МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ПОЛТАВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ЮРІЯ КОНДРАТЮКА

КАФЕДРА НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ТА ГРАФІКИ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни «Нарисна геометрія»
для студентів напряму підготовки 6.060101 «Будівництво»
усіх форм навчання

Полтава 2013 рік

УДК 514.18
ББК

Рецензенти: В.Г. Усенко, к.т.н., доцент.

Затверджено науково-методичною радою університету
Протокол № 3 від 18.11.2013 р.

С.А. Маслова, Ю.Е. Патенко.

Конспект лекцій з дисципліни «Нарисна геометрія» для студентів напряму підготовки 6.060101 «Будівництво» усіх форм навчання. – Полтава: ПолтНТУ, 2013. – 60с.

Конспект лекцій містить теоретичні положення з наступних тем курсу нарисної геометрії: проекційні системи, епюр Монжа, аксонометрія; проекції точки, прямої та площини; взаємне розташування геометричних елементів; многогранники; криві лінії та криві поверхні; методи перетворення проекцій; метод допоміжних січних елементів.

Призначений для студентів напряму підготовки 6.060101 «Будівництво» усіх форм навчання.

25.03.02.02

© С.А. Маслова, Ю.Е. Патенко, 2013
© Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, 2013

ВСТУП

Зміст і задачі курсу нарисної геометрії.

Важко вказати такий вид людської діяльності, де, вирішуючи ту або іншу технічну або нетехнічну задачу, не приходилося б удаватися до допомоги зображень машин і механізмів, планів будівель і т.п.

Як широка і багатогранна діяльність людини, настільки і різні вимоги, пропоновані до форми і змісту зображень. Одні з них повинні робити на око людини таке ж враження, яке робить і сам зображуваний предмет, інакше кажучи, зображення повинно мати достатню наочність. В іншому випадку зображення повинно бути, у першу чергу, геометрично рівноцінно оригіналові, воно повинно давати повну геометричну і розмірну характеристику зображуваного предмета. Цій вимозі повинні відповідати, наприклад, усякі машинобудівні креслення.

Нарешті, до зображення можуть бути пред'явлені обидві зазначені умови одночасно – наочність зображення повинна поєднуватись з геометричною рівноцінністю оригіналові.

Зображення різних предметів і об'єктів не є самоціллю, вони дають можливість інженерові вирішувати по ним різні технічні задачі.

Однак не всяке зображення може бути використане для вирішення технічних задач. Для цього воно, у першу чергу, повинно бути геометрично рівноцінним зображуваному об'єкту, тобто, побудовано по визначеному геометричному законі. Питаннями дослідження геометричних основ побудови зображень предметів на площині, питаннями вирішення просторових геометричних задач за допомогою зображень займається одна з галузей геометрії – НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ.

Нарисна геометрія відноситься до числа математичних наук. Для неї характерна та спільність методів, що властива кожній математичній науці. Методи нарисної геометрії знаходять саме широке застосування в об'єктах вивчення різноманітної природи: у механіці, архітектурі і будівництві, хімії, геодезії, геології, кристалографії і т.д.

Але найбільше значення і застосування методи нарисної геометрії знайшли в різних областях техніки при складанні різного виду технічних креслень: архітектурних, будівельних, машинобудівних, різного роду карт і т.д. Нарисна геометрія, таким чином, є ланкою, що з'єднує математичні науки з технічними.

Нарисна геометрія входить у групу загально-технічних дисциплін, що складають основу всякого інженерного утворення. Вона учить

грамотно володіти виразною технічною мовою – мовою креслення, умінню складати і вільно читати креслення, вирішувати за допомогою креслень різні інженерно-технічні задачі.

Крім того, вивчення нарисної геометрії сприяє розвиткові у студентів просторових представлень і просторової уяви – якостей, що характеризують високий рівень інженерного мислення і необхідних для вирішення прикладних задач.

У процесі вивчення нарисної геометрії досягаються й інші цілі, розширюється загальнонауковий кругозір студентів, розвиваються навички логічного мислення, уважність, спостережливість, акуратність і інші якості, розвиток яких є однією з задач навчання і виховання у вищій технічній школі.

Предметом нарисної геометрії (у вузькому змісті) є вивчення теорії побудови плоских моделей простору і теорії і практики вирішення просторових задач на таких плоских моделях.

Цілі курсу:

1. Навчити просторово мислити і відображати на площині тривимірні геометричні образи (фігури).

2. Розвивати здатність уявного сприйняття просторового геометричного образа по його відображенню на площині, тобто навчити читати креслення. Таким чином, ми вирішуємо дві задачі: пряму і зворотну. Об’ємний предмет відображаємо на площині – пряма задача. По плоскому кресленню представляємо об’ємну форму предмета – зворотна задача. Прочитати креслення – це уявити собі просторове зображення предмета.

3. Дати знання про методи вирішення на площині просторових метричних і позиційних задач.

ЛЕКЦІЯ 1

ТЕМА 1. ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

1.Види проекціювання.

1.1 Центральне проекціювання.

1.2 Паралельне проекціювання.

2. Прямокутні проекції точки.

1. Види проекціювання

Методом нарисної геометрії є графічний метод, заснований на операції проекціювання – бінарна конструктивна модель простору, просторових форм і відносин, тобто метод площинних (бінарних, двовимірних) моделей простору.

Нам необхідно будувати площинні моделі просторів і по них уміти вирішувати різноманітні просторові задачі. Якщо тривимірні просторові форми сформовані на двомірній площині – це креслення. ***Креслення*** – це визначена сукупність точок і ліній на площині. Нарисна геометрія займається побудовою креслень просторових форм і відносин.

Існує два види проекціювання: центральне і паралельне.

1.1 Центральне проекціювання

Центральне проекціювання – найбільш загальний випадок одержання проекцій геометричних фігур. Сутність цього методу полягає в наступному:

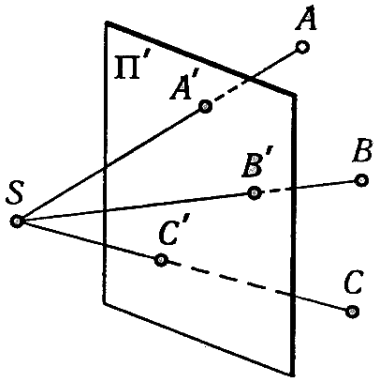


Рисунок 1.1 – Центральне проекціювання.

Нехай дані площина ***П′*** і точка ***S***, яка не належить ***П′*** (рис. 1.1). Візьмемо в просторі довільну точку ***A***, причому

$$A \notin S \wedge A \neq S.$$

Необхідно побудувати центральну проекцію точки ***A***. Для цього через задані точка ***S*** і ***A*** проведемо промінь ***[SA).*** Центральною проекцією точки ***A*** буде точка перетину променя ***[SA)*** із площиною ***П′***

$$[SA) \cap П' = A'$$

Площину ***П′*** називають площиною проекцій, точку ***S*** – центром проекціювання, отриману точку ***A′*** – центральною проекцією точки ***A*** на площину ***П′***, ***[SA′)*** – проекціюючим променем.

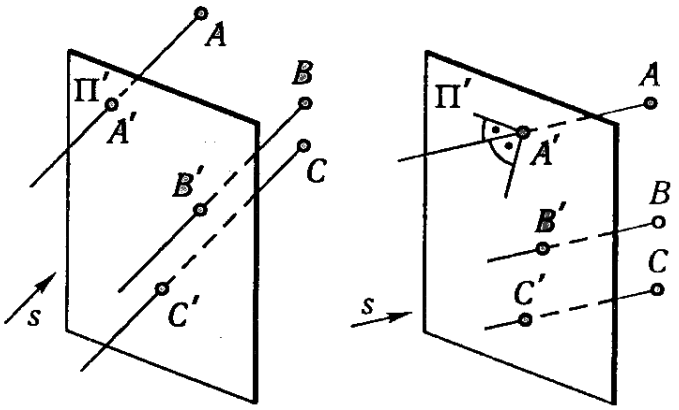
Апарат центрального проекціювання заданий, якщо задано положення площини проекцій ***П'*** і центра проекцій ***S***. Якщо апарат проектування заданий, то завжди можна визначити положення центральної проекції будь-якої точки простору на площині проекцій.

Наприклад: Дані точки ***B*** і ***C***. Проведемо проекціюючі промінь ***[SB)*** та ***[SC)*** і визначимо точки їх зустрічі з площиною ***П'***. Це і будуть центральними проекціями ***B'*** та ***C'*** точкок ***B*** і ***C*** при заданому апараті проекціювання ***(П', S)***.

Перевага центрального проекціювання – наочність. Недолік – ступінь спотворення залежить від відстані центра проекціювання до площини проекцій, тому центральне проекціювання незручне для проставляння розмірів.

1.2 Паралельне проекціювання

Паралельне проекціювання є окремим випадком центрального проекціювання, коли центр проекцій лежить у невласній точці S_∞ , тому всі проекціюючі промені паралельні (рис. 1.2).



а) *б)*

Рисунок 1.2. – Паралельне проекціювання

Апарат паралельного проекціювання заданий, якщо задано положення площини проекцій ***П'*** і напрямок проекціювання ***S***. Паралельне проекціювання поділяється на:

- **Косокутне - $\gamma \neq 90^o$** (рис. 1.2, *а)*)
- **Прямокутне - $\gamma = 90^o$** (рис. 1.2, *б))*

γ - кут нахилу проекціюючого променя до площини проекцій.

Прямокутне (ортогональне) проекціювання, принаймні, на дві взаємно перпендикулярні площини проекцій є основним методом побудови технічного креслення (метод Монжа).

Ортогональне (прямокутне) проекціювання має ряд переваг перед центральним і паралельним (косокутним) проекціюванням:

- простоту геометричних побудов для визначення ортогональних проекцій точок
- можливість за певних умов зберігати на проекціях форму і розміри оригіналу.

Тому цей метод зручний для проставляння розмірів.

2. Прямокутні проекції точки.

2.1. Проекціювання точки на дві площини проекцій.

Точка – основне, невизначуване поняття геометрії. Вона не може бути визначена більш елементарними поняттями. Точка не має розмірів.

У нарисній геометрії часто застосовується система $\boldsymbol{\Pi_1/\Pi_2}$ – двох площин проекцій. При цьому простір поділяється на 4 частини – ***чверті***.

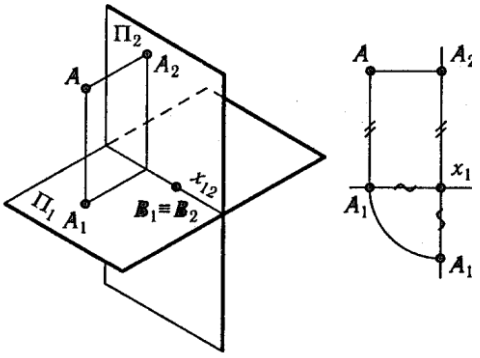


Рисунок 1.3. – Прямокутні проекції точки

Фронтальна й горизонтальна проекції точки належать одній вертикальній лінії сполучення. Відстань між фронтальною та горизонтальною проекціями точки дорівнює сумі відстаней від точки в просторі до площин проекцій (рис. 1.3).

Площини проекцій $\boldsymbol{\Pi_1}$ і $\boldsymbol{\Pi_2}$ при продовженні за вісь $\boldsymbol{Ox}$ поділяють тривимірний простір на чотири чверті. Якщо точка лежить у першій чверті простору при закріплених площинах проекцій, то її горизонтальна проекція розміщується нижче, а фронтальна − вище від осі $\boldsymbol{x_{12}}$.

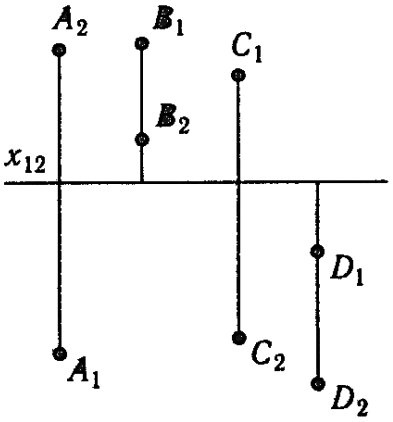


Рисунок. 1.4 – Проекції точок

Інше розміщення мають проекції точок, що лежать у другій, третій і четвертій чвертях простору (рис. 1.4). Точка $\boldsymbol{B}$ розміщується в другій чверті, точка $\boldsymbol{C}$ − у третій, точка $\boldsymbol{D}$ − у четвертій. Далі розглядатимемо геометричні фігури, як правило, відносно першої чверті.

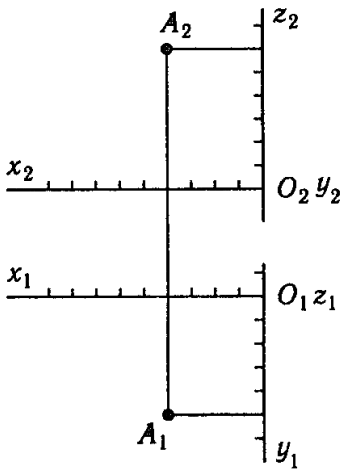


Рисунок 1.5 – Прямокутні проекції точки

Якщо задано три прямокутні декартові координати точки (три параметри), то неважко побудувати її прямокутні проекції. На рисунку 1.5 показано дві прямокутні проекції точки з координатами ***4***, ***5***, ***6***. Додатні значення координат прийнято відкладати від початку координат вліво по осі ***x***, уперед по осі ***y*** та вгору по осі ***z***.

Рисунок, що містить проекції на двох полях проекцій, є позиційно повним і метрично визначеним; він визначає форму та розміри зображуваної фігури. Проте внаслідок тривимірності просторової фігури, а також у зв'язку з тим, що за двома зображеннями не завжди просто прочитати конструкцію складного об'єкта, його комплексний рисунок стає більш зрозумілим, коли, крім двох основних проекцій, дано ще проекцію на третю площину. Цією площиною (полем проекцій) найчастіше є профільна площина проекцій $\boldsymbol{П_3}$, перпендикулярна до $\boldsymbol{П_1}$ і $\boldsymbol{П_2}$ (рис. 1.6), тому третю проекцію називають профільною.

<u>Просторова модель трьох координатних площин проекцій.</u>

Положення точки (а отже, і будь-якої геометричної фігури) у просторі може бути визначено, якщо задано координатну систему відліку (найбільш зручна – декартова). Розглянемо макет із трьох взаємно перпендикулярних площин (рис. 1.6).

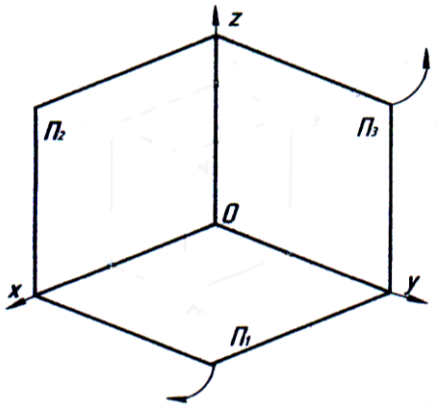


Рисунок 1.6 – Прямокутні площини проекцій

$\boldsymbol{П_1}$ – горизонтальна площина проекцій

$\boldsymbol{П_2}$ – фронтальна площина проекцій

$\boldsymbol{П_3}$ – профільна площина проекцій

Площини проекцій при перетині утворять осі координат:

x – вісь абсцис

y – вісь ординат

z – вісь аплікат

Осі координат при перетині утворять початок координат ***O*** (origo - початок).

Площини проекцій нескінченні. Вони поділяють простір на 8 частин – октантів.

Недолік просторової моделі – її громіздкість, тому користуються площинною моделлю координатних площин проекцій – епюром. Побудову епюра розглянемо на прикладі побудови епюра точки.

2.2. Проекціювання точки на три площини проекцій.

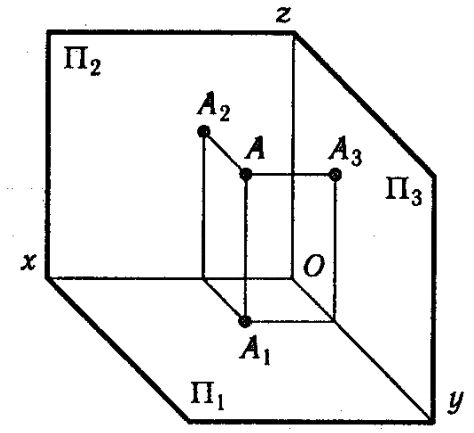


Рисунок 1.7 – Три проекції точки

Нехай задана точка ***A*** і три взаємно перпендикулярні площини проекцій. Побудуємо проекції точки в першому октанті (рис. 1.7).

A_1, A_2, A_3 – ортогональні проекції точки

A_1 – горизонтальна проекція точки ***A***

A_2 – фронтальна проекція точки ***A***

A_3 - профільна проекція точки ***A***

З точки ***A*** опустимо перпендикуляри на площини проекцій. Положення точки ***A*** в просторі визначається трьома координатами **(*x, y, z*)**, що показують величини відстаней, на які точка віддалена від площини проекцій.

Відрізки:

- $[A\,A_3] = [O\,A_x]$ – абсциса точки ***A***
- $[A\,A_2] = [O\,A_y]$ – ордината точки ***A***
- $[A\,A_1] = [O\,A_z]$ – апліката точки ***A***

Прямі $(A\,A_1)$, $(A\,A_2)$, $(A\,A_3)$ – проекціюючі прямі:

Щоб одержати епюр точки, потрібно перетворити просторовий макет (рис. 1.8).

Фронтальна проекція точки ***A*** – A_2 залишається на місці, як приналежна $П_2$, що не змінює свого положення. Горизонтальна проекція A_1 разом з горизонтальною площиною проекцій $П_1$, що сполучається з площиною креслення, опуститься вниз і розташується на одному перпендикулярі до осі ***x*** із фронтальною проекцією A_2. Профільна проекція A_3 буде обертатися вправо разом із профільною площиною проекцією $П_3$ до суміщення з площиною креслення. При цьому A_3 буде належати

перпендикулярові до осі ***z***, проведеному через A_2, і віддалена від осі ***z*** на таку ж відстань, на яку горизонтальна проекція A_1 віддалена від осі ***x***.

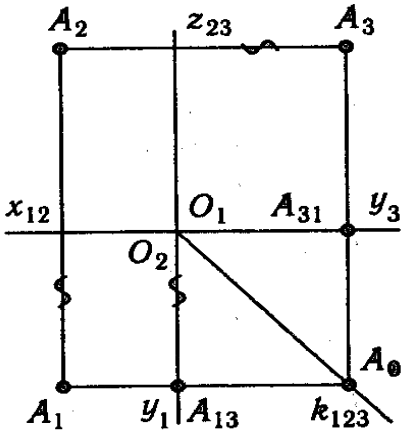


Рисунок 1.8 – Комплексний рисунок трьох прямокутних проекцій

Таким чином, ЕПЮРОМ (комплексним кресленням точки) називається плоске зображення, отримане в результаті ортогонального проекціювання на дві або три взаємно перпендикулярні площини шляхом послідовного суміщення цих площин з однією площиною проекцій.

Бісектрису кута між осями y_1 та y_3 називають постійною прямою K_{123} епюра Монжа.

Отримана модель (епюр) несе таку ж інформацію, як і просторовий макет.

Щоб визначити положення точки ***A*** в просторі, необхідно знати 3 її координати ***X, Y, Z*** – довжини відрізків $[A\ A_3]$, $[A\ A_2]$, $[A\ A_1]$. Величини цих відрізків можуть бути визначені на епюрі

$$[AA_3] = [A_1A_y] = [A_2A_z]$$
$$[AA_2] = [A_1A_x] = [A_3A_z]$$
$$[AA_1] = [A_2A_x] = [A_3A_y]$$

Горизонтальна проекція точки ***A*** визначається абсцисою ***X*** і ординатою ***Y***, фронтальна – ***X*** і ***Z***, профільна – ***Y*** і ***Z***, тобто:

$$A_1\,(X, Y),\ A_2\,(X, Z),\ A_3\,(Y, Z)$$

<u>Звідси випливає, зокрема, що:</u>

1. положення точки в просторі цілком визначається положенням її двох ортогональних проекцій (тому що по двох будь-яких заданих ортогональних проекціях точки завжди можна побудувати відсутню її третю ортогональну проекцію)
2. горизонтальна і фронтальна проекції будь-якої точки належать одному перпендикулярові (одній лінії зв’язку) до осі ***x,***

горизонтальна і профільна проекції будь-якої точки належать одному перпендикулярові (одній лінії зв’язку) до осі ***y,***

фронтальна і профільна проекції будь-якої точки належать одному перпендикулярові (одній лінії зв’язку) до осі ***z***.

ЛЕКЦІЯ 2.

ТЕМА 2. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

1. Сутність аксонометричного проекціювання.
2. Показники спотворення по осях.
3. Теорема Польке-Шварца.
4. Стандартні види аксонометрії.

1. Сутність аксонометричного проекціювання.

