координати невідомих точок $\boldsymbol{A_0^1}$, $\boldsymbol{A_0^2}$, $\boldsymbol{A_0^3}$, $\boldsymbol{A_0^4}$, $\boldsymbol{A_0^5}$, $\boldsymbol{A_0^6}$, $\boldsymbol{A_0^7}$, $\boldsymbol{A_0^9}$, $\boldsymbol{A_0^{10}}$, $\boldsymbol{A_0^{11}}$, $\boldsymbol{A_1^{12}}$ якої одержано як суперпозиції фіксованих точок: ***A₁(0***; ***1)*** – центрального вузла і ***A₂(-6***; ***201,7156361)***, ***A₃(6***; ***201,7156361***) – опорного контуру.

Величини коефіцієнтів суперпозиції $\boldsymbol{k_1}$, $\boldsymbol{k_2}$, $\boldsymbol{k_3}$ обчислені за формулами (6), а значення координат невідомих точок за формулами рівнянь системи (4).

Висновки. Для дискретного моделювання геометричних образів, що можуть бути представлені трансцендентними аналітичними залежностями, може бути застосований геометричний апарат суперпозицій одновимірних точкових множин, що дозволяє визначати координати довільних вузлів дискретного образу за довільними вихідними даними. Подальші дослідження будуть спрямовані на визначення ролі функціонального навантаження у формуванні дискретних аналогів трансцендентних кривих шляхом варіювання величинами коефіцієнтів суперпозиції.

Список літератури:

1. Ковальов С.М. Рекурентні формули числових послідовностей у формуванні дискретно визначених геометричних образів / С.М. Ковальов, С.І. Ботвіновська // Прикладна геометрія та інженерна графіка. — К.: КНУБА, 2006. — Вип. 76. — С. 30 — 37.
2. Пустюльга С.І. Дискретне визначення геометричних об'єктів числовими послідовностями: дис. … доктора техн. наук: 05.01.01 / С.І. Пустюльга. – К., 2006. – 322 с.
3. Воронцов О.В. Визначення дискретного аналогу полінома **n**-го степеня суперпозиціями точок числової послідовності **n**-го порядку / О.В. Воронцов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 90. – С. 63-67.
4. Воронцов О.В. Дискретна інтерполяція суперпозиціями точок числових послідовностей дробово-лінійних функцій / О.В. Воронцов, Н.О. Махінько // Прикладна геометрія та інженерна графіка / Праці ТДАТА. Вип. 4. – Т. 57 – Мелітополь: ТДАТА, 2013. – С. 62-67.
5. Воронцов О.В. Определение дискретных аналогов классов элементарных функций суперпозициями одномерных точечных множеств / О.В. Воронцов,

Л.О. Тулупова // Universum: Технические науки: электрон. научн. журн. 2014. №3(4). URL: http://7universum.Com/ru/tech/archive/item/1135 (дата обращения: 29.05. 2015).

6. Воронцов О.В. Дискретное моделирование кривых поверхностей супер-позициями двумерных точечных множеств / О.В. Воронцов, Л.О. Тулупова // Сборник статей по материалам XL международной научно-практической конференции «Технические науки – от теории к практике». – Новосибирск. 2014. – №11 (36). – С. 7–16.