ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГОВ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ СУПЕРПОЗИЦИЯМИ ОДНОМЕРНЫХ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

Воронцов Олег Викторович
канд. техн. наук, зав. кафедрой начертательной геометрии и графики, доцент Полтавского национального технического университета имени Юрия Кондратюка, Украина, г. Полтава
E-mail: uaag.poltava2012@gmail.com

DETERMINATION OF DISCRETE ANALOGUES OF HYPERBOLIC FUNCTIONAL RELATIONSHIPS BY SUPERPOSITIONS OF ONE-DIMENSIONAL POINT SETS

Vorontsov Oleg
Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, head of the Department of Descriptive Geometry and Graphics, Poltava National Technical University named after Yuri Kondratyuk, Ukraine, Poltava

АННОТАЦИЯ

В работе проведено исследование определения дискретных аналогов трансцендентных функциональных зависимостей на примере гиперболических функций, в частности числовой последовательности цепной линии, с использованием геометрического аппарата суперпозиций одномерных точечных множеств.

ABSTRACT

In the article we have studied a determination of discrete analogues of transcendental functional relationships for hyperbolic functions, particularly a numerical sequence of a catenary, using a geometric apparatus of superpositions of one- dimensional point sets.

Ключевые слова: дискретные аналоги, числовые последовательности, гиперболические функции, геометрический аппарат суперпозиций, суперпозиции точечных множеств.

Keywords: discrete analogues, numeric sequences, hyperbolic functions, geometric apparatus of superpositions, superpositions of point sets.

Постановка проблемы. В процессе создания моделей дискретных геометрических образов объектов проектирования актуальными являются задачи перехода от дискретной информации к непрерывной, которые решаются методами интерполяции, и обратные задачи – перехода от непрерывной информации о геометрическом образе к дискретной. Использование математического аппарата числовых последовательностей и геометрического аппарата суперпозиций позволяет создавать эффективные алгоритмы такого перехода.

Анализ последних исследований и публикаций. Вопросам анализа рекуррентных формул числовых последовательностей для дискретного формирования геометрических образов посвящена докторская диссертация проф. С.И. Пустюльги [1]. Результаты, полученные в этой работе позволяют получать рекуррентные формулы, связывающие значения конечного ряда соседних членов последовательности, а также предусматривают наличие исходных данных в виде координат обязательно смежных членов соответствующих последовательностей. Для определения координат искомых узлов необходимо последовательно вычислять координаты предыдущих.

Исследование методики дискретного определения геометрических образов одномерными числовыми последовательностями класса элементарных функциональных зависимостей на основе геометрического аппарата суперпозиций проведено в работах [2, 3, 4 5] автора данной публикации.

Геометрический аппарат суперпозиций позволяет получать формулы, связывающие значения конечного ряда произвольных членов последовательностей с произвольными исходными данными (координатами несмежных членов данных последовательностей), и тем самым значительно экономить вычислительные ресурсы.

Научная новизна и практическая ценность данного исследования заключается в возможности использования предложенной методики дискретной интерполяции числовыми последовательностями трансцендентных функциональных зависимостей по произвольным исходным данным.

Постановка задания. Цель данной работы заключается в проведении исследований методики дискретного интерполирования числовыми последовательностями гиперболических функций с применением геометрического аппарата суперпозиций одномерных точечных множеств.

Изложение основного содержания исследования. Среди гиперболических функций для дискретного моделирования геометрических образов объектов проектирования наибольший интерес представляет функциональная зависимость гиперболического косинуса (1), которой описывается цепная линия, чья форма соответствует однородной гибкой нерастяжимой тяжёлой нити, закреплённой в обоих концах и, что провисает под действием силы тяжести.

$$y = a \cdot ch\frac{x}{a} \tag{1}$$

Цепные линии часто встречаются в природе и технике. В архитектуре и строительстве арки в форме перевёрнутой цепной линии имеют высокую устойчивость благодаря тому, что внутренние силы сжатия идеально компенсируются и не вызывают прогиба.