Розглянуті в попередніх лекціях ортогональні проекції широко застосовуються в техніці при складанні креслень. Це обумовлене простотою побудови ортогональних проекцій зі збереженням на них метричних характеристик оригіналу.

За допомогою креслень, побудованих в ортогональних проекціях, якщо їх доповнити допоміжними видами, розрізами і перетинами, можна одержати представлення про форму зображуваного предмета (як зовнішнього вигляду, так і внутрішньої будови).

Поряд з зазначеними перевагами метод ортогонального проекціювання має істотний недолік. Для того, щоб одержати представлення про просторовий геометричний образ, заданий його ортогональними проекціями, необхідно одночасно розглядати дві, три, а іноді і більше проекцій, що значно ускладнює уявне відтворення геометричної фігури по її проекціях.

У ряді випадків необхідно, поряд із кресленням об’єкта, виконаному в ортогональних проекціях, мати його наочне зображення, що складається тільки з однієї проекції.

Спосіб проекціювання, при якому задана геометрична фігура разом з декартовою системою координат, до якої вона віднесена в просторі, паралельно проекціюється на одну площину проекцій так, що жодна вісь не проекціюється в точку (а сам предмет проекціюється в трьох вимірах), називається **аксонометричним,** а отримане з його допомогою зображення – **аксонометричною проекцією** або **аксонометрією.** Площина, на яку робиться проекціювання, називається **аксонометричною** або **картинною.**

Аксонометрія є розділом теорії зображень, в якому розглядається побудова аксонометричних проекцій об’єктів. Аксонометрією називають також наочне зображення (проекцію) об’єкта, побудоване за правилами аксонометрії.

Отже, паралельну проекцію предмета на площині, побудовану разом із прямокутними координатними осями, до яких він віднесений, називають його аксонометричною проекцією, або аксонометрією.

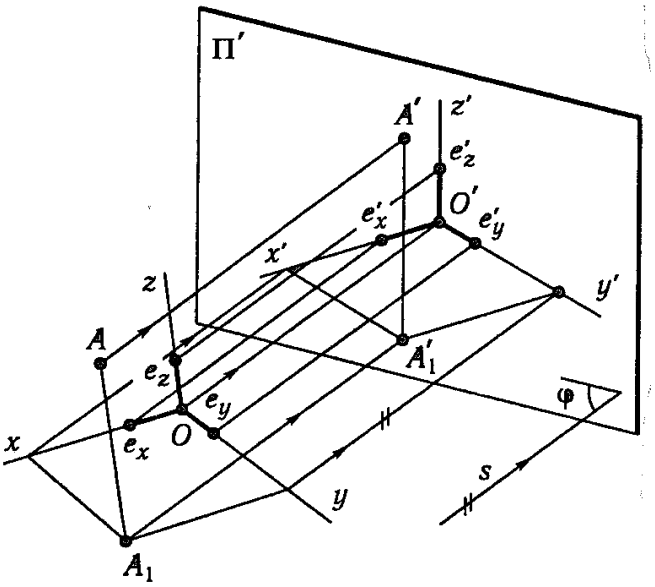


Рисунок 2.1 – Утворення аксонометричної проекції

Утворення аксонометричної проекції точки ***A*** простору зображено на рисунку 2.1, де ***П′*** – площина аксонометричних проекцій; ***s*** – напрям проекціювання; ***φ*** – кут проекціювання; ***x′, y′, z′*** – аксонометричні осі; ***O′*** – аксонометрична проекція початку координат; ***A′*** – аксонометрична проекція точки ***A***; A'_1 – вторинна горизонтальна проекція точки ***A***.

Зображення об’єкта на аксонометричній площині й напрям аксонометричних осей залежать від положення площини відносно системи координатних осей, а також від напряму проекціювання. Якщо напрям проекціювання ***S*** перпендикулярний до площини проекцій ***П′***, то аксонометричні проекції називають ***прямокутними*** (***φ=90°***). Якщо він не перпендикулярний до цієї площини проекцій, то аксонометричні проекції називають ***косокутними*** (φ ***≠90°***).

2. Показники спотворення по осях.

У загальному випадку координатні осі, а разом з ними й об’єкт проекціюються на площину проекцій ***П′*** зі спотворенням, ступінь якого визначається ***коефіцієнтами (показниками) спотворення*** по аксонометричних осях.

Якщо на кожній з координатних осей ***x, y, z*** (див. рис. 2.1) відкласти від точки ***O*** відрізки e_x, e_y, e_z, довжини яких дорівнюють одиниці натурального масштабу ***e***, то внаслідок проекціювання на площину проекцій ***П′*** дістанемо відрізки e'_x, e'_y, e'_z – ***аксонометричні одиниці виміру.***

Відношення аксонометричної одиниці виміру e' до одиниці натурального масштабу e визначає показник спотворення по аксонометричній осі. Отже,

$$\frac{e'_x}{e_x} = u; \quad \frac{e'_y}{e_y} = v; \quad \frac{e'_z}{e_z} = w.$$

Оскільки $e_x = e_y = e_z$, то

$$\frac{e'_x}{e} = u; \quad \frac{e'_y}{e} = v; \quad \frac{e'_z}{e} = w,$$

тобто u, v, ω − це показники спотворення по відповідних аксонометричних осях.

Залежно від того, по скількох осях показники спотворення однакові, визначають вид аксонометрії, а саме:

- **ізометрична проекція** (ізометрія) − однакові всі три показники спотворення ($u = \upsilon = \omega$);
- **диметрична проекція** (диметрія) − однакові два з трьох показників ($u = v \neq \omega$; $u = \omega \neq v$; $u \neq v = \omega$);
- **триметрична проекція** (триметрія) − показники різні ($u \neq v \neq \omega$).

3. Теорема Польке-Шварца.

Основоположною в теорії аксонометрії є теорема Польке−Шварца, яка стверджує, що три довільно вибраних на площині відрізки, які перетинаються в одній точці, завжди можуть відображати паралельну проекцію трьох інших рівних між собою і взаємно перпендикулярних відрізків, що також перетинаються в одній точці.

Згідно з цією теоремою аксонометричні осі на площині проекцій, а також відношення показників спотворення можна задавати як завгодно. При цьому показники спотворення будуть пропорційними аксонометричним одиницям виміру:

$$u : v : \omega = e'_x : e'_y : e'_z$$

4. Стандартні види аксонометрії

Доцільно користуватися стандартними видами аксонометрії, в яких показники спотворення зведено до зручних при використанні зображень величин. Серед прямокутних аксонометричних проекцій − це ізометрична (рис. 2.2) і диметрична (рис. 2.3), серед косокутних − фронтальна ізометрична (рис. 2.4), фронтальна диметрія (рис. 2.5) і горизонтальна

ізометрична (рис. 2.6). На цих рисунках зображено зведені показники спотворення, а також відносні розміри осей еліпсів − аксонометричних кіл.

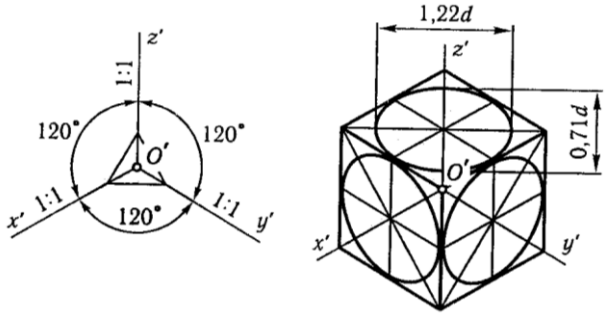


Рисунок 2.2. – Прямокутна ізометрія

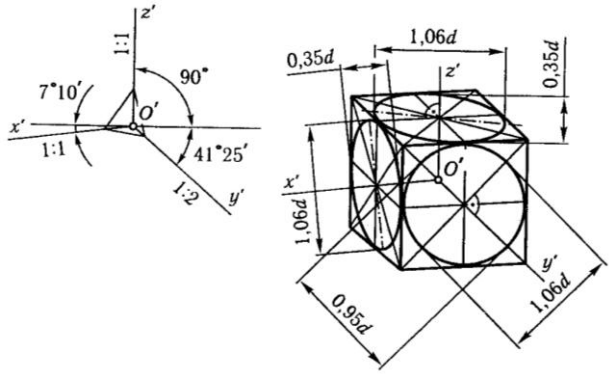


Рисунок 2.3. – Прямокутна диметрія

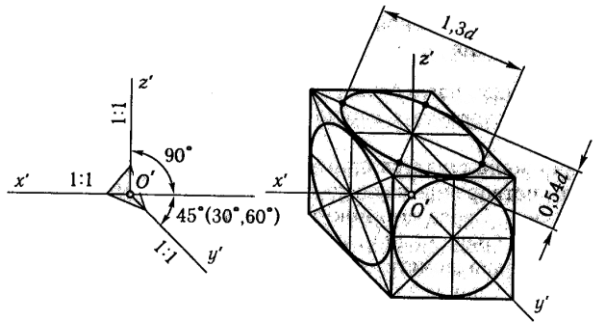


Рисунок 2.4. – Фронтальна ізометрія

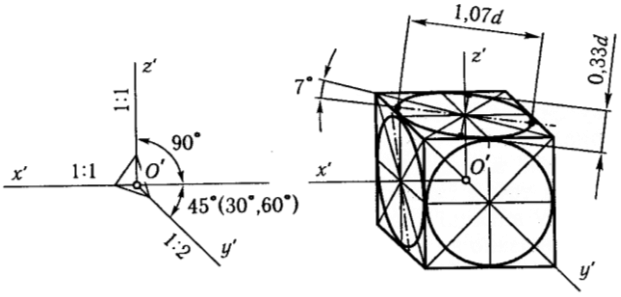


Рисунок 2.5. – Фронтальна диметрія

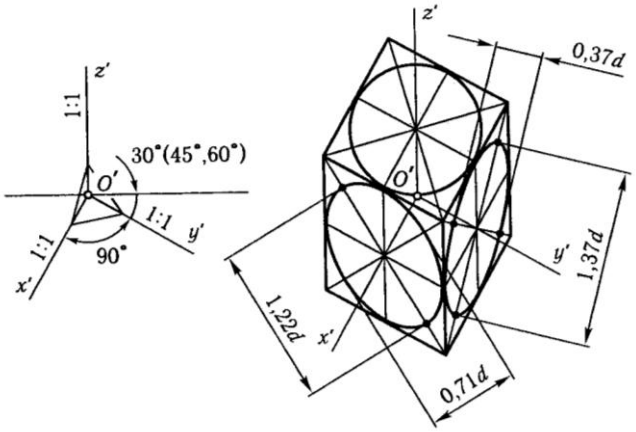


Рисунок 2.6. – Горизонтальна ізометрія

Прямокутні аксонометричні проекції дають зображення, що наближаються до реального зорового сприйняття об’єктів. Косокутні проекції мають іншу перевагу − при забезпеченні наочності зображень дають змогу будувати складні контури в певних площинах без спотворення. Практичне значення має вміння будувати аксонометрію кола, яке зображується еліпсами в різних площинах залежно від виду аксонометрії.

Оскільки побудова еліпсів трудомістка, їх замінюють овалами. Це дає змогу будувати аксонометрію кола за допомогою циркуля.

Аксонометрична проекція називається **прямокутною,** якщо при паралельному проекціюванні проекціюючі промені перпендикулярні картинній площині – $\varphi = 90^o$ і **косокутної**, якщо промені складають з картинною площиною кут – $0 < \varphi < 90^o$.

Візьмемо в просторі координатні осі з одиничними відрізками на них і спроекціюємо на картинну площину ***Q*** паралельно й у напрямку проекціювання ***S*** (тобто з заданим кутом проекціювання φ).

Так як жодна з координатних осей не паралельна картинній площині, то одиничні відрізки на площині ***Q*** будуть менше одиничних відрізків на декартових осях.

ЛЕКЦІЯ 3.

ТЕМА 3. ПРЯМОКУТНІ ПРОЕКЦІЇ ПРЯМОЇ.

1.Проекціювання прямої. Сліди прямої загального положення.

2. Натуральна величина відрізка прямої. Кути нахилу прямої до площин проекцій.

3. Положення прямих відносно площин проекцій.

1. Проекціювання прямої. Сліди прямої.

При ортогональному проекціюванні на площину пряма проекціюється в пряму (2-а інваріантна властивість паралельного проекціювання). Тому для визначення проекції прямої досить знати проекції двох нетотожних точок, що належать прямій. Якщо відрізок ***[AB]***, що визначає пряму ***l*** займає загальне положення стосовно площин проекцій (кути нахилу прямої ***l*** до площин проекцій відрізняються від ***0***° і ***90*** °), то така пряма називається прямою загального положення (рис. 3.1).

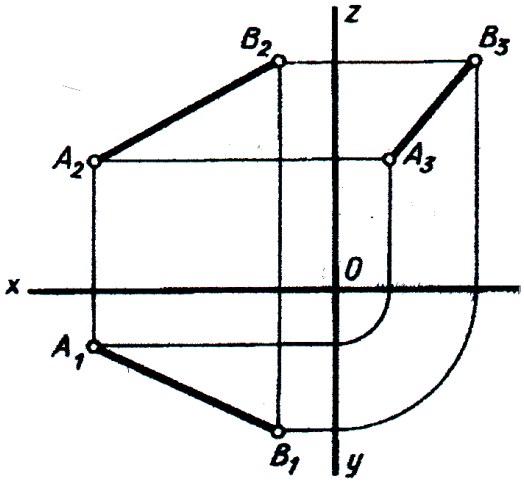


Рисунок 3.1 –
Проекції прямої загального положення

A_1B_1 – горизонтальна проекція відрізка прямої ***[AB]***

A_2B_2 – фронтальна проекція відрізка прямої ***[AB]***

A_3B_3 – профільна проекція відрізка прямої ***[AB]***

$$|A_1B_1| < |AB|$$
$$|A_2B_2| < |AB|$$
$$|A_3B_3| < |AB|]$$

На епюрі проекції прямої загального положення займають також довільні положення щодо осей координат.

Пряму можна задати на епюрі не тільки проекціями її відрізка, але і проекціями деякої довільної частини прямої без фіксації її кінців. У цьому випадку прямі позначаються рядковими латинськими буквами.

Слідом прямої називається точка перетину прямої із площиною проекцій. Пряма загального положення перетинає всі три площини проекцій (рис. 3.2), отже, вона має три сліди: ***H*** – горизонтальний слід, ***F*** – фронтальний слід, ***P*** – профільний слід.

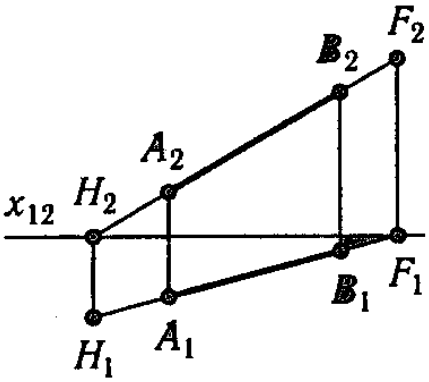


Рисунок 3.2 – Сліди прямої

H_1 – горизонтальна проекція горизонтального сліду.

H_2 – фронтальна проекція горизонтального сліду.

F_1 – горизонтальна проекція фронтального сліду.

F_2 – фронтальна проекція фронтального сліду.

<u>Для знаходження горизонтального сліду прямої необхідно:</u>

1. На епюрі продовжити фронтальну проекцію прямої до перетину її з віссю ***x*** – точка ***H_2***

2. З точки перетину ***H_2*** – фронтальної проекції горизонтального сліду, провести перпендикуляр до перетину з горизонтальною проекцією прямої – точка ***H_1***.

3. Точка перетину ***H_1*** – горизонтальна проекція горизонтального сліду, що збігається із самим горизонтальним слідом ***H***.

<u>Алгоритм визначення горизонтального сліду виглядає так:</u>

$$H = (l_2 \cap X = H_2); \quad (a \perp X, H_2 \in a); \quad a \cap l_1 = H_1$$

<u>Для знаходження фронтального сліду прямої необхідно:</u>

1. На епюрі продовжити горизонтальну проекцію прямої до перетину її з віссю ***x*** – точка ***F_1***.

2. З точки перетину ***F_1*** – горизонтальної проекції фронтального сліду, провести перпендикуляр до перетину з фронтальною проекцією прямої – точка ***F_2***.

3. Точка перетину ***F_2*** – фронтальна проекція фронтального сліду, що збігається із самим фронтальним слідом ***F***.

<u>Алгоритм визначення фронтального сліду виглядає так:</u>

$$F = (l_1 \cap x = F_1); \quad (b \perp x, \ F_1 \in b); \quad b \cap l_2 = F_2$$

<u>Аналогічно визначається профільний слід прямої:</u>

1. ***l_2*** продовжити до перетину з віссю ***z*** – точка ***P_2***.

2. З точки перетину ***P_2*** – фронтальної проекції профільного сліду, провести перпендикуляр до перетину з профільною проекцією прямої.

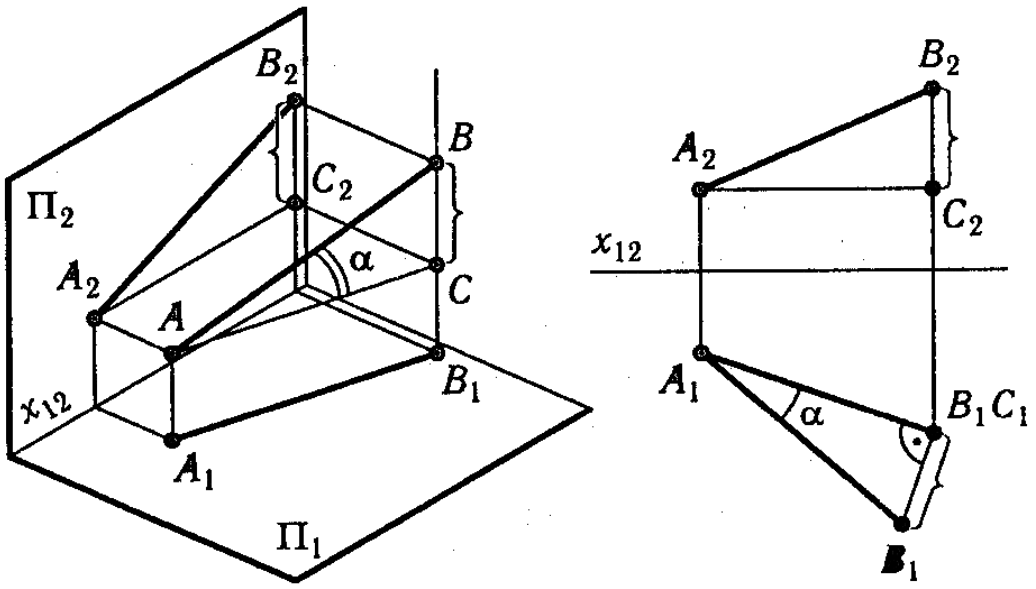
$$P = (l_2 \cap z = P_2); \ (c \perp z, \ P_2 \in c); \ c \cap l_3 = P_3 \ \textit{або}$$

$$P = (l_1 \cap z = P_1); \ (d \perp y, \ P_1 \in d); \ d \cap l_3 = P_3$$

2. Натуральна величина відрізка прямої. Кути нахилу прямої до площин проекцій.

Під час розгляду відрізка прямої часто виникає потреба у визначенні його натуральної величини та кутів нахилу до площин $\boldsymbol{П_1}$ і $\boldsymbol{П_2}$. Інакше кажучи, доводиться розв'язувати першу основну метричну задачу. Справді, відстань між двома фігурами вимірюється відстанню між найближчими точками цих фігур.

Для визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення використовується метод прямокутного трикутника. На рисунку 3.3 *а)* зображено відрізок ***AB*** і дві площини проекцій − $\boldsymbol{П_1}$ та $\boldsymbol{П_2}$. Якщо з точки А провести відрізок ***AC***, паралельний його горизонтальній проекції $\boldsymbol{A_1B_1}$, то утвориться прямокутний трикутник ***ABC***, гіпотенузою якого є відрізок ***AB***. Розглянувши цей трикутник, дійдемо висновку, що натуральна величина відрізка прямої загального положення дорівнює гіпотенузі прямокутного трикутника, один катет якого − одна з проекцій відрізка, а другий − різниця відстаней кінців другої проекції відрізка до осі $\boldsymbol{x_{12}}$ (у безвісній системі − до довільної горизонтальної прямої). Відповідну побудову виконано на рисунку 3.3 *б)*, одночасно визначився і кут $\boldsymbol{\alpha}$ нахилу прямої до горизонтальної площини проекцій. Щоб визначити кут нахилу до фронтальної площини проекцій, таку саму побудову треба виконати на фронтальній площині проекцій.



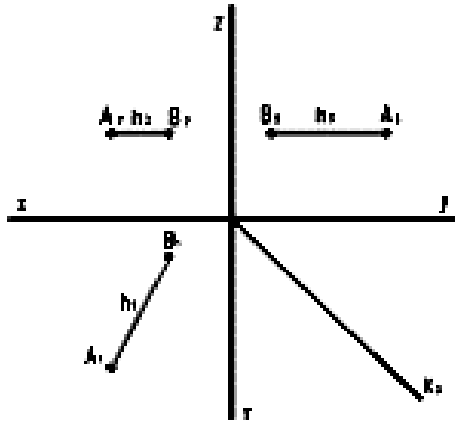
а) *б)*

Рис. 3.3 – Метод прямокутного трикутника

3. Положення прямих відносно площин проекцій.

