

ДИСКРЕТНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ СУПЕРПОЗИЦІЯМИ ОДНОВИМІРНИХ ТОЧКОВИХ МНОЖИН ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ НА ПРИКЛАДІ ГІПЕРБОЛІЧНИХ ФУНКЦІЙ

В роботі проведено дослідження дискретного інтерполювання числовими послідовностями трансцендентних функціональних залежностей на прикладі гіперболічних функцій, зокрема числової послідовності ланцюгової лінії, із використанням геометричного апарату суперпозицій одновимірних точкових множин.

Ключові слова: дискретна інтерполяція, числові послідовності, гіперболічні функції, геометричний апарат суперпозицій, суперпозиції точкових множин.

О. В. ВОРОНЦОВ

Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка

ДИСКРЕТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СУПЕРПОЗИЦИЯМИ ОДНОМЕРНЫХ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ НА ПРИМЕРЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В работе проведено исследование дискретного интерполирования числовыми последовательностями трансцендентных функциональных зависимостей на примере гиперболических функций, в частности числовой последовательности цепной линии, с использованием геометрического аппарата суперпозиций одномерных точечных множеств.

Ключевые слова: дискретная интерполяция, числовые последовательности, гиперболические функции, геометрический аппарат суперпозиций, суперпозиции точечных множеств.

O.V. VORONTSOV

Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University

Discrete Interpolation by Superpositions of One-dimensional Point Sets of Transcendental Functional Relationship for Hyperbolic Functions

In the article we have studied the discrete interpolation by numerical sequences of transcendental functional relationships for hyperbolic functions, particularly by a numerical sequence of catenary, using geometric apparatus of superpositions of one-dimensional point sets.

Keywords: discrete interpolation, numerical sequences, hyperbolic functions, geometric apparatus of superpositions, superpositions of point sets.

Постановка проблеми. У процесі створення дискретних моделей геометричних об'єктів розповсюджені задачі переходу від дискретної інформації до неперервної, що розв'язуються різними методами апроксимації та інтерполяції, і задачі зворотного переходу – від неперервної інформації про об'єкт моделювання до дискретної. Тому необхідні дослідження ефективності алгоритмів визначення дискретних аналогів різних аналітичних закономірностей.

Залучення математичного апарату числових послідовностей і геометричного апарату суперпозицій для формування дискретно визначених геометричних образів довільної вимірності значно розширює можливості дискретного геометричного моделювання об'єктів, процесів та явищ.

Аналіз останніх досліджень. У роботах автора даної статті [1, 2, 3, 4] проведено дослідження методики дискретного визначення геометричних образів одновимірними числовими послідовностями класу елементарних функціональних залежностей на основі геометричного апарату суперпозицій. Визначені

дискретні аналоги поліному n -го степеня, дробово-лінійних, степеневих, показникових, а також зворотних до них функцій суперпозиціями одновимірних точкових множин.

Виведено аналітичні вирази для визначення координат шуканих точок як суперпозицій початку системи координат і координат двох довільних точок послідовностей вищеперерахованих функцій.

Постановка завдання. Мета даної роботи полягає у проведенні досліджень методики дискретного моделювання числовими послідовностями трансцендентних функцій із використанням геометричного апарату суперпозицій одновимірних точкових множин.

Виклад основного змісту дослідження. У групі трансцендентних кривих особливе місце для дискретного геометричного моделювання об'єктів посідає ланцюгова лінія (як і у групі алгебраїчних кривих – парабола). Ланцюгова лінія за формою нагадує параболу, але її рівняння містить гіперболічний косинус:

$$y = a \operatorname{Ch} \frac{x}{a}, \quad (1)$$

Замкнена форма числової послідовності даної трансцендентної функції матиме вигляд:

$$y_i = a \operatorname{Ch} \frac{i}{a} \quad (2)$$

Згідно доведеної у роботі [1] властивості 3 також можемо вважати, що координати будь-якої точки числової послідовності (2) будуть визначені як суперпозиції координат початку системи координат та двох довільних точок даної послідовності.

Для визначення i -го члена послідовності (2) за даними координатами перших двох членів і початку системи координат знайдемо вирази для обчислення коефіцієнтів суперпозиції, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} k_0 \cdot 0 + k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 = i \\ k_0 \cdot 0 + k_1 \cdot a \cdot \operatorname{ch} \frac{1}{a} + k_2 \cdot a \cdot \operatorname{ch} \frac{2}{a} = a \cdot \operatorname{ch} \frac{i}{a} \\ k_0 + k_1 + k_2 = 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\Delta = a \cdot \operatorname{ch} \frac{2}{a} - 2a \cdot \operatorname{ch} \frac{1}{a}; \quad \Delta_0 = a \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ a \operatorname{ch} \frac{1}{a} - 2 \operatorname{ch} \frac{1}{a} \end{array} \right\} + \operatorname{ch} \frac{i}{a};$$

$$\Delta_1 = a \left(i \cdot \operatorname{ch} \frac{2}{a} - 2 \operatorname{ch} \frac{i}{a} \right); \quad \Delta_2 = a \left(i \cdot \operatorname{ch} \frac{i}{a} - i \operatorname{ch} \frac{1}{a} \right).$$