Замкнутая форма дискретного аналога гиперболической функции (1) может быть представлена числовой последовательностью:

$$y_i = a \cdot ch\frac{i}{a} \tag{2}$$

Не теряя общности, возьмём в уравнении гиперболического косинуса (1), $a = 1$. Тогда замкнутая форма числовой последовательности (2) данной трансцендентной функции будет иметь вид:

$$y_i = chi \tag{3}$$

На основе доказанного в работе [6, с.10] свойства 1, согласно которому, координаты любой точки одномерного множества точек являются суперпозицией (4) координат трёх произвольных точек данного множества,

$$\begin{cases} x_0 = k_1 x_1 + k_2 x_2 + (1 - k_1 - k_2) x_3 \\ y_0 = k_1 y_1 + k_2 y_2 + (1 - k_1 - k_2) y_3 \end{cases} \quad (4)$$

можно предположить, что координаты любой точки цепной линии, изображённой на рис. 1 будут определены, как суперпозиция координат трёх произвольных точек данной кривой.

Рассмотрим числовую последовательность (3), значения которой приведены в таблице 1, с конкретными исходными данными.

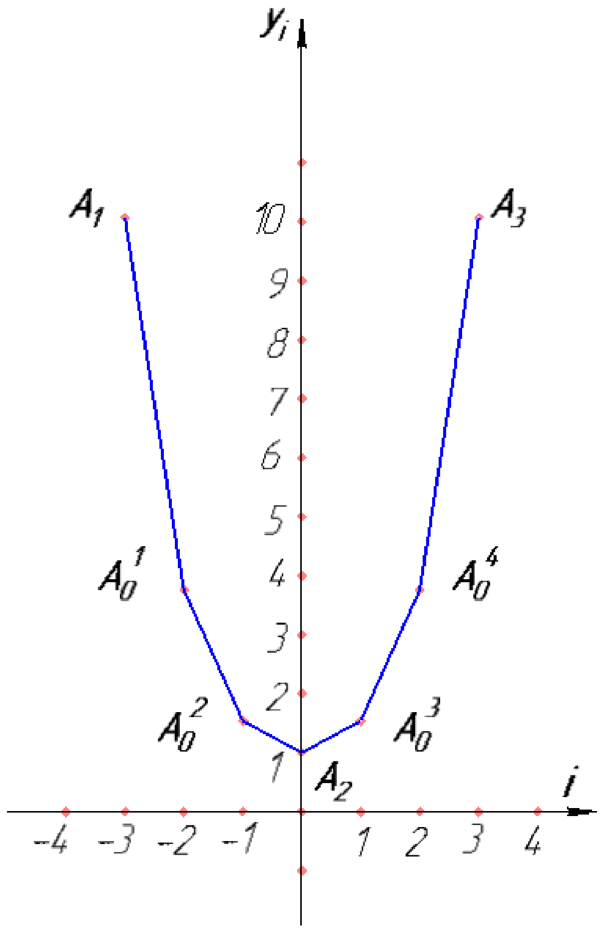

Рисунок 1. Дискретно представленный график последовательности $y_i = chi$

Таблица 1.

Значения числовой последовательности $y_i = chi$

i	*0*	*1; -1*	*2; -2*	*3; -3*	*4; -4*	*5; -5*	*6; -6*	*7; -7*
y_i	*1*	*1,543*	*3,762*	*10,068*	*27,308*	*74,210*	*201,716*	*548,317*

Возьмём фиксированные точки данной последовательности:

$A_1(-3;\, ch(-3))$, $A_2(0;\, ch(0))$, $A_3(-3;\, ch(3))$.

Найдём коэффициенты k_1, k_2 и k_3 суперпозиции заданных точек A_1, A_2, A_3 для определения координат неизвестных точек A_0^1, A_0^2, A_0^3, и A_0^4 последовательности (3) с равномерным шагом $h=1$ вдоль оси O_x.