Прямі окремого положення – це прямі, паралельні (прямі рівня) чи перпендикулярні одній або двом площинам проекцій (проекціюючі прямимі).

Прямі рівня.



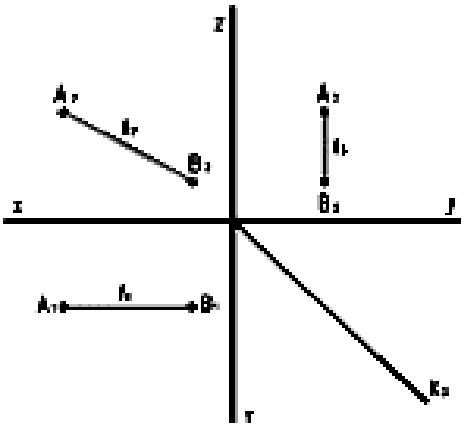
Горизонтальна пряма – ***h***, пряма паралельна площині Π_1 (рис. 3.4)

$$h \parallel \Pi_1,\ h_2 \parallel x;\ h_3 \parallel y$$

$$[AB] \in h$$

$$|A_1B_1| = |AB|$$

Рисунок 3.4 – Горизонтальна пряма



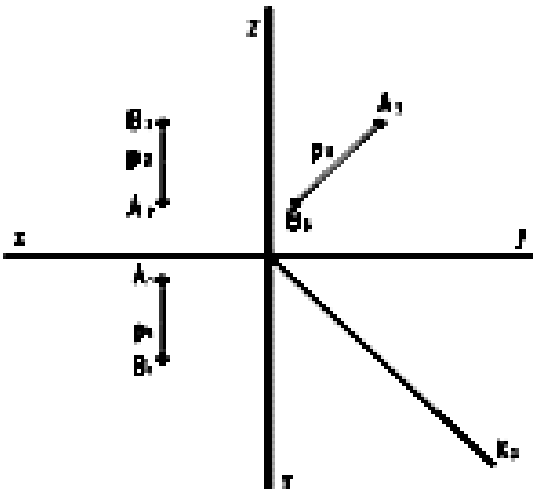
Фронтальна пряма – ***f***, пряма паралельна площині Π_2 (рис. 3.5)

$$f \parallel \Pi_2,\ f_1 \parallel x;\ f_3 \parallel z$$

$$[AB] \in f$$

$$|A_2B_2| = |AB|$$

Рисунок 3.5 – Фронтальна пряма



Профільна пряма – ***p***, пряма паралельна площині Π_3 (рис. 3.6)

$$P \parallel \Pi_3,\ p_1 \parallel y;\ p_2 \parallel z$$

$$[AB] \in p$$

$$|A_3B_3| = |AB|$$

Рисунок 3.6 – Профільна пряма

<u>Прямі, що проекціюються.</u>

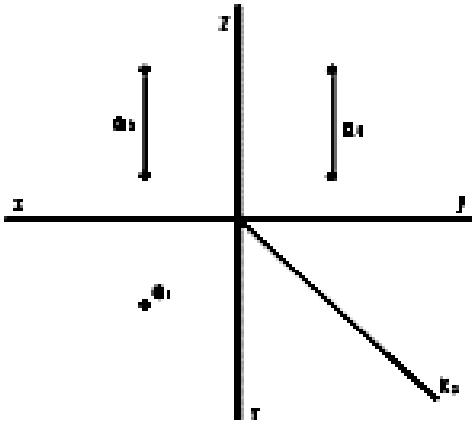


Рисунок 3.7 – Горизонтально проекціююча пряма

Горизонтально проекціююча пряма (рис. 3.7).

$$a \perp \Pi_1;\ a \parallel \Pi_2;\ a \parallel \Pi_3;$$

$$a_2 \parallel z;\ a_3 \parallel z,$$

a_1 **– точка.**

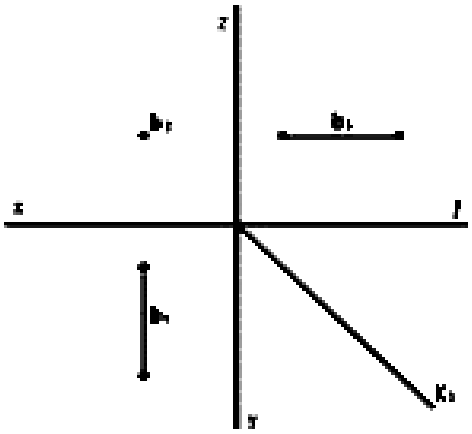


Рисунок 3.8 – Фронтально проекціююча пряма

Фронтально проекціююча пряма (рис. 3.8)

$$b \perp \Pi_2;\ b \parallel \Pi_1;\ b \parallel \Pi_3;$$

$$b_1 \parallel y;\ b_3 \parallel y;$$

b_2 **– точка.**

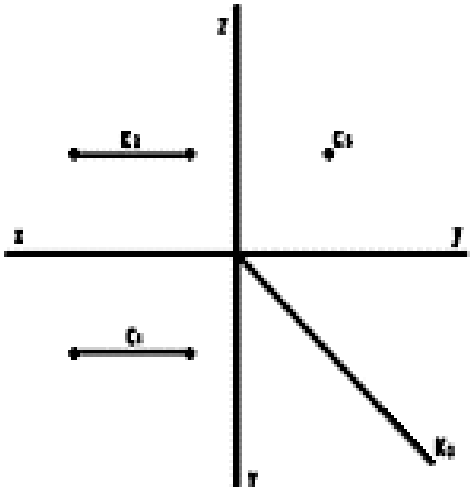


Рисунок 3.9 – Профільно проекціююча пряма

Профільно проекціююча пряма (рис. 3.9)

$$c \perp \Pi_3;\ c \parallel \Pi_1;\ c \parallel \Pi_2;$$

$$c_1 \parallel x;\ c_2 \parallel x;$$

c_3 **– точка.**

ЛЕКЦІЯ 4.

ТЕМА 4. ПРЯМОКУТНІ ПРОЕКЦІЇ ПЛОЩИНИ.

1. Площина, її задання на кресленні. Сліди площини.
2. Головні лінії площини
3. Положення площини відносно площин проекцій.

1. Площина, її задання на кресленні. Сліди площини

Площина – найпростіша поверхня (1-го порядку).

<u>Положення площини в просторі може бути задано:</u>

1. Трьома точками, що не лежать на одній прямій (рис. 4.1 *а)*);
2. Прямою і точкою поза прямою (рис. 4.1 *б)*);
3. Двома прямими, що перетинаються в невласній точці (пересічними (рис. 4.1 *в)*);або паралельними (рис. 4.1 *г*)).

Задання площини на кресленні виконується проекціями цих же геометричних елементів. Крім того, площина може бути задана також проекціями відсіку плоскої фігури (рис. 4.1 *д)*).

Іноді доцільно задати площину не довільними пересічними прямими, а прямими, по яких ця площина перетинає площини проекцій. Ці прямі називають слідами площини, а такий варіант завдання площини називають методом задання площини слідами.

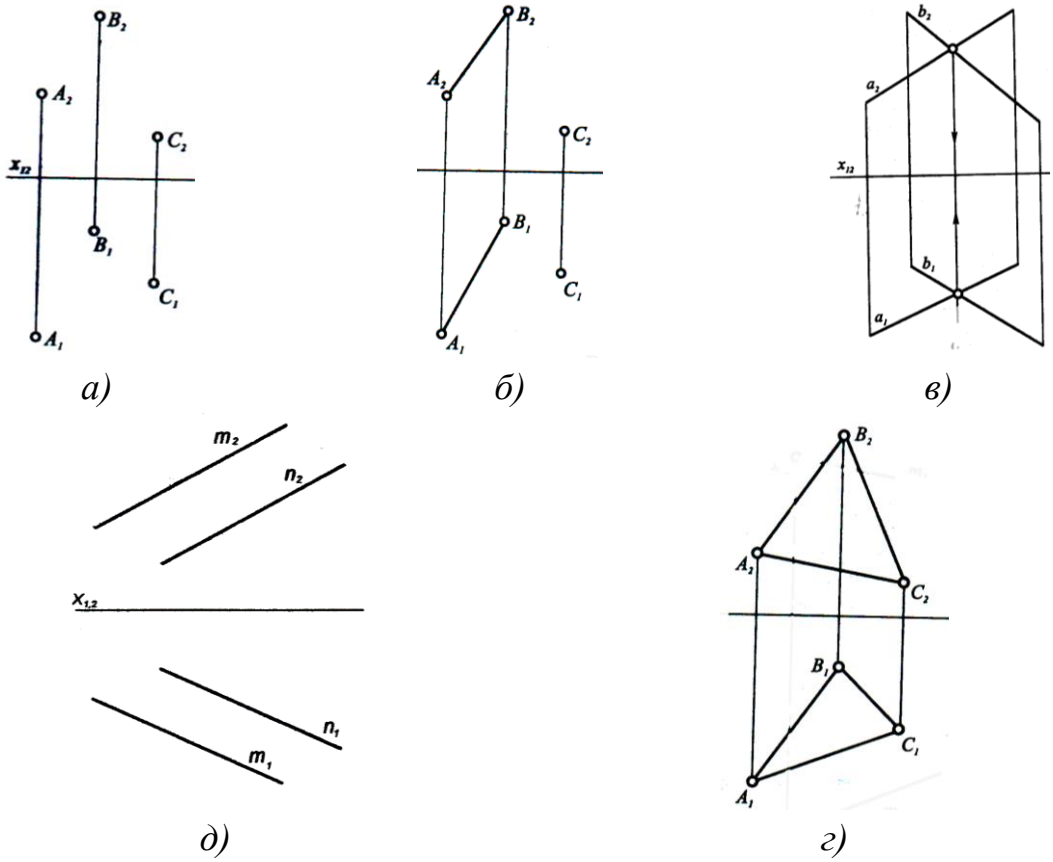


Рисунок 4.1 – Приклади задання площини

Площина, в якої кути нахилу до площин проекцій довільні (не рівні ***0°*** або **90°**), називається площиною загального положення.

Площина загального положення перетинає всі 3 площини проекцій. Лінії перетину площини з площинами проекції називаються ***<u>слідами</u>*** площини (рис. 4.2). Відповідні сліди площини позначають:

горизонтальний слід площини – $\boldsymbol{h^0}$

фронтальний слід площини – $\boldsymbol{f^0}$

профільний слід площини – $\boldsymbol{p^0}$

Точки, в яких перетинаються два сліди, називають точками сходу слідів.

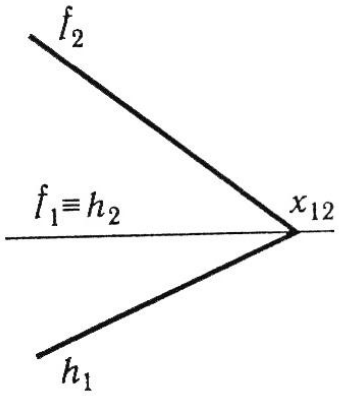


Рисунок 4.2 – Площина загального положення

2. Головні лінії площини

Пряма належить (інцидентна) площині, якщо дві її точки належать площині або якщо вона проходить через точку, інцидентну площині, та паралельна другій прямій, що належить площині. Площину зручно задавати трикутним відсіком. Для задання прямої, що належить площині (наприклад, пряма ***1−2*** на рис. 4.3), слід задати її горизонтальну чи фронтальну проекцію. Другу проекцію визначають за вертикальною відповідністю.

Точка належить площині, якщо вона інцидентна прямій, яка належить цій площині. Отже, щоб знайти другу проекцію точки, наприклад ***D*** (рис.4.4), потрібно провести через неї довільну пряму *l*.

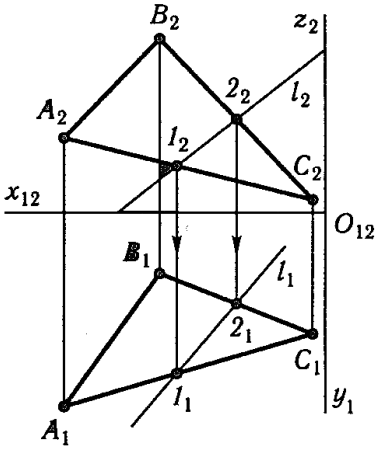


Рисунок 4.3 – Належність прямої площині

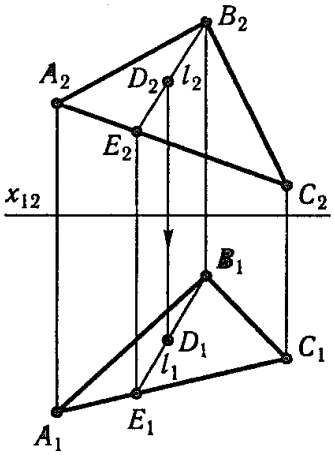


Рисунок 4.4 – Належність точки площині

Лінії рівня площини − це лінії, що належать цій площині та паралельні одній із площин проекцій.

Горизонталь − це лінія, яка лежить у площині й паралельна горизонтальній площині проекцій $\boldsymbol{П_1}$ (лінія ***h*** на рис. 4.5 *а))*.

Фронталь − це лінія, що лежить у площині та паралельна фронтальній площині проекцій $\boldsymbol{П_2}$ (лінія ***f*** на рис. 4.5 *а*)).

Горизонталь і фронталь дуже часто використовують для задання площини, що дає змогу виявити її орієнтацію відносно площин проекцій. Сліди площини, про які йшлося вище, також є горизонталлю ***h*** та фронталлю ***f*** і в цьому разі називаються ***нульовими*** (рис. 4.5 *б))*.

Профільна пряма − це лінія, яка належить площині та паралельна профільній площині проекцій $\boldsymbol{П_3}$.

Лінії нахилу площини до площини проекцій − це лінії, що належать площині та утворюють найбільший кут з відповідною площиною проекцій; зокрема, відносно поля $\boldsymbol{П_1}$ їх ще називають ***лініями найбільшого нахилу***, або ***лініями нахилу***.

На рисунку 4.5 *а)* проведено лінію нахилу ***BD***. На горизонтальній проекції ця лінія утворює прямий кут з проекцією горизонталі. Лінія нахилу відносно фронтальної площини проекцій $\boldsymbol{П_2}$ зберігає прямий кут з фронтальною проекцією фронталі.

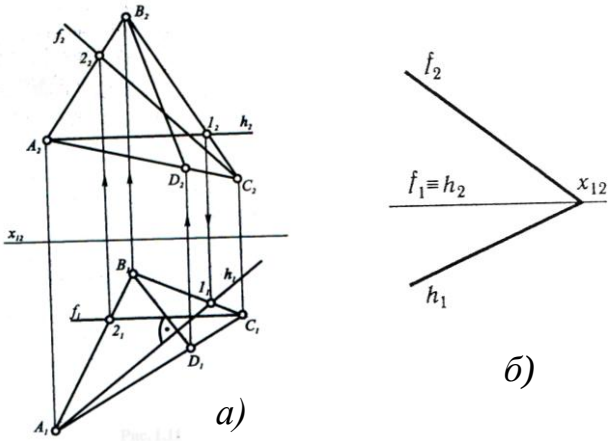


Рисунок 4.5 – Головні лінії площини

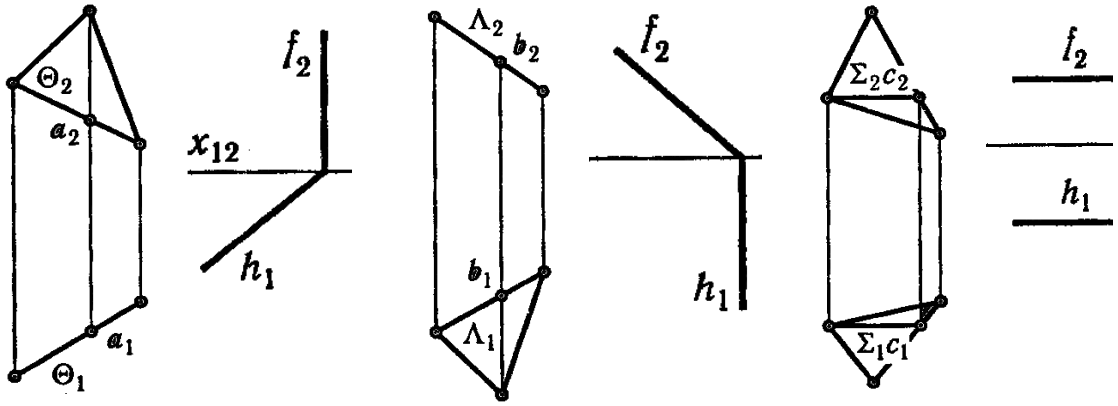
3. Окремі випадки розташування площин.

Крім розглянутого загального положення площина, стосовно площин проекцій, може займати наступні окремі положення:

Площини, перпендикулярні до площин проекцій називають проекціюючими **(**рис. 4.6**).**

Площини, що проекціюються, розрізняють:

1. Горизонтально-проекціююча, ⊥ $\boldsymbol{П_1}$ **(**рис. 4.6 *а)***)**;
2. Фронтально-проекціююча площина, ⊥ $\boldsymbol{П_2}$ **(**рис. 4.6 *б)***)**;
3. Профільно-проекціююча площина , ⊥ $\boldsymbol{П_3}$ **(**рис. 4.6 *в)***)**.



а) *б)* *в)*

Рисунок 4.6 – Проекціюючі площини

Площини, паралельні площині проекцій і одночасно перпендикулярні до двох інших площин проекцій називають площинами рівня (рис. 4.7)**.**

1. Площина, паралельна горизонтальній площині проекцій $\boldsymbol{П_1}$ і одночасно перпендикулярна площинам $\boldsymbol{П_2}$ та $\boldsymbol{П_3}$ називається **горизонтальною площиною** (рис. 4.7 *а*)).

2. Площина, паралельна фронтальній площині проекцій $\boldsymbol{П_2}$ і одночасно перпендикулярна площинам $\boldsymbol{П_1}$ та $\boldsymbol{П_3}$ називається **фронтальною площиною** (рис. 4.7 *б*)).

3. Площина, паралельна профільній площині проекцій $\boldsymbol{П_3}$ і одночасно перпендикулярна площинам $\boldsymbol{П_1}$ та $\boldsymbol{П_2}$ називається **профільною площиною** (рис. 4.7 *в*))**.**

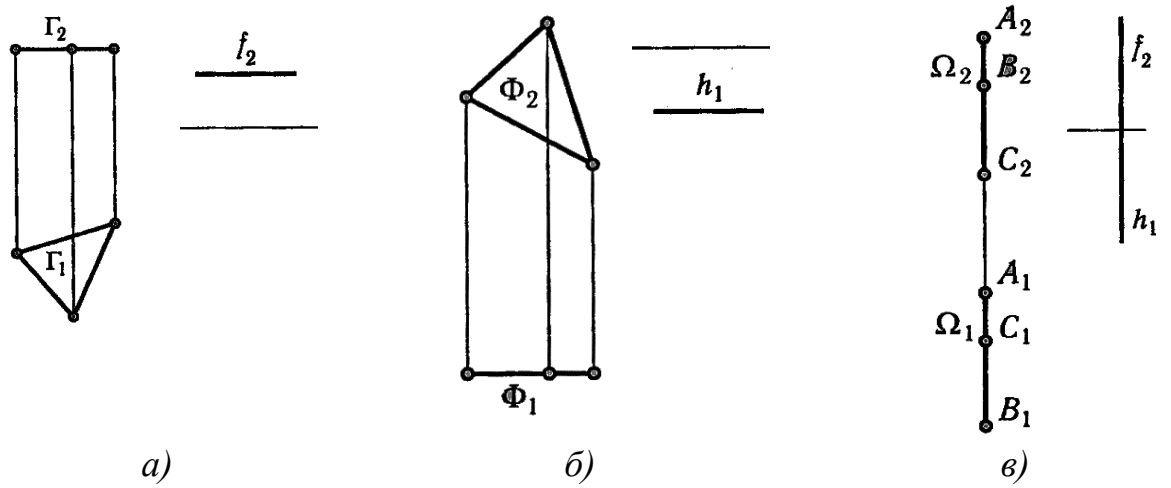


Рисунок 4.7 – Площини рівня

Проекціюючі площини, що проходять через бісектриси кутів, утворених осями координат, називають бісекторними площинами.

<u>Властивість бісекторної площини 2-го і 4-го октантів:</u>

Горизонтальна і фронтальна проекції будь-яких геометричних фігур, що належать цій площині, збігаються (тому що будь-яка точка цієї площини знаходиться на однаковій відстані від горизонтальної і фронтальної площин проекцій).

ЛЕКЦІЯ 5.

ТЕМА 5. МЕТРИЧНІ ТА ПОЗИЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ПРОЕКЦІЙ ПАР ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР

1. Точка і пряма.