Формули для обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції матимуть вигляд:

$$k_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} = 1 + \frac{\operatorname{ch} \frac{i}{a}}{\operatorname{ch} \frac{2}{a} - 2 \operatorname{ch} \frac{1}{a}}; \quad k_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{i \operatorname{ch} \frac{2}{a} - 2 \operatorname{ch} \frac{i}{a}}{\operatorname{ch} \frac{2}{a} - 2 \operatorname{ch} \frac{1}{a}}; \quad k_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\operatorname{ch} \frac{i}{a} - i \operatorname{ch} \frac{1}{a}}{\operatorname{ch} \frac{2}{a} - 2 \operatorname{ch} \frac{1}{a}}. \quad (4)$$

Значення y_{i+p} будь-якої точки $A_1^0(i+p; y_{i+p})$ послідовності (2) можуть бути визначені як суперпозиції відповідних координат трьох точок: $O(0; 0)$, $A_1(i+p_1; y_{i+p_1})$, $A_2(i+p_2; y_{i+p_2})$ даної послідовності за формулою (5):

$$y_{i+p} = k_0 \cdot 0 + k_1 y_{i+p_1} + k_2 y_{i+p_2}, \quad (5)$$

де вирази для обчислення величин коефіцієнтів k_1 , k_2 , k_0 будуть одержані у процесі розв'язання системи (6) та за умови (7).

$$\begin{cases} k_1 y_{i+p_1} + k_2 y_{i+p_2} = y_{i+p} \\ k_1(i+p_1) + k_2(i+p_2) = i+p \end{cases}, \quad (6)$$

де:

$$k_0 + k_1 + k_2 = 1 \quad (7)$$

Рівняння системи (6) для числової послідовності (2) матимуть вигляд (8):

$$\begin{cases} k_1(i+p_1)+k_2(i+p_2)=i+p \\ k_1 a \cdot ch \frac{i+p_1}{a} + k_2 a \cdot ch \frac{i+p_2}{a} = a \cdot ch \frac{i+p}{a} \end{cases} \quad (8)$$

Або:

$$\begin{cases} k_1(i+p_1)+k_2(i+p_2)=i+p \\ k_1 ch \frac{i+p_1}{a} + k_2 ch \frac{i+p_2}{a} = ch \frac{i+p}{a} \end{cases};$$

$$\Delta = (i+p_1)ch \frac{i+p_2}{a} - (i+p_2)ch \frac{i+p_1}{a};$$

$$\Delta_1 = (i+p)ch \frac{i+p_2}{a} - (i+p_2)ch \frac{i+p}{a};$$

$$\Delta_2 = (i+p_1)ch \frac{i+p}{a} - (i+p)ch \frac{i+p_1}{a}.$$

Формули для обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції матимуть вигляд (9):

$$\begin{cases} k_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{(i+p)ch \frac{i+p_2}{a} - (i+p_2)ch \frac{i+p}{a}}{(i+p_1)ch \frac{i+p_2}{a} - (i+p_2)ch \frac{i+p_1}{a}}; \\ k_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{(i+p_1)ch \frac{i+p}{a} - (i+p)ch \frac{i+p_1}{a}}{(i+p_1)ch \frac{i+p_2}{a} - (i+p_2)ch \frac{i+p_1}{a}} \end{cases} \quad (9)$$

У таблиці 1 наведено величини коефіцієнтів суперпозиції фіксованих точок: початку системи координат – $A_1(0; 0)$, і послідовності (2), при умові $a=1 - A_2(-7; 548,31704)$, $A_3(7; 548,31704)$ для визначення координат невідомих точок $A_0^1, A_0^2, A_0^3, A_0^4, A_0^5, A_0^6, A_0^7, A_0^9, A_0^{10}, A_0^{11}, A_1^{12}$ (рис. 1).

Таблиця 1.

Значення коефіцієнтів суперпозиції для визначення координат точок послідовності $y_i = chi$

x_0^i	y_0^i	x_1	x_2	$y_{(x_1)}$	$y_{(x_2)}$	k_1	k_2	k_0
-7	548,3170352	-6	6	201,7156361	201,7156361	1,942467027	0,77580036	-1,718267387
-6	201,7156361	-6	6	201,7156361	201,7156361	1	0	0
-5	74,20994852	-6	6	201,7156361	201,7156361	0,600613608	-0,232719725	0,632106118
-4	27,30823284	-6	6	201,7156361	201,7156361	0,401023259	-0,265643408	0,864620149
-3	10,067662	-6	6	201,7156361	201,7156361	0,274955086	-0,225044914	0,950089828
-2	3,762195691	-6	6	201,7156361	201,7156361	0,17599216	-0,157341173	0,981349013
-1	1,543080635	-6	6	201,7156361	201,7156361	0,087158224	-0,079508442	0,992350218
0	1	-6	6	201,7156361	201,7156361	0,002478737	0,002478737	0,995042526
1	1,543080635	-6	6	201,7156361	201,7156361	-0,079508442	0,087158224	0,992350218
2	3,762195691	-6	6	201,7156361	201,7156361	-0,157341173	0,17599216	0,981349013
3	10,067662	-6	6	201,7156361	201,7156361	-0,225044914	0,274955086	0,950089828
4	27,30823284	-6	6	201,7156361	201,7156361	-0,265643408	0,401023259	0,864620149
5	74,20994852	-6	6	201,7156361	201,7156361	-0,232719725	0,600613608	0,632106118
6	201,7156361	-6	6	201,7156361	201,7156361	0	1	0
7	548,3170352	-6	6	201,7156361	201,7156361	0,77580036	1,942467027	-1,718267387