Решение системы уравнений (4) даёт выражения для определения значений коэффициентов k_1 и k_2 :

$$k_1=\frac{(x_0-x_3)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_0-y_3)}{(x_1-x_3)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_3)};$$

$$k_2=\frac{(x_1-x_3)(y_0-y_3)-(x_0-x_3)(y_1-y_3)}{(x_1-x_3)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_3)}. \qquad (5)$$

Для точки $A_0^1(-1;\ ch1)$ величины коэффициентов k_1 и k_2 будут следующими:

$$k_1=\frac{(-1-3)(1-ch3)-(0-3)(ch1-ch3)}{(-3-3)(1-ch3)-(0-3)(ch3-ch3)}=$$
$$=\frac{-4(1-ch3)+3(ch1-ch3)}{-6(1-ch3)+3\cdot 0}=\frac{4-3ch1-ch3}{6(1-ch3)};$$

$$k_2=\frac{(-3-3)\cdot(ch1-ch3)-(-1-3)\cdot(ch3-ch3)}{(-3-3)(1-ch3)-(0-3)(ch3-ch3)}=$$
$$=\frac{-6(ch1-ch3)+4\cdot 0}{-6(1-ch3)+3\cdot 0}=\frac{ch1-ch3}{1-ch3}.$$

Если $ch1=1,543$, $ch3=10,068$, то

$$k_1=\frac{4-3\cdot 1,543-10,068}{6(-9,068)}=\frac{4-4,629-10,068}{-54,408}=0,197\ ;$$

$$k_2=\frac{1,543-10,068}{1-10,068}=\frac{-8,525}{-9,068}=0,94\ .$$

Значения коэффициентов k_1 та k_2 для определения координат точки $A_0^2(1,\, ch1)$:

$$k_1 = \frac{(1-3)\,(1-ch3)-(0-3)\,(ch1-ch3)}{(-3-3)\,(1-ch3)-(0-3)(ch3-ch3)} =$$

$$= \frac{-2(1-ch3)+3(ch1-ch3)}{-6(1-ch3)} = \frac{2-3ch1+ch3}{6(1-ch3)}$$

$$k_2 = \frac{(-3-3)\cdot(ch1-ch3)-(-1-3)\cdot(ch3-ch3)}{(-3-3)\,(1-ch3)-(0-3)(ch3-ch3)} =$$

$$= \frac{-6(ch1-ch3)+4\cdot 0}{-6(1-ch3)+3\cdot 0} = \frac{ch1-ch3}{1-ch3}$$

Если $ch1=1{,}543$, $ch3=10{,}068$, то

$$k_1 = \frac{2-3\cdot 1{,}543+10{,}068}{6(-9{,}068)} = \frac{2-4{,}629+10{,}068}{-54{,}408} = \frac{7{,}439}{-54{,}408} = -0{,}137 \;;$$

$$k_2 = \frac{1{,}543-10{,}068}{1-10{,}068} = \frac{-8{,}525}{-9{,}068} = 0{,}94 \;.$$

Для точки $A_0^3(-2;\, ch2)$:

$$k_1 = \frac{(-2-3)(1-ch3)-(0-3)(ch2-ch3)}{(-3-3)(1-ch3)-(0-3)(ch3-ch3)} = \frac{-5(1-ch3)+3(ch2-ch3)}{-6(1-ch3)+3\cdot 0} =$$

$$= \frac{-5+5ch3+3ch2-3ch3}{-6(1-ch3)} = \frac{-5+3ch2+2ch3}{-6(1-ch3)} = \frac{5-3ch2-2ch3}{6(1-ch3)} \;;$$

$$k_2 = \frac{(-3-3)(ch2-ch3)-(-2-3)(ch3-ch3)}{(-3-3)(1-ch3)-(0-3)(ch3-ch3)} =$$

$$= \frac{-6(ch2-ch3)+5\cdot 0}{-6(1-ch3)+3\cdot 0} = \frac{ch2-ch3}{1-ch3} \;.$$