2. Дві прямі.

3. Пряма і площина.

3. Дві площини.

1. Точка і пряма.

У просторі точка та пряма одна відносно одної можуть займати такі положення:

1. точка належить прямій (ідентична прямій);
2. точка не належить прямій.

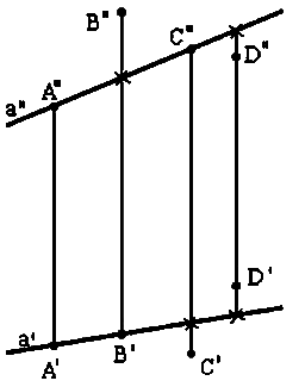


Рисунок 5.1 – Точка і пряма

Точка належить прямій, якщо її проекції належать тим самим проекціям прямої, і не належить прямій, якщо хоча б одна її проекція не належить тій самій проекції прямої (рис. 5.1).

Для того щоб через точку провести пряму, необхідно через проекції цієї точки провести однойменні проекції прямої.

Відстань від точки до прямої проекціюється в натуральну величину, якщо пряма є лінією нахилу площини, заданої точкою та прямою, до однієї з площин проекцій (рис. 5.2).

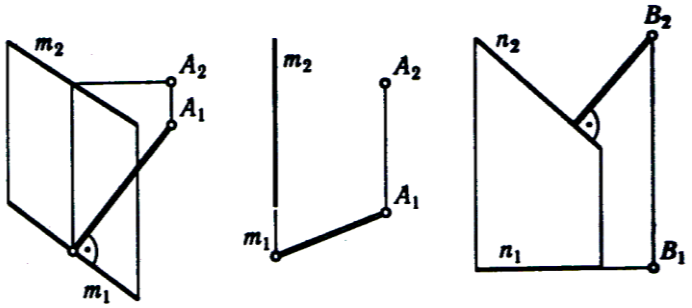


Рисунок 5.2 – Відстань від точки до прямої

2. Дві прямі.

Прямі в просторі можуть перетинатися і бути мимобіжними. При цьому перетинання може бути в невласній точці. У цьому випадку прямі називають паралельними.

1. Якщо прямі перетинаються в просторі, то їхні однойменні проекції перетинаються, причому точка перетину проекцій лежить на одній лінії зв'язку (рис.5.3 *а)*).

2. Якщо прямі паралельні в просторі, то їхні однойменні проекції паралельні між собою (мають невласну точку перетину) (рис.5.3 *б)*).

3. Якщо прямі мимобіжні в просторі, то точки перетину їх однойменних проекцій не належать одній вертикальній чи горизонтальній лінії сполучення (рис.5.3 *в)*).

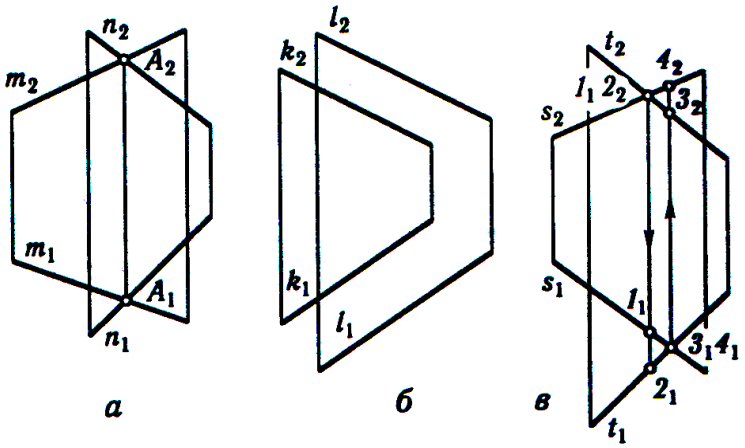


Рисунок 5.3 – Взаємне положення прямих

Відстань між двома паралельними прямими загального положення зображується в натуральну величину, якщо прямі є лініями нахилу площини,яку вони задають, до однієї з площин проекцій (рис. 5.4).

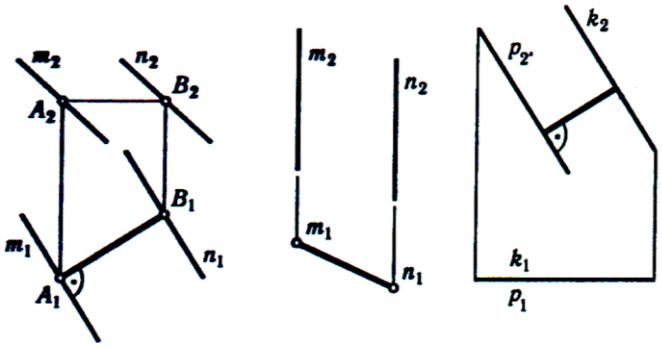


Рисунок 5.4 – Відстань між паралельними прямими.

3. Пряма і площина

Взаємне положення прямої і площини.

Пряма і площина в просторі можуть мати одну власну або невласну загальну точку або безліч загальних точок, отже, пряма може:

1. бути їй паралельна,
2. перетинатися з площиною,
3. збігатися з площиною

3.1 Паралельність прямої і площини.

З елементарної геометрії відомо, що пряма паралельна площині, якщо в площині можна провести пряму, паралельну заданій прямій.

$$(m \parallel n) \wedge (n \in \theta) \Rightarrow m \parallel \theta$$

Через точку, що не належить площині, можна провести нескінченну кількість прямих, паралельних площині. Для одержання єдиного рішення потрібно накласти додаткову умову, наприклад, побудувати пряму, паралельну одночасно двом площинам.

Приклад 1 (рис.5.5): Через точку ***A*** провести пряму ***l***, паралельну заданій площині і площині проекцій Π_2.

$$l_2 \parallel N_2M_2, \quad l_1 \parallel M_1N_1$$

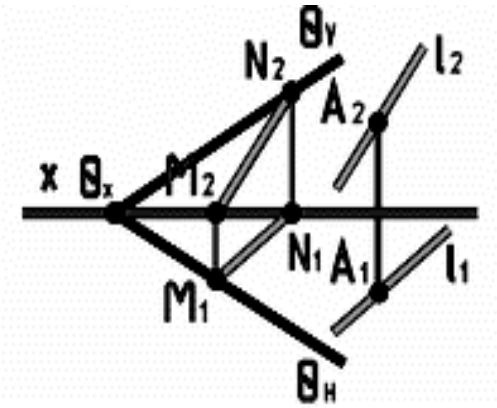


Рисунок 5.5 – Пряма паралельна площині

Приклад 2 (рис. 5.6): Через точку ***A*** провести пряму, паралельну площині, заданій паралельними прямими ***a*** і ***b***.

$$l_2 \parallel f_2, \quad l_1 \parallel f_1$$

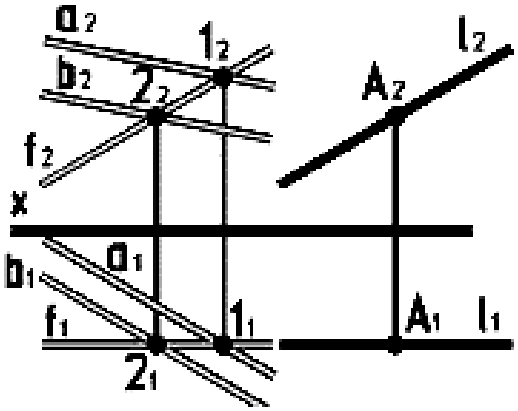


Рисунок 5.6 – Пряма паралельна площині

3.2 Перетин прямої з площиною.

Визначення точки перетину прямої з площиною відноситься до елементарних задач нарисної геометрії, але значення цієї задачі велике, тому що ця задача входить складовою частиною в вирішення багатьох інших позиційних і метричних задач.

Метричні задачі – задачі, у яких визначають розміри геометричних елементів і відстані між ними.

Приклад (рис. 5.7). Визначити точку перетину прямої ***l*** і площин, заданої трикутником ***ABC***.

Для визначення точки перетину прямої з площиною доцільно застосовувати спосіб допоміжних січних площин. Алгоритм розв'язання задачі складається з трьох операцій: 1) через пряму проводять допоміжну роекціюючу площину ***Г***; 2) знаходять лінію перетину заданої площини з допоміжною – лінія ***1-2***; 3) визначають точку перетину двох прямих заданої ***l*** та лінії перетину ***1-2*** – точку ***D***.

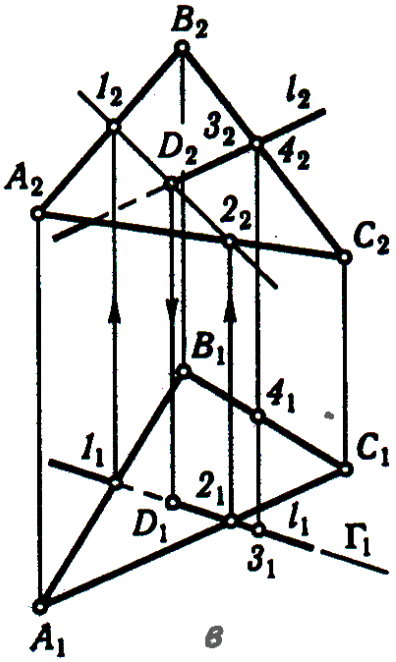


Рисунок 5.7 – Пряма перетинає площину

<u>Визначення видимості на епюрах.</u>

При перетині прямої з площиною для поліпшення наочності креслення для показу видимих ліній застосовують суцільні основні лінії, для невидимих ліній – штрихові. При відображенні видимості ліній на епюрі передбачається, що:

1. Площини і поверхні непрозорі.
2. Спостерігач завжди знаходиться в першій чверті або першому октанті.
3. Промінь зору від спостерігача перпендикулярний до тієї або іншої площини проекцій (стосовно якої визначається видимість).

<u>Метод конкуруючих точок.</u>

Точки, що належать різним геометричним об'єктам і лежать на одному промені, що проектується, називаються конкуруючими у видимості стосовно тієї площини проекцій, до якої промінь, що проектується, перпендикулярний.

На епюрі з двох конкуруючих точок буде видима та проекція, що далі відстоїть від площини проекцій, стосовно якої вони конкурують.

При визначенні видимості на площині Π_1 розглядаємо проекції конкуруючих точок на площині Π_2, а при визначенні видимості на площині Π_2 розглядаємо проекції конкуруючих точок на площині Π_1.

Пряма перпендикулярна до площини.

Пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох прямих площини, що перетинаються між собою. За дві прямі, що перетинаються, беруть горизонталь і фронталь площини загального положення **(**рис. 5.8**)**.

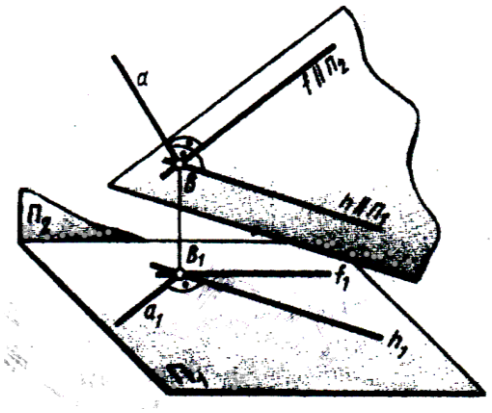


Рисунок 5.8 – Пряма перпендикулярна площині

Якщо в площині взяти не довільні перетинні прямі, а її горизонталь і фронталь, то з'являється можливість скористатися теоремою про проектування прямого кута:

«Якщо з двох взаємно перпендикулярних прямих одна пряма окремого положення, то прямий кут між ними проекціюється без спотворення на ту площину проекцій, якій паралельна пряма окремого положення».

На рисунку 5.9 показано приклад побудови перпендикуляра до площини загального положення. В площині ***α(ABC)*** проводять горизонталь ***DE*** і фронталь ***DF***. На $\boldsymbol{\Pi_1}$ горизонтальну проекцію перпендикуляра проводять з проекції точки $\boldsymbol{A_1}$ до горизонтальної проекції горизонталі $\boldsymbol{D_1E_1}$. На $\boldsymbol{\Pi_2}$ фронтальну проекцію перпендикуляра проводять з проекції точки $\boldsymbol{A_2}$ до фронтальної проекції фронталі $\boldsymbol{D_2F_2}$.

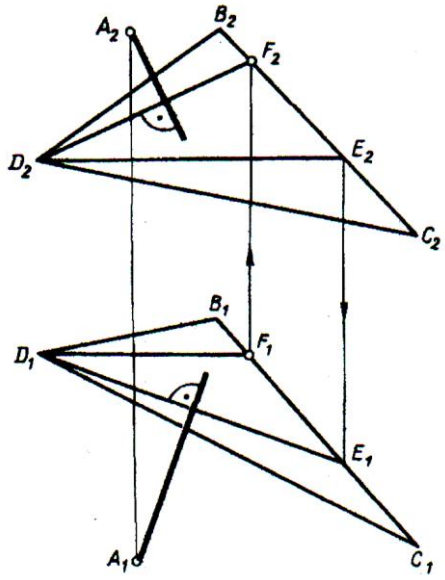


Рисунок 5.9 – Пряма перпендикулярна площині

4. Взаємне положення двох площин.

Дві площини в просторі можуть перетинатися по власній і невласній прямій, отже вони можуть перетинатися або бути паралельними.

4.1 Паралельні площини.

З елементарної геометрії відома теорема (ознака паралельності площин):

Якщо дві прямі, що перетинаються однієї площини паралельні двом прямим, що перетинаються іншої площини, то ці площини паралельні.

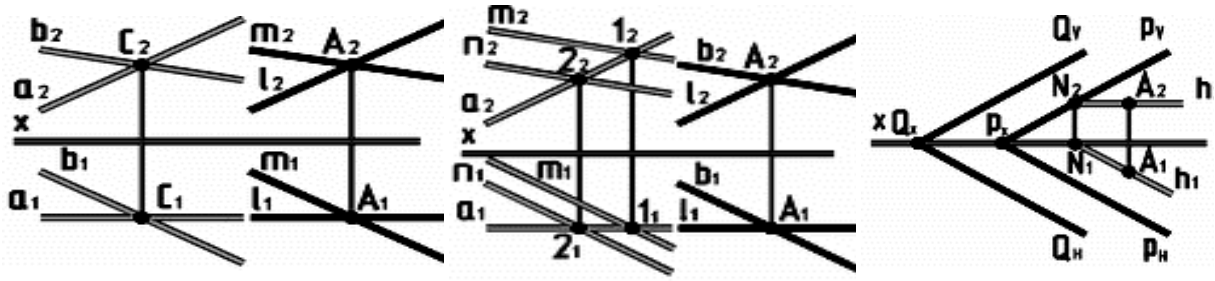
Наслідок: якщо площини задані слідами й однойменні сліди площин паралельні, то і площини паралельні (рис. 5.10 *в)*)

$$(\theta_H \parallel P_H) \wedge (\theta_V \parallel P_V) \wedge (\theta_W \parallel P_W) \Leftrightarrow \theta \parallel P$$

З цього співвідношення випливає, що якщо хоча б одна пара однойменних слідів перетинається, то і площини перетинаються.

З цих визначень легко вивести спосіб побудови паралельних площин на кресленні.

Приклад: Через точку ***A*** провести площину, паралельну заданій (рис. 5.10).



$l_2 \parallel a_2$, $l_1 \parallel a_1$
$m_2 \parallel b_2$, $m_1 \parallel b_1$
а)

$b_2 \parallel m_2$, $b_1 \parallel m_1$
$l_2 \parallel a_2$, $l_1 \parallel a_1$
б)

$h_2 \parallel X$, $h_1 \parallel \theta_H$
$\theta_H \parallel P_H$
в)

Рисунок 5.10 – Паралельні площини

Для площин загального положення $(\theta_H \parallel P_H) \wedge (\theta_V \parallel P_V) \Rightarrow (\theta_W \parallel P_W)$ Умова паралельності θ_W і P_W перевіряється побудовою.

4.2 Перетинні площини.

Дві площини перетинаються по прямої лінії, отже для визначення лінії перетину досить знайти:

а) дві точки, що належать одночасно кожній з двох заданих площин;

б) одну точку, якщо відомо напрямок лінії перетину.

При перетині площин можуть бути три випадки: 1) обидві площини є прокціюючими відносно однієї й тієї самої площини проекцій; 2) одна з

площин – проекціююча, а друга – загального положення; 3) обидві площини загального положення.

На рис. 5.11 *а* зображено два вертикальних трикутних відсіки. Перетин їхніх горизонтальних проекцій дає вертикальну лінію перетину двох площин, яку за вертикальною відповідністю визначають на полі Π_2.

На рис. 5.11 *б* один з відсіків, що перетинаються, займає загальне положення, а другий – горизонтально проекціюючий. Лінія взаємного перетину площин у цьому випадку збігається на полі Π_1 з горизонтальною проекцією проекціюючого відсіку ***DEF*** – це пряма $1_1\ 2_1$. За вертикальною відповідністю визначають фронтальну проекцію лінії перетину двох площин.

На рис. 5.11 *в* показано визначення лінії перетину двох відсіків загального положення. Лінію перетину знайдено за точками перетину двох сторін одного відсіку з площиною другого. З цією метою через пряму ***DE*** проведено фронтально проекціюючу площину Ω_2, а через пряму ***DF*** – проекціюючу площину Φ_2. На цих двох прямих знайдено точки перетину ***N*** і ***M***, які й визначають лінію перетину двох площин.

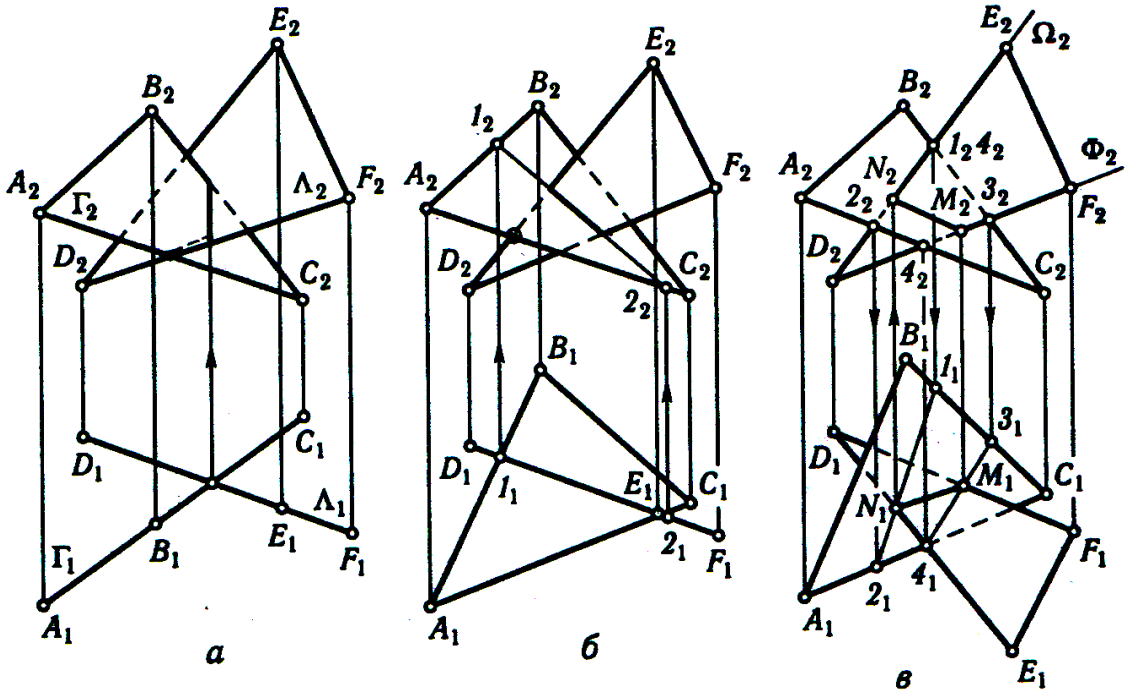


Рисунок 5.11 – Перетин площин

Перетин площин, заданих слідами.

У випадку, коли площини задані слідами і сліди перетинаються у полі креслення, визначають точки перетину однойменних слідів площин. Ці точки загальні для двох площин. Вони ж є слідами лінії перетину заданих площин.

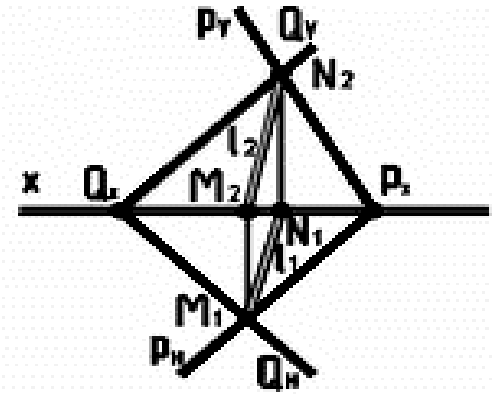


Рисунок 5.12 – Перетин площин, заданих слідами

Побудова лінії перетину двох площин загального положення, заданих слідами (рис. 5.12):

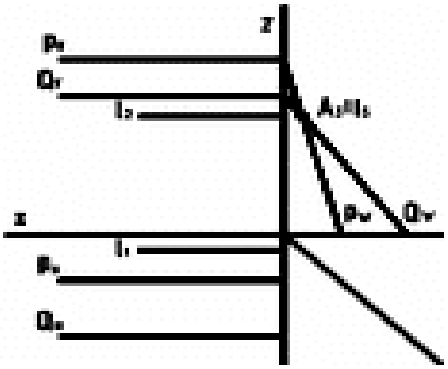
1. Будуємо точки перетину однойменних слідів.

$$N_2 = \theta_V \cap P_V = l \cap V; \;\; M_1 = \theta_H \cap P_H = l \cap H$$

2. Будуємо фронтальну проекцію ***(M_2)*** горизонтального сліду **(M_1)** і горизонтальну проекцію **(N_1)** фронтального сліду **(N_2)**.

3. Будуємо проекції лінії перетину **(l_1** і **l_2)**, з'єднуючи однойменні проекції її слідів.

Якщо дві площини, що перетинаються є проекціюючими щодо однієї площини проекцій, то лінія їхнього перетину – проекціююча пряма (рис. 5.13).



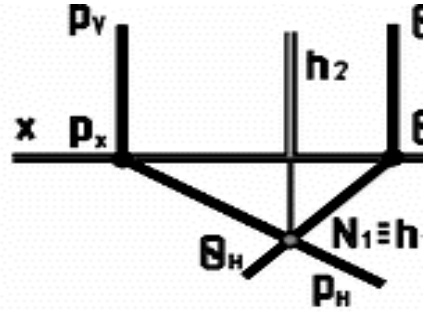


Рисунок 5.13 – Перетин проекціюючих площин

Якщо одна з пересічних площин окремого положення, то проекція лінії перетину збігається з проекцією площини (рис. 5.14).

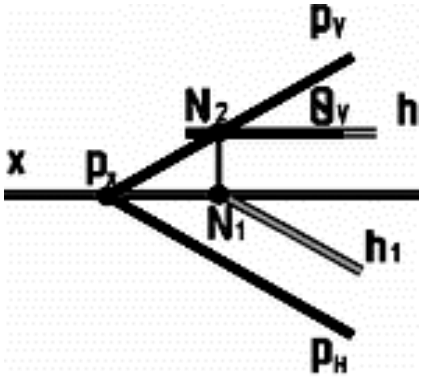


Рисунок 5.14 – Перетин площин

У більш загальних випадках:

а) коли площини задані слідами, але сліди не перетинаються в межах креслення (рис. 5.14 *а)*);

б) коли одна з площин задана слідами, а інша площина лініями (рис. 5.14 *б)*);

в) коли обидві площини задані лініями або плоскими фігурами (рис. 5.14 *в)*).

Для побудови лінії перетину застосовують спосіб додаткових площин-посередників.

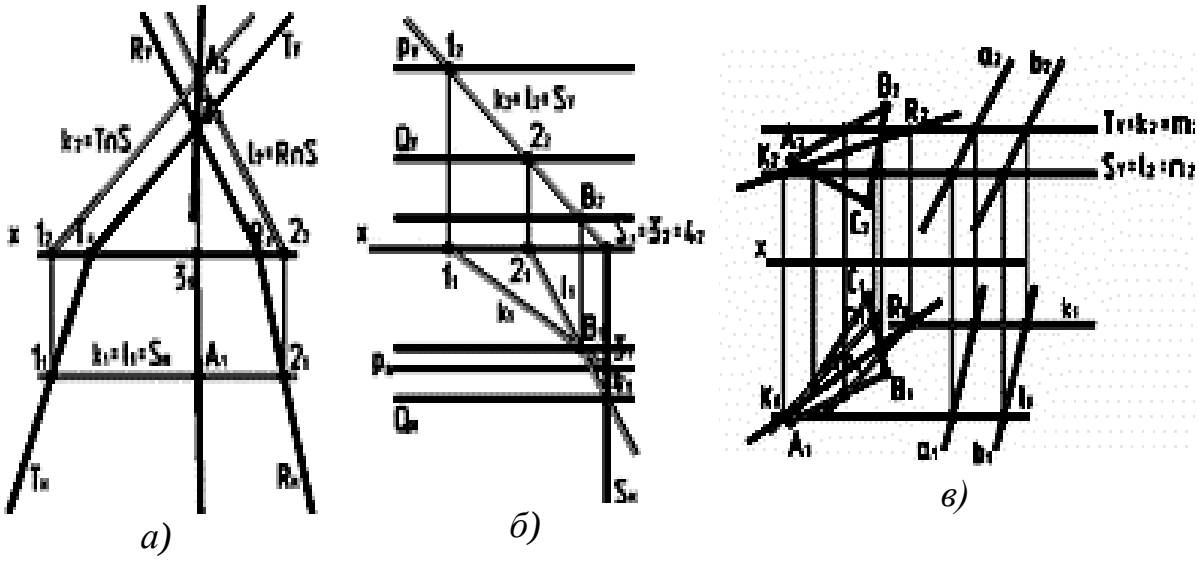


Рисунок 5.14 – Загальні випадки перетину площин

Отже, спосіб введення додаткової площини-посередника складається з:

1. введення допоміжної січної площини окремого або загального положення, що перетинається з двома заданими площинами.
2. знаходження лінії перетину введеної площини з кожною з заданих.
3. знаходження загальної точки, що належить трьом площинам. Ця точка буде належати шуканій лінії перетину.
4. з’єднання однойменних проекцій точок – знаходження лінії перетину площин.

Якщо однієї площини-посередника недостатньо для рішення задачі, то вводять ще стільки площин, скільки необхідно.

Як площини-посередники необхідно вибирати площини окремого положення.

Перпендикулярність площин.

Дві площини взаємно перпендикулярні, якщо одна з них містить пряму, перпендикулярну іншій площині.

Тому побудову площини ***P***, перпендикулярної до площини ***θ***, можна здійснити двома шляхами:

1. Проводимо пряму ***m,*** перпендикулярну до площини ***θ***, потім пряму ***m*** заключаємо в площину ***P***.

$$(m \perp \theta) \cap (m \in P) \Rightarrow P \perp \theta$$

2. Проводимо пряму ***n***, перпендикулярну або паралельну площині ***θ***, потім будуємо площину ***P***, перпендикулярну прямій **n**.

$$(n \parallel \theta) \cap (n \perp P) \Rightarrow P \perp \theta$$

Через пряму ***m*** можна провести безліч площин (перший шлях рішення) і в площині або паралельно їй можна провести безліч прямих ***n*** (другий шлях рішення), то задача має безліч рішень.

Тому для одержання єдиного рішення потрібно накласти додаткові умови, наприклад, щоб площина ***P*** проходила через точку ***A***, що належить іншій площині (***θ***).

Приклад: Дані площина ***P(△ ABC)*** і точка ***D*** (рис. 5.15).

Потрібно через точку ***D*** провести площину ***θ*** перпендикулярну площині ***P.***

$$a \in \theta,\ D \in a.$$

Площину ***P*** зручно задати:

$$C_1 \in h, \quad A_2 \in f,$$

$$n_2 \perp f_2 \quad n_1 \perp h_1 \quad (D \in n)$$

$$\theta\ (n \cap a)$$

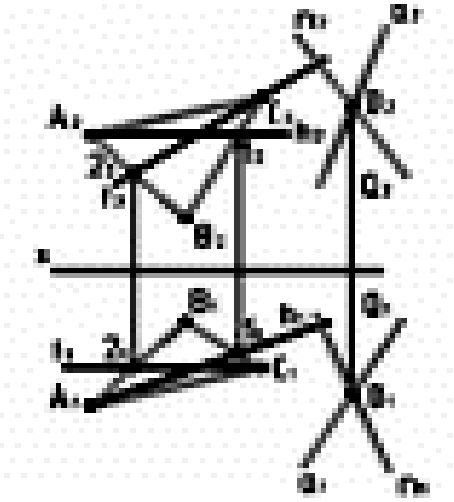


Рисунок 5.15

Розглянемо випадок коли що горизонтально проекціююча площина ***S*** перпендикулярна до площини загального положення ***P*** (рис. 5.16).

Якщо $(S \perp H) \wedge (S \perp P)$,

то $S \perp P_H$, як до лінії перетину площин ***P*** і ***H***. $P_H = P \cap H$.

Звідси $P_H \perp S$ і, отже $P_H \perp S_H$, як до однієї з прямих у площині ***S***.

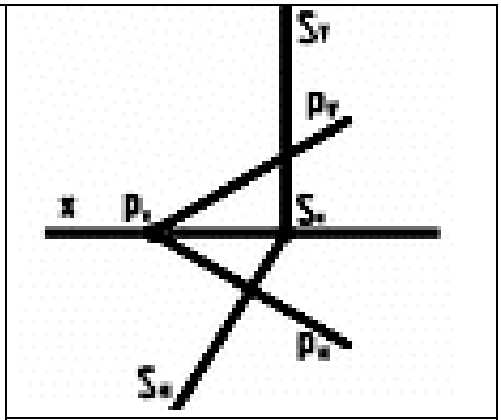


Рисунок 5.16

ЛЕКЦІЯ 6

ТЕМА 6 МЕТОДИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПРОЕКЦІЙ

1. Загальні відомості.
2. Заміна площин проекцій.
3. Плоско-паралельне переміщення.
4. Обертання навколо ліній рівня.

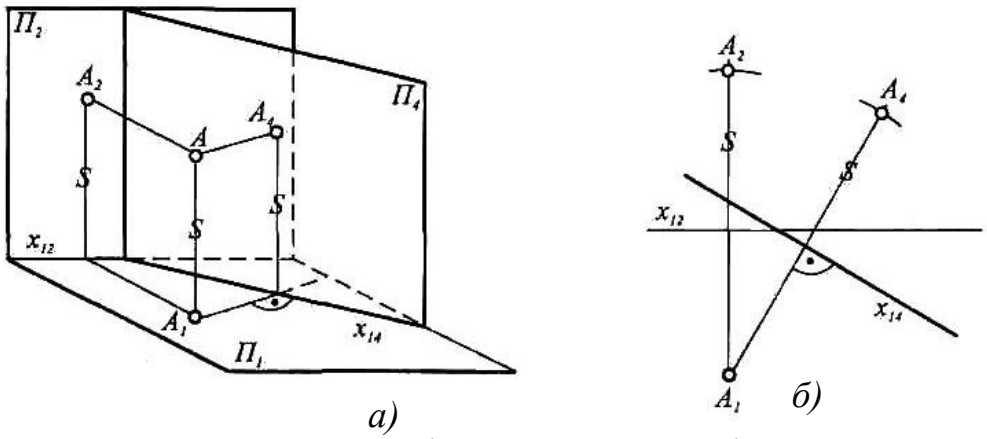
Метричні та позиційні характеристики геометричних образів легко визначити при їх окремому положенні відносно площин проекцій. Оскільки на практиці геометричні образи найчастіше знаходяться в загальному положенні, треба їх привести із загального положення в окреме.

Метричні задачі зводяться до розв'язання чотирьох основних задач:

1) перетворення прямої загального положення в пряму рівня;
2) перетворення прямої загального положення в проекціюючу;
3) перетворення площини загального положення в проекціюючу;
4) перетворення площини загального положення в площину рівня.

На рисунку 6.1 *а)* задано точку ***A*** в системі площин проекцій $\boldsymbol{П_1}$ та $\boldsymbol{П_2}$. Проведемо вертикальну площину $\boldsymbol{П_4}$, яка перетнеться з площиною $\boldsymbol{П_1}$ по осі $\boldsymbol{x_{14}}$.

Точку ***A*** спроекціюємо на $\boldsymbol{П_4}$ прямою, перпендикулярною до $\boldsymbol{П_4}$. Таким чином, у системі взаємно перпендикулярних площин проекцій $\boldsymbol{П_1}$ і $\boldsymbol{П_4}$ матимемо дві проекції точки $\boldsymbol{A}$ –$\boldsymbol{A_1}$ та $\boldsymbol{A_4}$. Як видно з рисунка, при заміні площини проекцій відстань від старої проекції $\boldsymbol{A_2}$ точки ***A*** до старої осі $\boldsymbol{x_{12}}$ дорівнює відстані від нової проекції $\boldsymbol{A_4}$ точки ***A*** до нової осі $\boldsymbol{x_{14}}$. На рисунку 6.1 *б)* ці ж дії повторені на комплексному рисунку. При розв'язанні різних задач, переважно метричних, доводиться робити не одну, а дві, інколи навіть три заміни площин проекцій.



а)

Рис. 6.1 – Заміна площин проекцій

На рисунку 6.2 однією заміною знайдена натуральна величина відрізка прямої ***AB***, для чого проведена проекціююча площина проекцій $\boldsymbol{П_4}$ паралельно горизонтальній проекції відрізка, а щоб спроекціювати відрізок у точку, проведено площину $\boldsymbol{П_5}$ перпендикулярно до натуральної величини й одержано проекцію відрізка – $\boldsymbol{A_5B_5}$.

Натуральна величина трикутного відсіку знайдена на рисунку 6.3. Спочатку відсік поставлено у проекціююче положення, для цього в ньому проведено горизонталь ***AD*** і перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі проведено площину $\boldsymbol{П_4}$, а потім паралельно лінійній проекції відсіку проведено площину $\boldsymbol{П_5}$. Натуральна величина відсіку – трикутник $\boldsymbol{A_5B_5C_5}$.

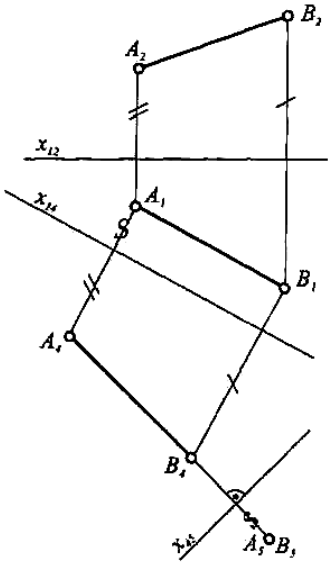


Рисунок 6.2 – Переведення прямої загального положення у пряму проекціюючого заміною площин проекцій

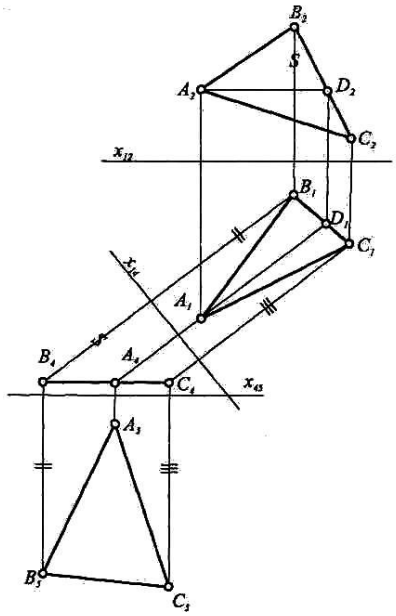


Рисунок 6.3 – Знаходження натуральної величини трикутного відсіку методом заміни площин проекцій

Якщо в способі заміни площин проекцій геометричні образи вважаються зафіксованими в просторі, а до них певним чином проводяться нові площини проекцій, то в способі ***плоско-паралельного переміщення*** все відбувається навпаки. Основні площини проекцій $\boldsymbol{П_1}$ та $\boldsymbol{П_2}$ вважаються зафіксованими в просторі, а геометричні образи обертаються певним чином, щоб перевести їх із загального положення в окреме. На рисунку 6.4 *а*) відрізок прямої загального положення ***AB*** поворотом навколо вертикальної осі ***i*** поставлений у положення, паралельне площині проекцій $\boldsymbol{П_2}$, при цьому він зобразиться в натуральну величину. Але, як видно з рисунка,

положення осі не має значення, досить розташувати, в цьому випадку, горизонтальну проекцію відрізка горизонтально, тобто паралельно $\boldsymbol{П_2}$, і на фронтальній проекції одержимо таку ж натуральну величину відрізка. На тому ж рисунку відрізок ще раз повернуто у вертикальне положення, при якому він на полі $\boldsymbol{П_1}$ спроекціюється в точку (рис. 6.4 *б*). Якщо перший поворот відрізка було здійснено навколо невиявленої горизонтально-проекціюючої осі, то другий поворот – навколо невиявленої фронтально-проекціюючої осі.

У способі заміни площин проекцій наявність осей проекцій обов'язкова, тому що від них здійснюється відлік відстаней, а в способі плоско-паралельного переміщення осі можна не фіксувати, бо вони не впливають на одержані результати.

Натуральну величину трикутного відсіку ***ABC*** знайдено на рисунку 6.5. Для цього спочатку трикутник поставлено у проекціююче положення, за допомогою проведеної горизонталі ***DC*** трикутник повернуто навколо вертикальної невиявленої осі так, щоб горизонтальна проекція горизонталі розташувалася перпендикулярно до поля $\boldsymbol{П_2}$. При такому положенні горизонталь спроекціюється в точку, а весь відсік – в лінію $\overline{A}_2\overline{B}_2\overline{C}_2$. Нарешті, лінійна проекція відсіку розташовується паралельно полю $\boldsymbol{П_1}$, при цьому відбувається обертання відсіку навколо фронтально-проекціюючої невиявленої осі. Трикутник $\overline{\overline{A}}_1\overline{\overline{B}}_1\overline{\overline{C}}_1$ є його натуральною величиною.

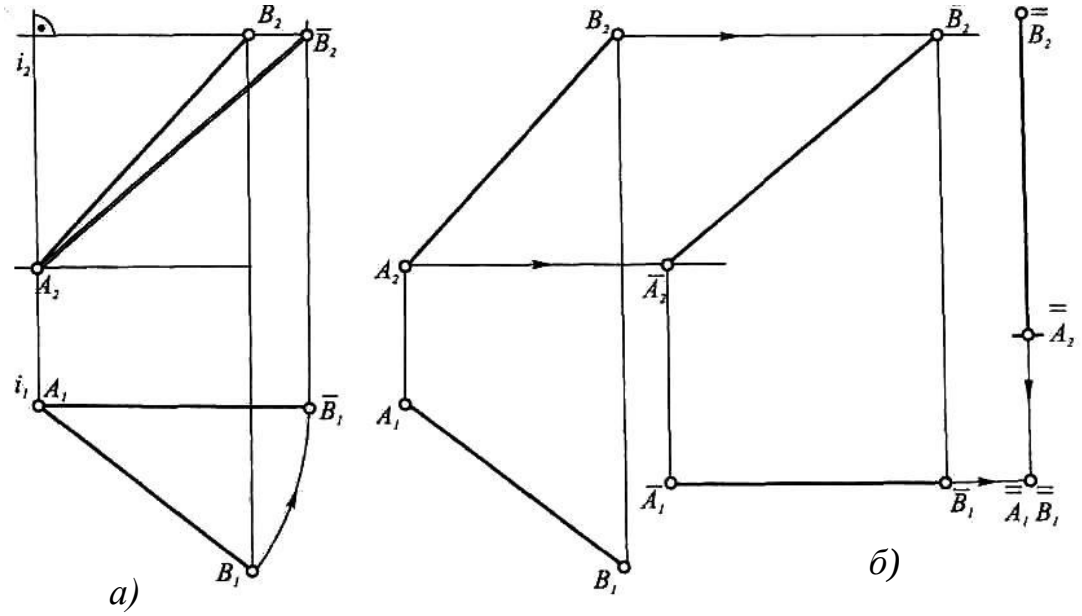


Рисунок 6.4 – Методи обертання

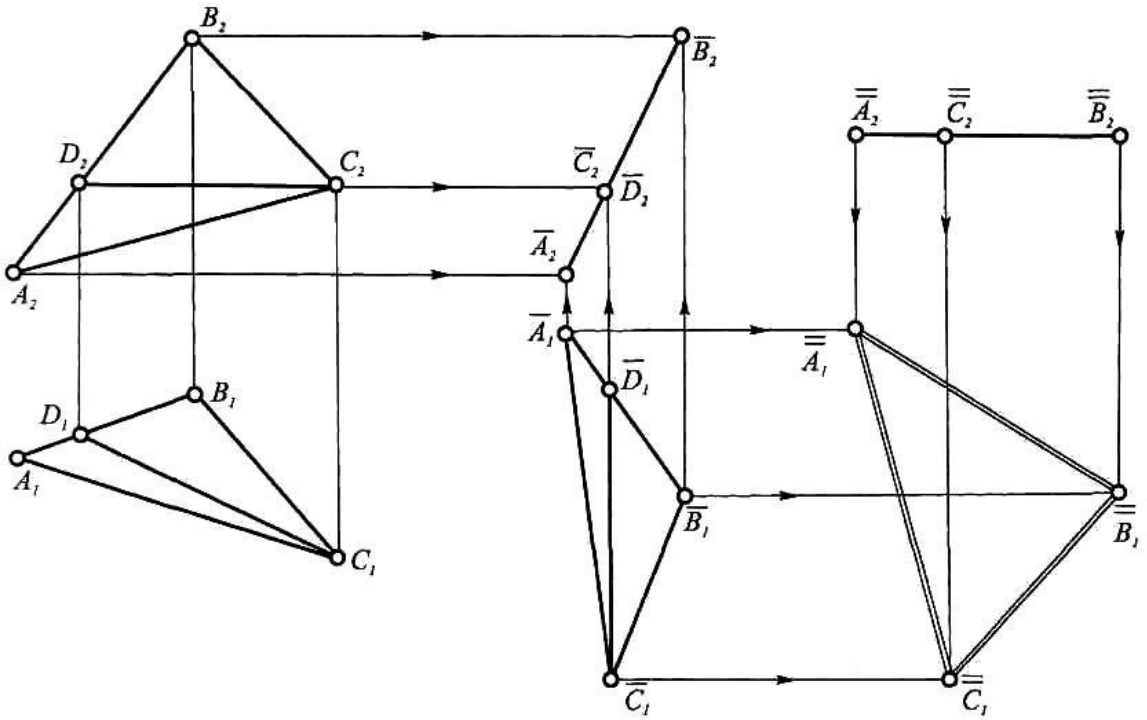


Рисунок 6.5 – Знаходження дійсної величини трикутника методом плоско-паралельного переміщення

Для визначення натуральних величин плоских фігур доцільно використати їх ***обертання навколо горизонталі або фронталі*** до положення, паралельного $\boldsymbol{П_1}$ чи $\boldsymbol{П_2}$.