Подставив значения числовой последовательности (3), получим:

$$k_1 = \frac{5-3\cdot 3{,}762-2\cdot 10{,}068}{6(-9{,}068)} = \frac{5-11{,}286-20{,}136}{-54{,}408} = 0{,}486 \;;$$

$$k_2 = \frac{3{,}762-10{,}068}{1-10{,}068} = \frac{-6{,}306}{-9{,}068} = 0{,}695 \;.$$

Для точки $A_0^4(2;\, ch2)$:

$$k_1 = \frac{1\text{-}3ch2+2ch3}{6(1\text{-}ch3)} = \frac{1\text{-}3\cdot 3{,}762+2\cdot 10{,}068}{6(\text{-}9{,}068)} = $$
;
$$= \frac{1\text{-}11{,}286+20{,}136}{\text{-}54{,}408} = 0{,}486$$

$$k_2 = \frac{ch2\text{-}ch3}{1\text{-}ch3} = \frac{3{,}762\text{-}10{,}068}{1\text{-}10{,}068} = 0{,}695 \; ,$$

Полученные выше результаты представлены в таблице 2.

Таблица 2.

Значения коэффициентов суперпозиции для определения координат точек последовательности $y_i = chi$

	A_1	A_0^3	A_0^1	A_2	A_0^2	A_0^4	A_3
i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	10,07	3,76	1,54	1	1,54	3,76	10,07
k_1	1	0,486	0,197	0	-0,137	-0,181	0
k_2	0	0,695	0,94	1	0,94	0,695	0
$k_3=1-k_1-k_2$	0	-0,181	-0,137	0	0,197	0,486	1

Значения y_i найдены из формул (4), например, для точки A_0^1 :

$$y_{A_0^1} = 0{,}197\cdot 10{,}07 + 0{,}94\cdot 1 + (\text{-}0{,}137)\cdot 10{,}07 = 1{,}54 \; .$$

Выводы. Для дискретного моделирования геометрических образов гиперболическими функциональными зависимостями может быть применён геометрический аппарат суперпозиций одномерных точечных множеств, позволяющий определять координаты произвольных узлов дискретного образа по произвольным исходным данным.

Список литературы:

1. Пустюльга, С.І. Дискретне визначення геометричних об'єктів числовими послідовностями: дис. д-ра техн. наук: 05.01.01 / КНУБА. — К.: 2006. — 316 с.

2. Воронцов, О.В. Визначення дискретного аналогу полінома n-го степеня суперпозиціями точок числової послідовності n-го порядку / О.В. Воронцов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 90. – С. 63-67.

3. Воронцов, О.В. Визначення дискретного аналогу дробово-лінійної функції суперпозиціями одновимірних точкових множин / О.В. Воронцов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2013. – Вип. 91. – С. 64-68.

4. Воронцов, О.В. Дискретна інтерполяція суперпозиціями точок числових послідовностей дробово-лінійних функцій / О.В. Воронцов, Н.О. Махінько // Прикладна геометрія та інженерна графіка. / Праці ТДАТА. Вип. 4. – Т. 57 – Мелітополь: ТДАТА, 2013. – С. 62-67.

5. Воронцов, О.В. Определение дискретных аналогов классов элементарных функций суперпозициями одномерных точечных множеств / О.В. Воронцов, Л.О. Тулупова // Universsum: Технические науки: электрон. научн. журн. 2014. №3(4). URL: http://7universum.Com/ru/tech/archive/item/1135 (дата обращения: 29.05.2015).

6. Воронцов О.В. Дискретное моделирование кривых поверхностей суперпозициями двумерных точечных множеств / О.В. Воронцов, Л.О. Тулупова // Сборник статей по материалам XL международной научно-практической конференции «Технические науки – от теории к практике». – Новосибирск. 2014. – №11 (36). – С. 7 – 16.