На рисунку 6.6 знайдено натуральну величину трикутного відсіку ***ABC***. Для цього у відсіку проведено горизонталь ***AD***, горизонтальна проекція якої є натуральною величиною відрізка осі обертання. При обертанні точки ***A*** та ***D*** залишаються на місці, а точки ***B*** та ***C*** обертаються у вертикальних площинах, перпендикулярних до осі обертання. Натуральну величину відстані від точки ***B*** до горизонталі визначено способом прямокутного трикутника, одним катетом якого є відстань точки $\boldsymbol{B_1}$ до горизонталі, а другим – відстань від фронтальної проекції точки $\boldsymbol{B_2}$ до горизонталі. Гіпотенузою робиться засічка на траєкторії обертання точки ***B***. Оскільки точка $\boldsymbol{D_1}$ при обертанні залишається на місці, точка $\overline{C}_1$ знаходиться на перетині продовженої прямої $\overline{B}_1\overline{D}_1$ з траєкторією обертання точки ***C***.

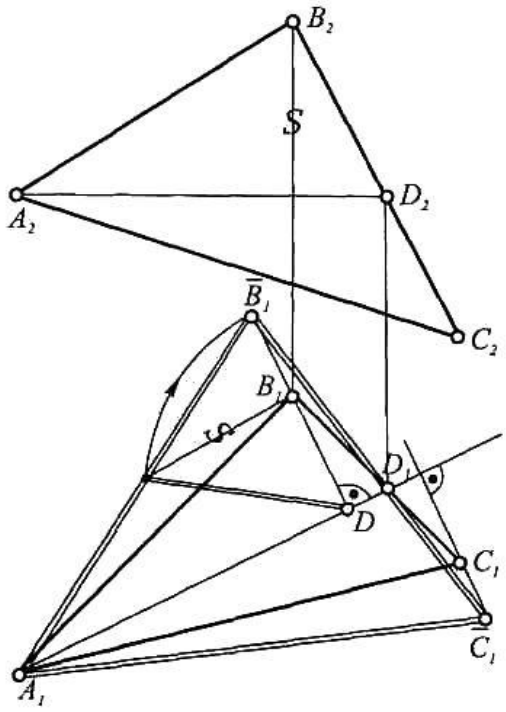


Рисунок 6.6 – Обертання навколо лінії рівня

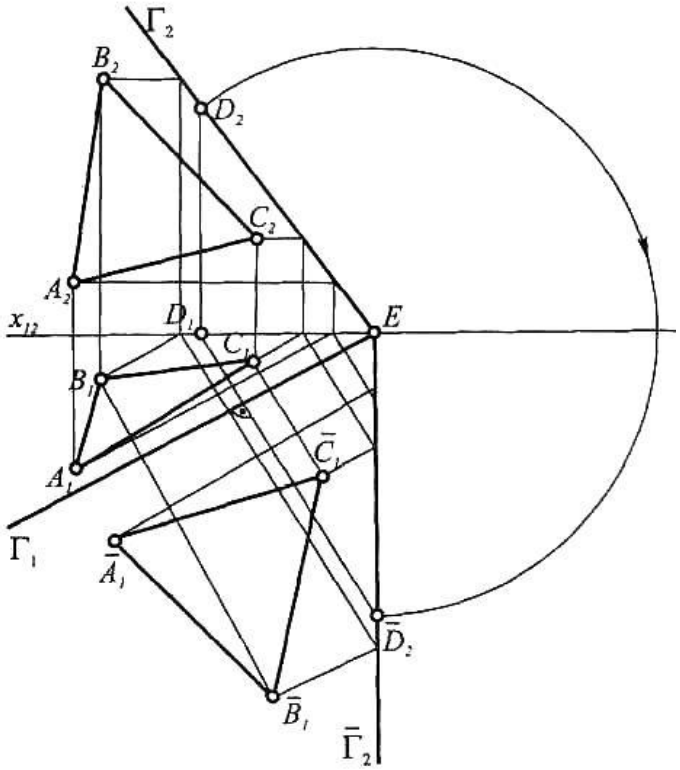


Рисунок 6.7 – Обертання навколо сліду площини

На рисунку 6.7 площину загального положення ***Г*** задано слідами. Сліди площини – це ті ж горизонталь і фронталь, тільки нульові, бо лежать у площинах проекцій $\boldsymbol{\Pi_1}$ та $\boldsymbol{\Pi_2}$. У цій площині треба задати рівносторонній трикутник. Спочатку площина суміщена з полем $\boldsymbol{\Pi_1}$ обертанням навколо нульової горизонталі (горизонтального сліду). Для цього на фронтальному сліді береться довільна точка ***D***, її горизонтальна проекція $\boldsymbol{D_1}$ буде обертатися навколо горизонтального сліду у вертикальній площині, перпендикулярній до цього сліду. Відстань від точки $\boldsymbol{D_2}$ до точки збігу слідів ***E*** зберігається, завдяки чому дугою кола з точки збігу слідів робимо засічку радіусом $\boldsymbol{D_2E}$ траєкторії обертання точки ***D*** у горизонтальній проекції, одержуємо точку $\overline{D}_2$. Через неї проводимо суміщений фронтальний слід площини. У суміщеному положенні довільно розташовуємо рівносторонній трикутник, через його вершини проводимо горизонталі, які визначаємо спочатку на полі $\boldsymbol{\Pi_1}$, а потім на $\boldsymbol{\Pi_2}$. Вершини трикутника знаходимо на цих горизонталях.

ЛЕКЦІЯ № 7

ТЕМА № 7 МНОГОГРАННИКИ

1. Перетин многогранників площиною.
2. Розгортка поверхні многогранника.

Многогранником називається просторова фігура, обмежена замкнутою поверхнею, що складається з відсіків площин, що мають форму многокутників.

Сторони многокутників утворюють **ребра,** а площини многокутників – **грані** многогранника.

Широко застосовуються прості многогранники. Многогранник називають простим, якщо: а) всі його грані є простими многокутниками, тобто такими, в яких жодна пара несуміжних сторін не має спільних точок; б) кожні дві несуміжні грані не мають спільних точок (за винятком загальної вершини); в) дві суміжні грані мають лише одне спільне ребро і не мають інших спільних точок.

З усіх простих многогранників практичний інтерес становлять піраміди та призми.

Пірамідою називають многогранник,усі грані якого, крім однієї, мають спільну вершину (рис. 7.1). Оскільки всі бічні грані піраміди – трикутники, піраміда цілком визначається заданням її основи та вершини.

Призмою називають многогранник, обмежений призматичною поверхнею та двома паралельними площинами, не паралельними ребрам призми (рис. 7.2). Ці дві грані називають *основами* призми, які є рівними між собою многокутниками. Бічні ребра призми дорівнюють і паралельні одне одному. Якщо основи не паралельні між собою, то призму називають *зрізаною*. Якщо бічні ребра перпендикулярні до основи, призму називають *прямою*, якщо ні, – *похилою*.

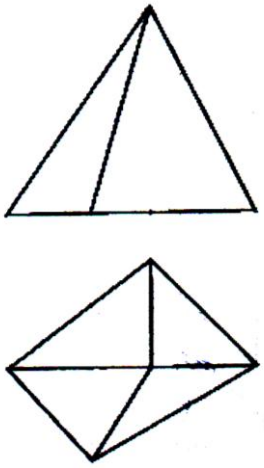


Рисунок 7.1 – Проекції піраміди

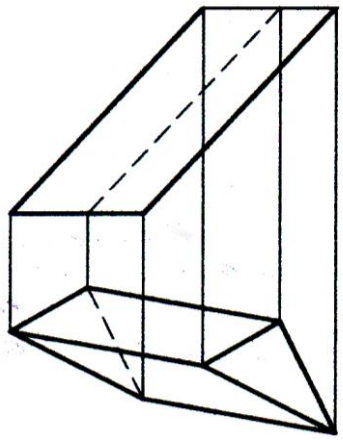


Рисунок 7.2 – Проекції призми

1. Перетин многогранників площиною.

Проекціями перетину многогранників площиною в загальному випадку є плоскі многокутники, вершини яких належать ребрам, а сторони – граням многогранника.

Задачу по визначенню лінії перетину поверхні многогранника площиною можна звести до багаторазового рішення задачі по знаходженню:

а) лінії перетину двох площин (граней многогранника і січної площини) або

б) точки зустрічі прямої (ребер многогранника) із січною площиною.

***Задача 1*:**

1. Побудувати перетин піраміди площиною;
2. Визначити видимість перетину і піраміди на Π_1 і Π_2;
3. Побудувати дійсну величину перетину;
4. Побудувати розгортку нижньої зрізаної частини піраміди.

Розв'язування. На рисунку 7.3 фронтально проекціююча січна площина α перетинає поверхню похилої піраміди. Знаходять точки перетину площини α з ребрами піраміди і отримують точки $1, 2, 3$:

$$\alpha \cap SA = 1,\ \alpha \cap SB = 2,\ \alpha \cap SC = 3.$$

На Π_1 отримують фігуру перерізу $\Delta 1_1,2_1,3_1$, яка не має натуральної величини. Щоб побудувати натуральну величину, фронтальну проекцію площини $\alpha_2(\Delta 1_2,2_2,3_2)$ переміщують в положення, паралельне осі $x_{1,2}$, а потім за допомогою вертикальних і горизонтальних ліній зв'язку отримують на Π_1 натуральну величину $\Delta 1'_1,2'_1,3'_1$.

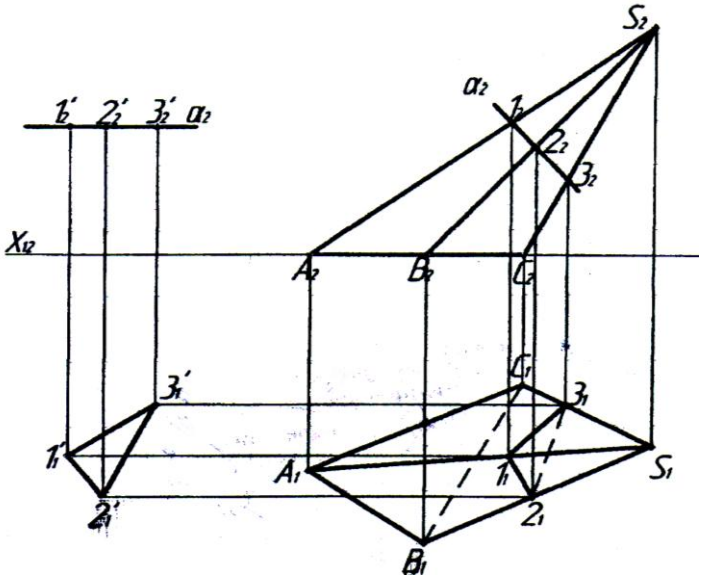
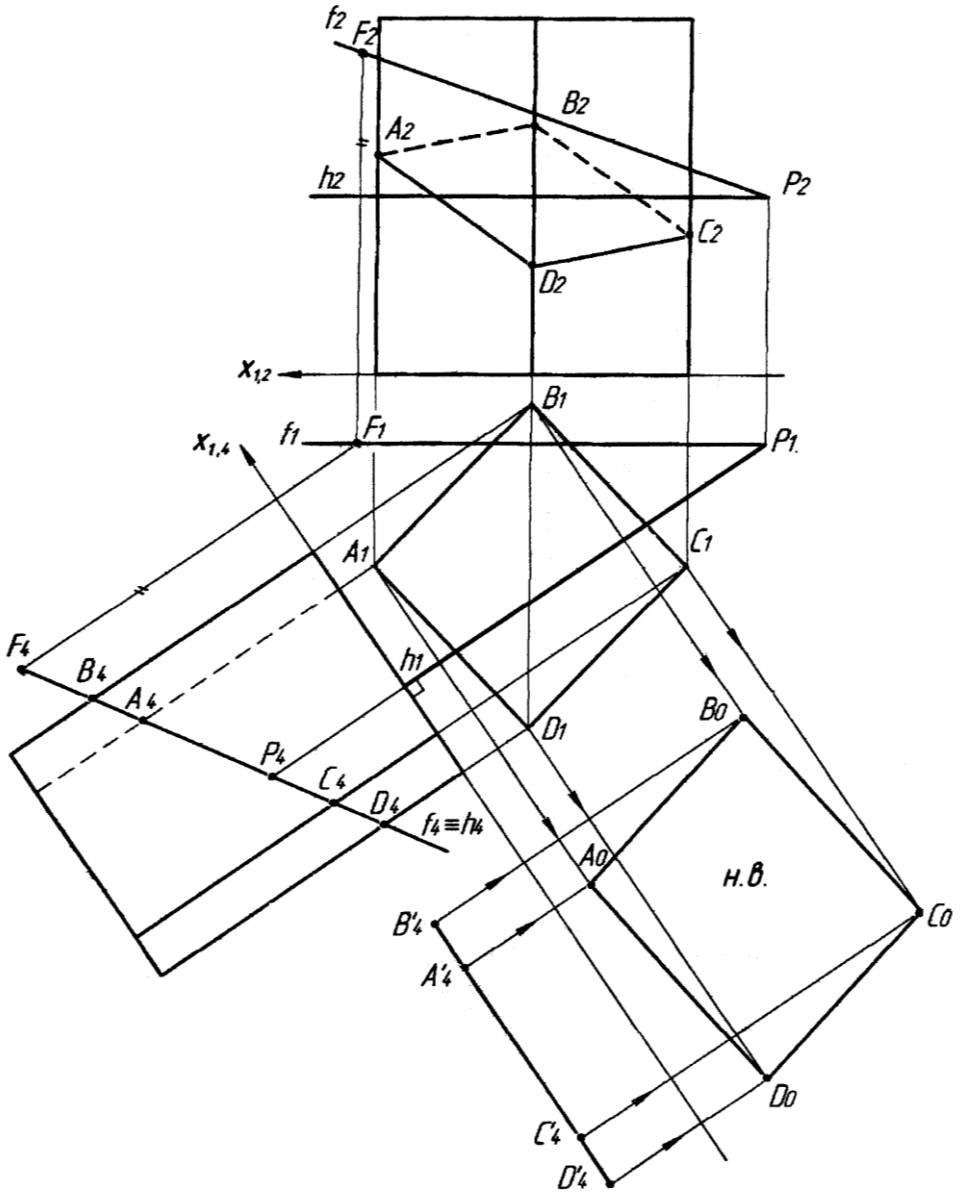


Рисунок 7.3 – Перетин піраміди площиною

Задача 2. Побудувати натуральну величину фігури перерізу чотиригранної призми площиною загального положення (рис. 7.4).

Розв'язування. Задачу розв'язують способом заміни площин проекцій. Нову площину $\boldsymbol{П_4}$ вводять перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі $\boldsymbol{h_1}$ площини $\boldsymbol{\alpha\ (h \cap f)}$.

На площині беруть дві довільні точки ***P*** і ***F*** і переносять їх координати з $\boldsymbol{П_2}$ на $\boldsymbol{П_4}$ і отримують проекціюючу площину $\boldsymbol{\alpha\ (h \cap f)}$. На $\boldsymbol{П_4}$ також будують призму. Для Цього з кожної точки основи $\boldsymbol{(A_1B_1C_1D_1)}$ з $\boldsymbol{П_1}$ на $\boldsymbol{П_4}$ проводять лінії зв'язку, перпендикулярно до $\boldsymbol{x_{1,4}}$. Призма своєю основою стоїть на $\boldsymbol{П_1}$, тому всі точки її основи будуть розміщені на $\boldsymbol{x_{1,4}}$. Висоту призми беруть з $\boldsymbol{П_2}$.



Рисонок 7.4 – Переріз призми площиною

Координати точок перетину січної площини з кожним ребром призми переносять з Π_4 на Π_2. Отримані фронтальні проекції точок перетину кожного ребра з площиною з'єднують прямими лініями з урахуванням видимості.

Натуральну величину перерізу визначають способом плоско-паралельного переміщення. Для цього площину перерізу, що на Π_4 спроекційована в пряму лінію $(B_4A_4D_4C_4)$, розміщують паралельно до осі $x_{1,4}$. З кожної точки перерізу проводять лінії зв'язку, перпендикулярно до осі $x_{1,4}$. На перетині цих ліній з лініями зв'язку, проведеними з горизонтальних проекцій точок перерізу A_1, B_1, C_1, D_1 паралельно до $x_{1,4}$, отримують натуральну величину фігури перерізу.

Задача 3. Побудувати переріз трикутної піраміди площиною загального положення (рис.7.5).

Розв'язування. Задачу розв'язують способом заміни площин проекцій у такій послідовності:

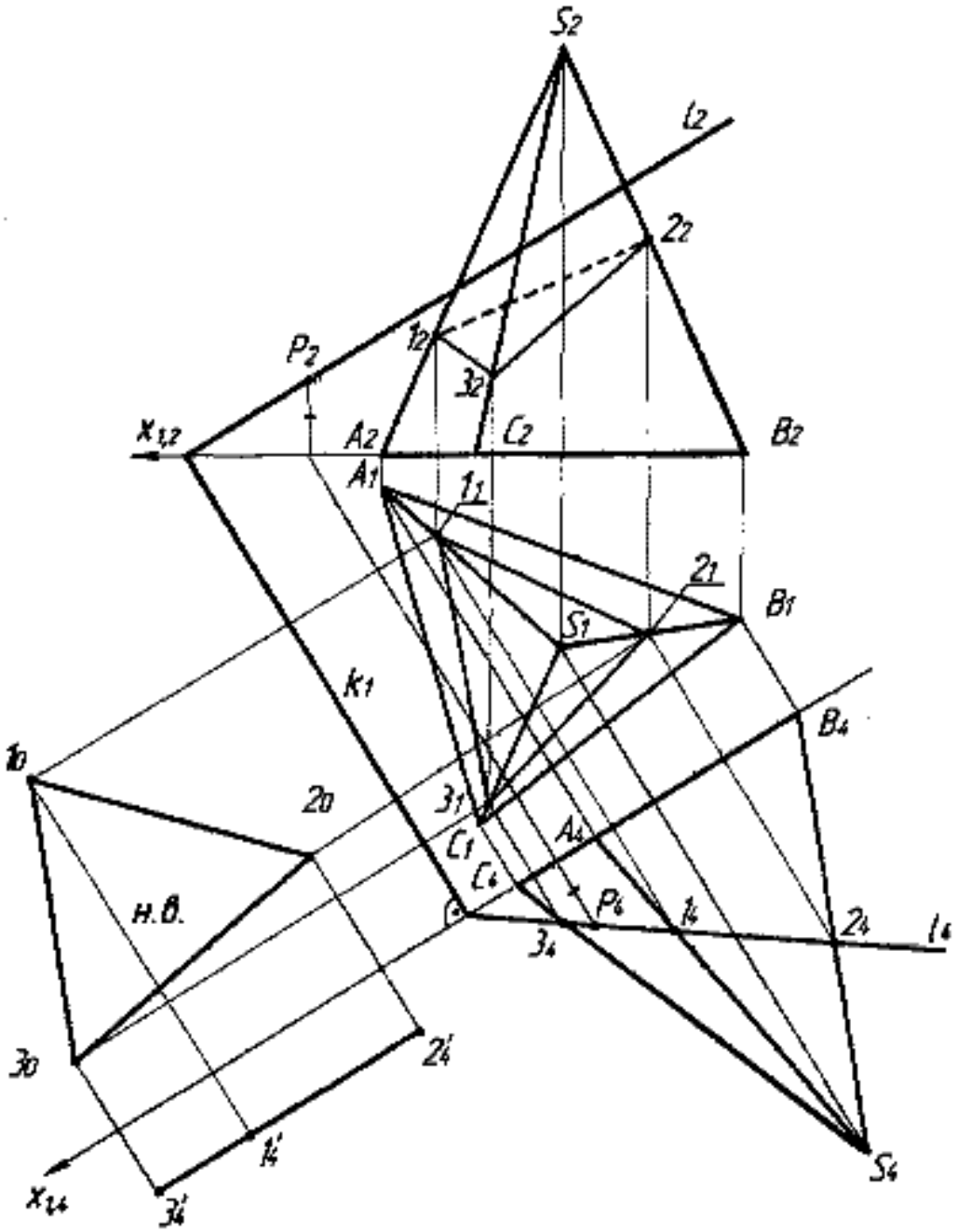
1. Площину, задану слідами, перетворюють на Π_4 у проекціюючу. Для цього вводять допоміжну площину проекцій Π_4 перпендикулярно до горизонтального сліду k_1. На фронтальному сліді l_1 беруть довільну точку P і її координату по осі z переносять на Π_4. З'єднавши точку перетину горизонтального сліду k_1 і осі $x_{1,4}$ з точкою P_4, одержують проекціюючу площину на Π_4.

2. На Π_4 будують піраміду. Для цього з кожної точки основи і вершини піраміди на Π_1 перпендикулярно д осі $x_{1,4}$ проводять лінії зв'язку. Основа піраміди ABC буде розміщена на осі $x_{1,4}$, а вершина S – на відстані, яка дорівнює відстані від точки S_2 до Π_1.

3. Отримані точки перетину 1_4, 2_4, 3_4 проекціюють на відповідні ребра по лініям зв'язку спочатку на Π_1, а потім – на Π_2. З'єднавши прямими відповідні проекції точок 1, 2, 3, одержують горизонтальну й фронтальну проекцію перерізу. На Π_1всі лінії перерізу будуть видимими. Оскільки грань ABS на Π_2.невидима, то лінія перерізу 1_22_2 також буде невидимою.

4. Натуральну величину фігури перерізу будують способом плоско-паралельного переміщення. Для цього переріз, який поекціюється на Π_4 в пряму лінію $(1_42_43_4)$, переміщують на вільне місце паралельно до осі $x_{1,4}$, не змінюючи відстані між точками. На перетині ліній зв'язку від точок 1_4, 2_4, 3_4 , перпендикулярних до осі $x_{1,4}$, і ліній зв'язку від точок 1_1, 2_1, 3_1,

паралельних до осі $x_{1,4}$, отримують трикутник $1_0 2_0 3_0$, тобто натуральну величину фігури перерізу.



Рисонок 7.5 – Переріз піраміди площиною

ЛЕКЦІЯ № 8

ТЕМА № 8 КРИВІ ЛІНІЇ ТА КРИВІ ПОВЕРХНІ

1. Плоскі криві.
2. Просторові криві.
3. Лінійчасті поверхні. Розгортні та нерозгортні поверхні.
4. Поверхні обертання, паралельного перенесення та гвинтові.
5. Циклічні поверхні.
6. Перетин кривої поверхні з площиною.

Криві лінії широко використовують у різних галузях техніки і будівництва. Вони можуть бути задані рівнянням у системі координат, утворитися в результаті перетину двох поверхонь, відповідати певним залежностям. Або можуть бути задані графічно. В інженерній графіці криві вивчають за їхніми проекціями. Якщо всі точки кривої належать одній площині, криву називають плоскою, коли ця умова не виконується – ***просторовою.***

Криві другого порядку (еліпс, гіпербола, парабола, коло) найбільш поширені в різних галузях техніки. Оскільки їх можна одержати при перерізі конуса площиною, вони ще звуться конічними перерізами.

Просторові криві лінії − це такі лінії, точки яких не належать одній площині. На рисунку 8.1 показані дві поширені просторові криві: циліндрична спіраль, або геліса (рис. 8.1, а), та конічна спіраль (рис. 8.1, б). На відміну від плоских кривих, просторові задаються двома проекціями.

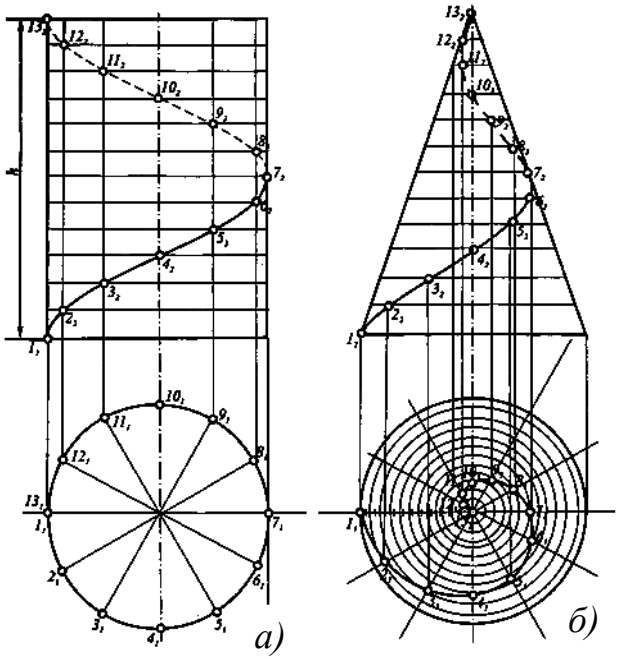


Рисунок. 8.1. Просторові криві геліса (а) та конічна спіраль (б)

Геліса утворюється рівномірним рухом точки по твірній, яка, у свою чергу, рівномірно обертається навколо осі. Конічна спіраль також утворюється рівномірним рухом точки вздовж прямої, яка рівномірно обертається навколо осі.

Криві поверхні широко застосовуються в різних галузях машинобудування, будівництва тощо. Поверхня як об'єкт інженерного дослідження може бути утворена: ***1) обрисом якої-небудь технічної форми; 2) параметричною множиною точок або ліній; 3) рівнянням; 4) переміщенням лінії в просторі тощо.***

Поверхня вважається заданою, якщо відносно будь-якої точки простору можна вирішити питання відносно її належності даній поверхні.

Сукупність усіх умов, що задають поверхню в просторі, називається її ***визначником***. Визначник складається з двох частин: геометричної, в якій задаються деякі постійні елементи та величини, котрі можуть бути як власними, так і невласними, та алгоритмічної. Остання вказує на характер і послідовність операцій по переходу від постійних елементів і величин до змінних елементів поверхні. Визначник дає можливість будувати на поверхні ***неперервний каркас*** її ліній. На одній і тій же поверхні залежно від визначника можна будувати різні неперервні каркаси. Наприклад, конічна поверхня може бути задана каркасом кіл, еліпсів, парабол, гіпербол.

Усю велику різноманітність кривих поверхонь можна класифікувати за різними ознаками (залежно від форми і характеру руху твірної, від зміни твірної при русі, від розгортуваності тощо).

У літературі існує багато класифікаційних схем. Залежно від способу утворення одну й ту ж поверхню можна віднести до різних класів. Найбільш поширений клас − це кінематичні поверхні, утворені рухом твірної по напрямних. Другий великий клас − це каркасні поверхні, які наближено представлені лінійним чи точковим каркасом.

Найбільше поширення мають поверхні, утворені за кінематичним законом з твірними постійної форми (лінійчасті й нелінійчасті).

Лінійчастою називають поверхню, яка може бути утворена рухом прямої лінії за певним законом. Такі поверхні широко використовуються в техніці. Залежно від характеру руху твірної одержують різні види лінійчастих поверхонь: циліндричні, конічні, з ребром звороту (торси), з площиною паралелізму, гвинтові тощо.

Залежно від того, чи можна розгорнути поверхню на площину без розривів і складок, усі лінійчасті поверхні поділяються на два види. Конічні, циліндричні та торси належать до ***розгортних*** поверхонь. У розгортних поверхонь дві нескінченно близькі твірні перетинаються у власній чи невласній точці, й тому частину поверхні, обмежену цими твірними, можна сумістити з площиною.

Другий вид поверхонь − ***нерозгортні***, у яких дві сусідні твірні мимобіжні, а, як відомо, мимобіжні прямі не визначають однієї площини. Розглянемо кілька видів розгортних поверхонь.

Конічна поверхня утворюється прямою лінією (твірною), яка перетинає криву напрямну та проходить через власну точку − вершину поверхні. Циліндрична поверхня утворюється прямою лінією, що перетинає криву напрямну та проходить через невласну точку, задану напрямом.

Якщо напрямною конічної (циліндричної) поверхні є крива 2-го порядку, одержимо поверхню 2-го порядку.

Поверхнею з ребром звороту (торсом) називають поверхню, утворену неперервним рухом прямої, яка дотикається в усіх своїх положеннях деякої просторової кривої (рис. 8.2), що зветься ребром звороту. Ребро звороту повністю задає торс. На рисунку 8.3 побудовано торс, що має назву ***розгортуваного гелікоїда***. Ребром звороту його є геліса. Твірна гелікоїда перекочується по гвинтовій лінії, залишаючись дотичною до неї.

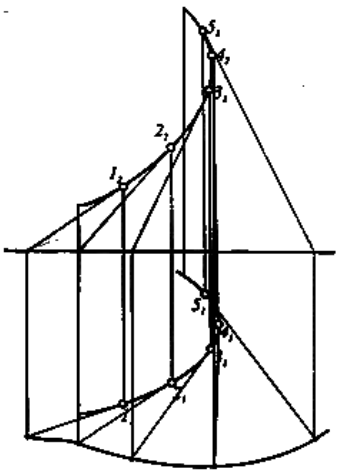


Рисунок 8.2 – Поверхня з ребром звороту

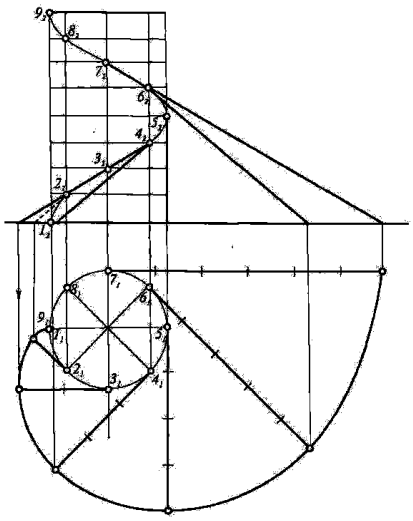


Рисунок 8.3 – Поверхня розгортуваного гелікоїда

Нерозгортні лінійчасті поверхні утворюються рухом прямої лінії по трьох напрямних, які можуть бути прямими або кривими.

Залежно від вигляду та положення напрямних можна одержати велику, кількість різних лінійчастих поверхонь. Напрямні можуть бути прямими або кривими, власними або невласними. Якщо це невласна пряма напрямна, вона замінюється площиною паралелізму.

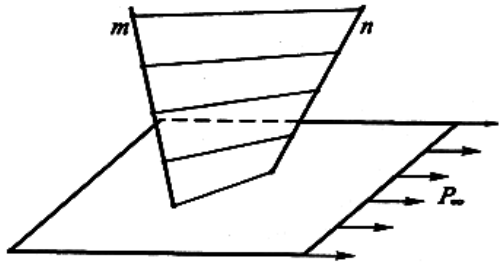


Рисунок 8.4 – Гіперболічний параболоїд

На рисунку 8.4 зображена нерозгортна крива лінійчаста поверхня, визначник якої − дві мимобіжні прямі m і n та горизонтальна площина паралелізму ***P***. Ця поверхня − ***гіперболічний параболоїд***, вона має 2-й алгебраїчний порядок.

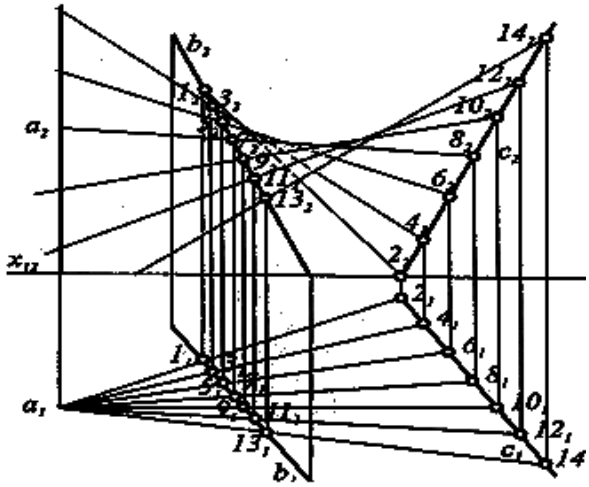


Рисунок 8.5 – Лінійчастий (однопорожнинний) гіперболоїд

На рисунку 8.5 побудована поверхня з трьома прямолінійними напрямними − ***лінійчастий (однопорожнинний) гіперболоїд***. Така поверхня утворюється при русі прямої твірної по трьох мимобіжних прямих напрямних − ***a, b, c***. Для полегшення побудови одну з прямих (***a***) взято у вертикальному положенні, це дає можливість безпосередньо проводити прямі твірні.

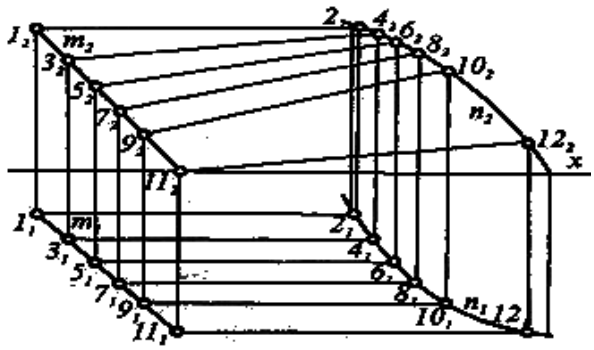


Рисунок 8.6 – Коноїд

Якщо одна з напрямних ***m*** є прямою, друга ***n*** − кривою, а третя − невласна, одержимо поверхню, що має назву ***коноїда*** (рис. 8.6). Невласна пряма напрямна замінена фронтальною площиною паралелізму.

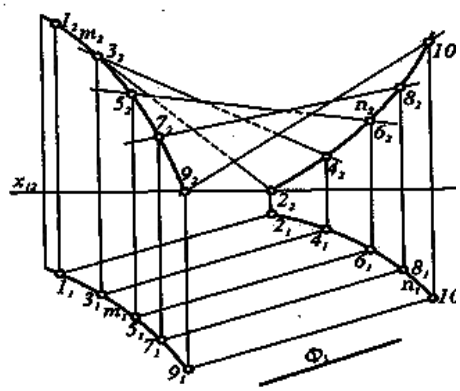


Рисунок 8.7 – Циліндроїд

І нарешті, якщо дві напрямні криві лінії, а третя невласна пряма замінена площиною паралелізму, матимемо поверхню ***циліндроїда*** (рис. 8.7). На рисунку задано дві просторові криві ***m*** та ***n*** і вертикальна площина паралелізму $\boldsymbol{\Phi_1}$.

У різних галузях техніки широко застосовуються поверхні з постійною криволінійною твірною. Зокрема, з них можна виділити ***поверхні обертання***. Точки твірної кривої описують навколо осі кола, які називаються ***паралелями***, а криві, одержані в результаті перетину поверхні обертання площинами, що проходять через вісь, називають ***меридіанами***. Фронтальний меридіан називають головним. Найчастіше поверхні обертання задаються віссю та головним меридіаном. Паралелі та меридіани утворюють на поверхні обертання ортогональну сітку.

Поверхні обертання 2-го порядку утворюються кривими 2-го порядку. Якщо вісь обертання проходить через центр твірного кола, при його обертанні матимемо ***сферу, еліпсоїд обертання*** (рис. 8.8) матиме місце в результаті обертання еліпса навколо однієї з осей. ***Параболоїд обертання*** (рис. 8.9) утвориться при обертанні параболи навколо осі. ***Гіперболоїд обертання*** утворюється також у результаті обертання гіперболи навколо осі. Остання поверхня може бути двопорожнинною, якщо гіпербола обертається навколо дійсної осі, й однопорожнинною, якщо вона обертається навколо уявної осі.

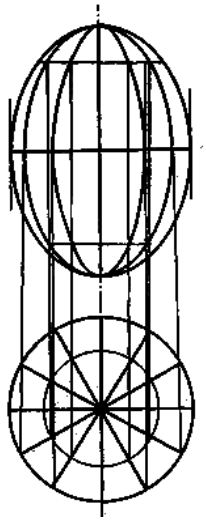


Рисунок 8.8 – Еліпсоїд обертання

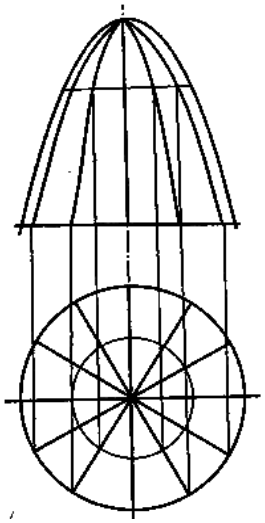


Рисунок 8.9 – Параболоїд обертання

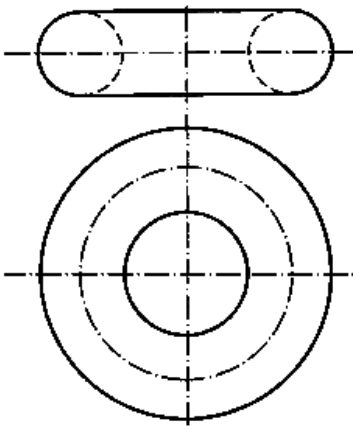


Рисунок 8.10 – Поверхня тора

Поширена в техніці поверхня обертання утворюється в результаті обертання кола навколо осі, яка лежить у площині кола зовні його. Цю поверхню називають ***тором*** або ***кільцем*** (рис. 8.10).

Поверхні паралельного перенесення. Такі поверхні утворюються при поступальному перенесенні однієї плоскої кривої по другій кривій, вони ще мають назву ***трансляційних***.

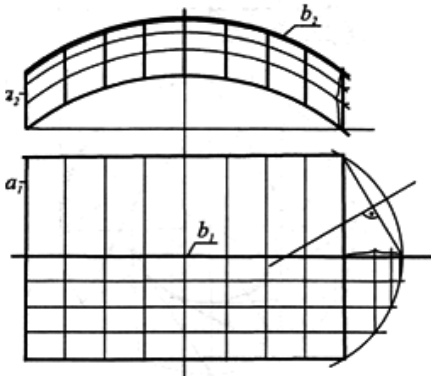


Рисунок 8.11 – Бікругова поверхня

На рисунку 34 показана поверхня, утворена рухом дуги кола а по дузі кола ***b***. Вона називається ***бікруговою***. Через кожну точку поверхні проходить одна твірна та одна напрямна. Твірні й напрямні трансляційної поверхні взаємозамінні, тобто їх можна поміняти ролями, і від цього поверхня не зміниться.

Поверхні паралельного перенесення використовують у будівництві при спорудженні тонкостінних великопрогонових оболонок-покриттів. Незмінність форми твірної дає великі переваги при конструюванні таких поверхонь.

Серед поверхонь другого порядку є, крім циліндра, дві поверхні паралельного перенесення. Це ***еліптичний*** та ***гіперболічний*** параболоїди, утворені рухом однієї параболи вздовж іншої. В еліптичного параболоїда параболи опуклі в один бік, а у гіперболічного параболоїда − в різні боки. Якщо обидві параболи, опуклі в один бік, конгруентні, матимемо ***параболоїд обертання***.

І нарешті, ***гвинтові поверхні***. Так називаються поверхні, що утворюються при гвинтовому русі твірної. Найчастіше в техніці використовуються гвинтові лінійчасті поверхні. Одна з таких поверхонь – розгортуваний гелікоїд – уже розглядалася (див. рис. 8.3).

Розглянемо нерозгортні гвинтові лінійчасті поверхні. На рисунку 8.12 наведена побудова ***косого гелікоїда***. Його визначниками є геліса, її вісь та напрямний конус, який замінює невласну криву напрямну.

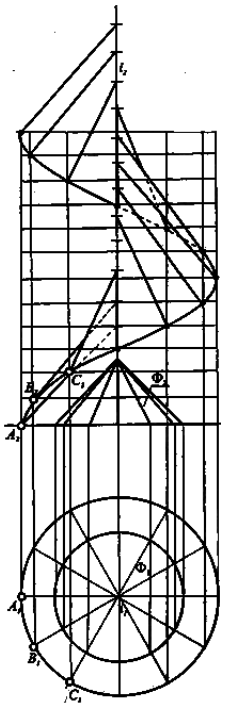


Рисунок 8.12 – Косий гелікоїд

На рисунку 8.13 зображений ***прямий гелікоїд,*** або ***гвинтовий коноїд***. Його визначник − геліса, її вісь і горизонтальна площина паралелізму.На рисунку 8.14 зображено ***гвинтовий циліндроїд***, визначниками якого є дві співвісні геліси та горизонтальна площина паралелізму**.**

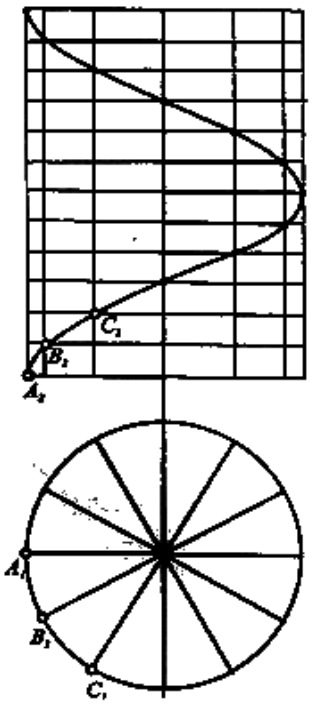


Рисунок 8.13 – Прямий гелікоїд

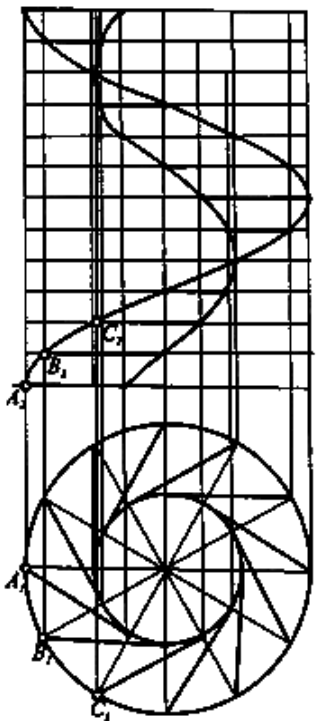


Рисунок 8.14 – Гвинтовий циліндроїд

6. Перетин кривої поверхні з площиною

На рисунку 8.15 показано перетин прямого циліндра обертання площиною ***Г***, заданою слідами. При такому положенні циліндра і січної площини остання перетне циліндр по еліпсу, який на полі $\boldsymbol{П_1}$ збігатиметься з горизонтальною проекцією циліндра. Визначимо найвищу та найнижчу точки еліпса, вони лежатимуть на великій осі еліпса, котра збігатиметься з лінією найбільшого ухилу площини, що проходить через центр еліпса.

Іншими словами, на полі $\boldsymbol{П_1}$ через центр горизонтальної проекції циліндра проведено лінію найбільшого ухилу перпендикулярно до горизонтального сліду площини.

У перетині цієї лінії з поверхнею циліндра знайдено найнижчу точку ***1*** та найвищу − ***2***, які знаходимо на полі $\boldsymbol{П_1}$, потім на полі $\boldsymbol{П_2}$, визначивши спочатку фронтальну проекцію лінії найбільшого ухилу.

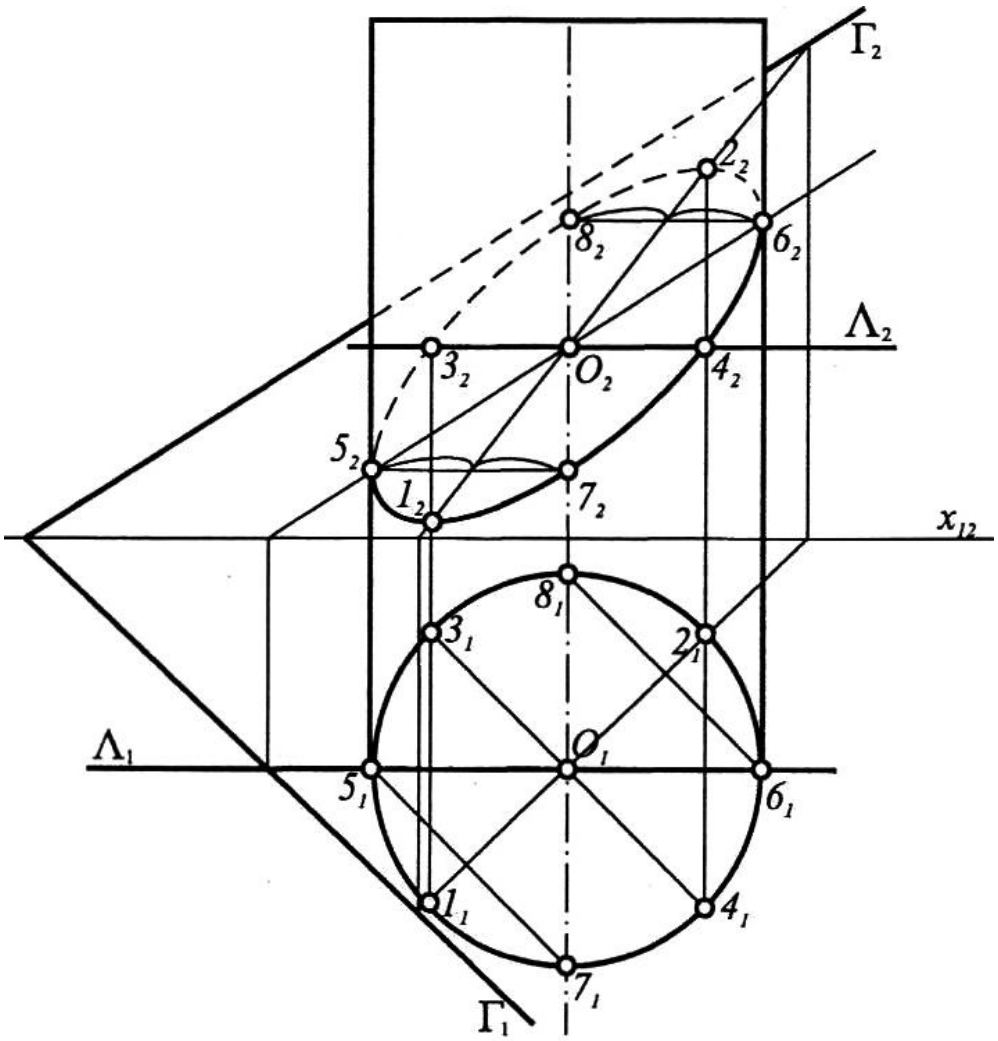


Рисунок 8.15 – Перетин прямого циліндра обертання площиною

Мала вісь еліпса буде перпендикулярною на полі Π_1 до великої осі, тобто лежатиме на горизонталі площини. У перетині її з поверхнею циліндра знайдено точки ***3*** і ***4***, переносимо їх на фронтальну проекцію малої осі. Щоб визначити крайню ліву та крайню праву точки еліпса, через вісь циліндра проводиться допоміжна фронтальна січна площина, яка перетне площину по фронталі, а циліндр − по контурних твірних. Їх взаємний перетин визначать точки ***5*** і ***6***. Точки ***7*** та ***8***, будучи симетричними відносно великої осі точкам ***5*** і ***6***, визначаться на горизонталях відкладанням тих же відрізків.

На рисунку 8.16 показано переріз прямого кругового конуса по параболі.

Січна площина ***Г*** паралельна правій контурній твірній конуса. Вища точка ***1*** параболи знайдеться на перетині січної площини ***Г*** з лівою контурною твірною конуса, точки ***2*** та ***3*** в основі конуса − на перетині площини ***Г*** з площиною основи. Щоб знайти довільні точки ***4*** і ***5*** в будь-якому горизонтальному перерізі площиною ***Л***, визначають радіус перерізу, яким на полі Π_1 проводять коло, на ньому визначаться ці дві точки в перетині площин ***Г*** та ***Л***. Щоб знайти натуральну величину фігури перерізу, його суміщують з горизонтальною площиною проекцій обертанням навколо фронтально-проекціюючої прямої ***2-3***.

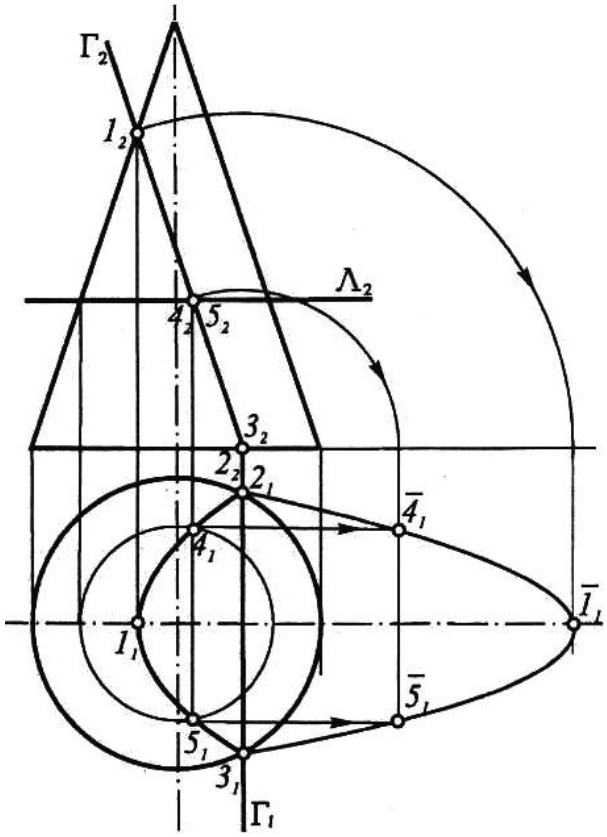


Рисунок 8.16 – Переріз прямого кругового конуса

ЛЕКЦІЯ № 9

ТЕМА № 9 ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ.

1. Взаємний перетин многогранників.
2. Взаємний перетин кривих поверхонь.

При конструюванні складних форм у машинобудуванні чи будівництві виникає потреба у визначенні ліній перетину (переходу) простих форм, які утворюють складні форми. Для визначення цієї лінії треба знайти проекції точок, спільних для поверхонь, що перетинаються. Це можна зробити двома способами: 1) перетворенням проекцій, наприклад заміною площин проекцій, або 2) за допомогою допоміжних перерізів.

При першому способі обидві поверхні, що перетинаються, перетворюються таким чином, щоб хоч одна з них зайняла проекціююче положення, визначивши лінію взаємного перетину, повертають її на основні проекції. При другому, більш універсальному, способі криві поверхні перетинаються третьою поверхнею або площиною, яку називають ***посередником.*** Дві лінії, які утворяться від перетину, ***k*** та ***l***, перетинаючись, визначать точки шуканої лінії взаємного перетину. Виконавши таку операцію кілька разів, визначають потрібну кількість точок шуканої лінії взаємного перетину. При побудові ліній взаємного перетину та визначенні видимості особливе значення мають характерні точки цієї лінії, до яких належать точки на контурних твірних, найвищі та найнижчі. Лінія взаємного перетину може бути плоскою чи просторовою.

Можливі чотири випадки взаємного перетину двох кривих поверхонь 2-го порядку:

1. Частковий ***(врізання),*** в цьому випадку лінія взаємного перетину являє собою одну замкнену просторову криву (рис. 9.1, *а*).
2. Повний ***(проникнення),*** коли просторова лінія перетину має дві гілки або розпадається на дві плоскі криві (рис. 9.1, *б*).
3. ***Односторонній внутрішній дотик***, коли поверхні, що перетинаються, мають в одній точці спільну дотичну площину. Крива взаємного перетину перетинається сама з собою в цій точці дотику (рис. 9.1, *в*).
4. ***Взаємний перетин по двох плоских кривих,*** коли має місце подвійний дотик, у цьому разі поверхні мають дві спільні дотичні площини (рис. 9.1, *г*).

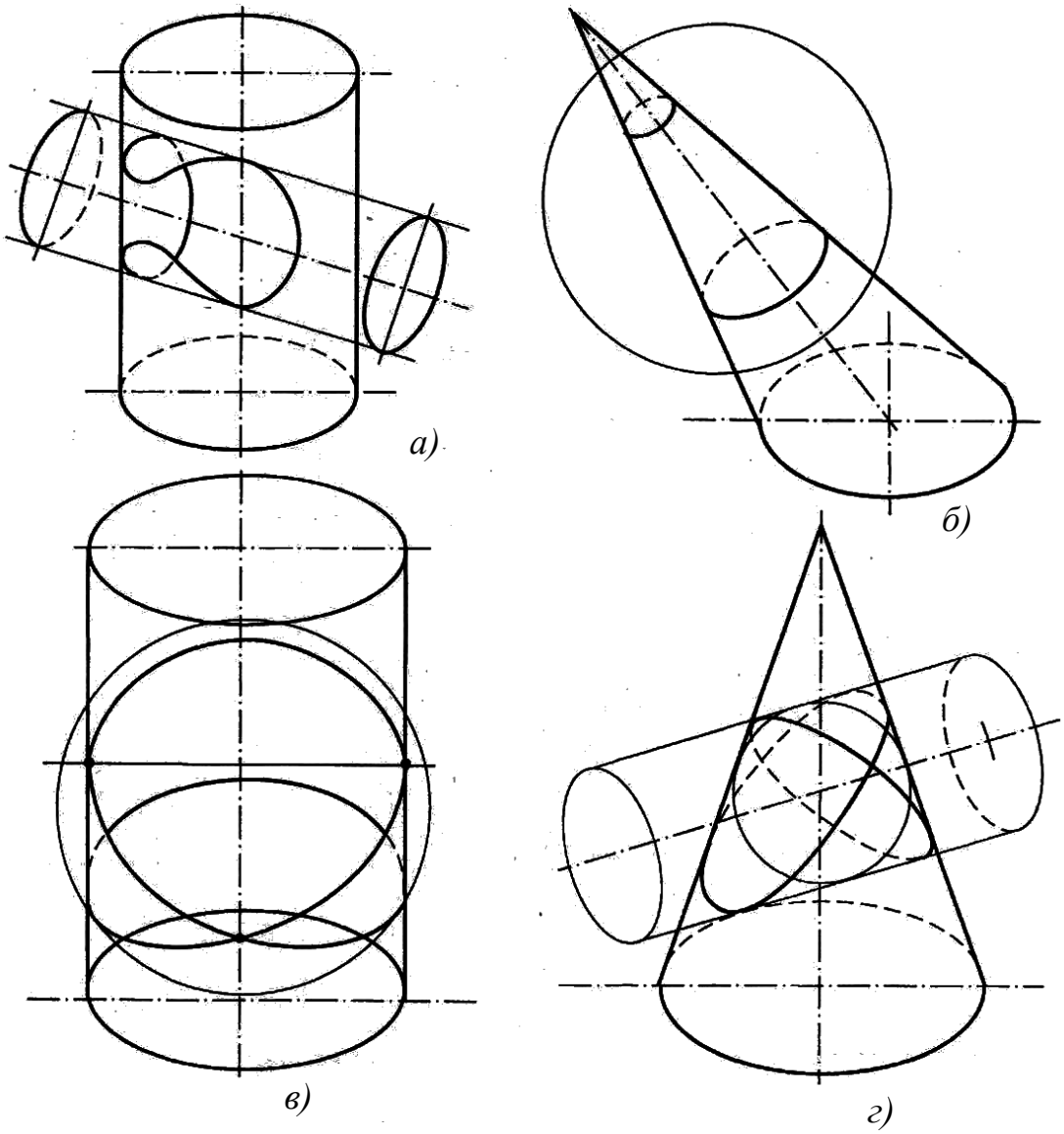


Рисунок 9.1 – Перетин двох кривих поверхонь

Як допоміжну поверхню-посередник можна брати не тільки площини, ними можуть бути і криві поверхні, зокрема сферичні. Для цього необхідні певні умови: поверхні обертання мають бути розташовані так, щоб перетиналися їх осі, які, у свою чергу, повинні бути паралельні $\boldsymbol{П_1}$ чи $\boldsymbol{П_2}$.

На рисунку 9.2 перетинаються два кругові циліндри − один профільно- проекціюючий, а другий розташований фронтально. Оскільки осі циліндрів перетинаються і паралельні полю $\boldsymbol{П_2}$, можна скористатися способом концентричних сфер. Крива взаємного перетину почнеться в крайній лівій точці ***1*** та закінчиться в крайній правій − ***2***. За центр концентричних сфер візьмемо точку ***0***, в якій перетинаються осі циліндрів. З точки $\boldsymbol{0_2}$, як із центру, проводимо кілька сфер, що перетинатимуть обидва циліндри між точками ***1*** і ***2***.

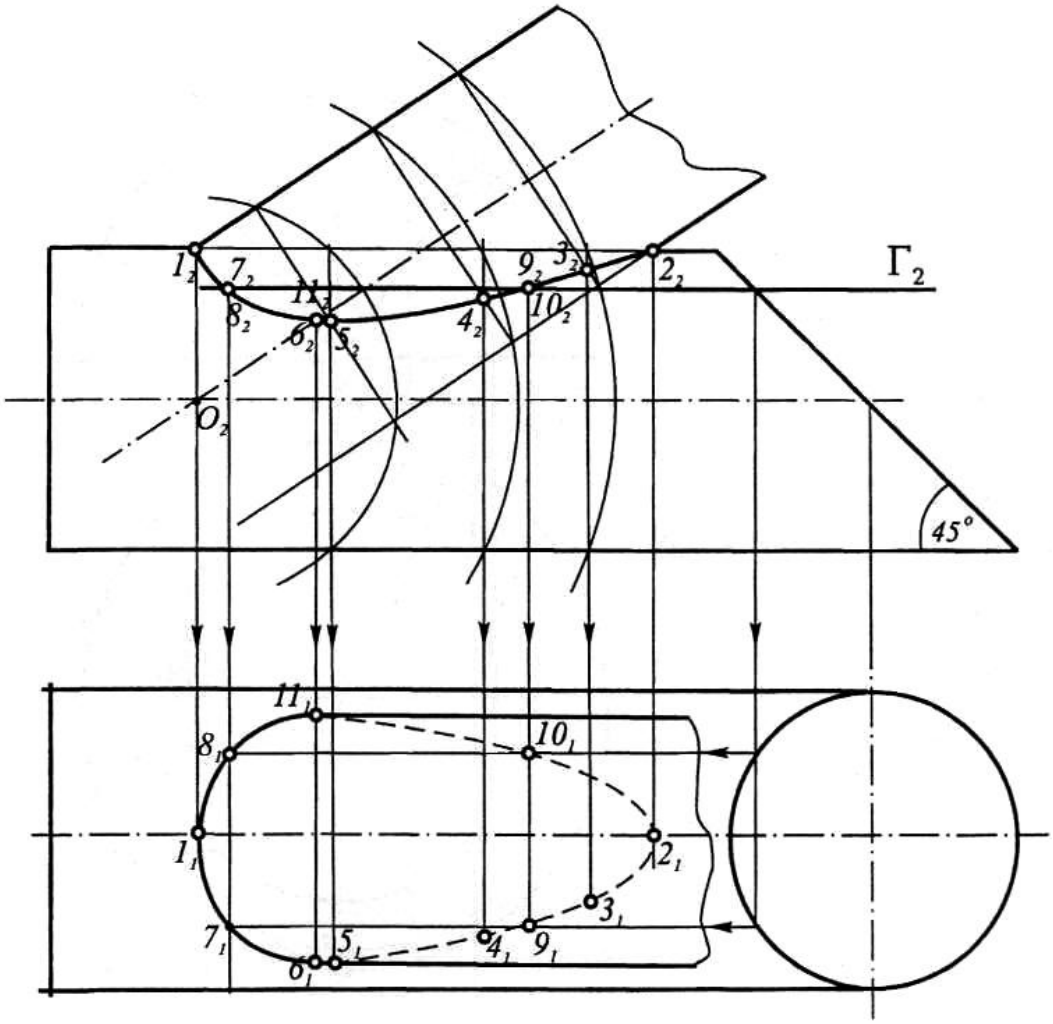


Рисунок 9.2 – Перетин двох кругових циліндрів

Кожна сфера перетне циліндр по колах, які зображатимуться своїми діаметрами ***у*** вигляді прямих. Перетин цих кіл і визначить дві точки лінії взаємного перетину, які належать одній фронтально-проекціюючій прямій. Так знайдено три точки − $\boldsymbol{3_2, 4_2, 5_2}$. За цими точками проводимо криву.

Скористаємося допоміжною горизонтальною площиною $\boldsymbol{Г_2}$, що перетне поздовжній циліндр по двох твірних, які знайдемо на полі $\boldsymbol{П_1}$. На ці твірні за вертикальною відповідністю зносимо чотири точки ***7, 8, 9, 10***, які утворилися при перетині знайденої кривої площиною $\boldsymbol{Г_2}$. Точки на контурних твірних ***6*** та ***11*** похилого циліндра на полі $\boldsymbol{П_1}$ знайдуться на перетині кривої на полі $\boldsymbol{П_2}$ з віссю похилого циліндра, з якою збігаються передня і задня твірні цього циліндра.

Перетин прямого кругового конуса з чотиригранною фронтально-проекціюючою призмою показано на рисунку 9.3. Дві лінії взаємного перетину складаються з двох дуг кіл радіусів $\boldsymbol{R^1}$ та $\boldsymbol{R^2}$ та відрізків гіпербол, по яких профільні грані призми перетнуть конус. Проведено дві

горизонтальні січні площини $\boldsymbol{\Sigma_2}$ і $\boldsymbol{\Omega_2}$, що визначили радіуси кіл. Для знаходження гіпербол, котрі лежать у профільних площинах, побудовано профільну проекцію поверхонь, що перетинаються. Через ліву профільну грань призми проведено профільну січну площину $\boldsymbol{\Gamma_2}$, яка перетне поверхню конуса по гіперболі.

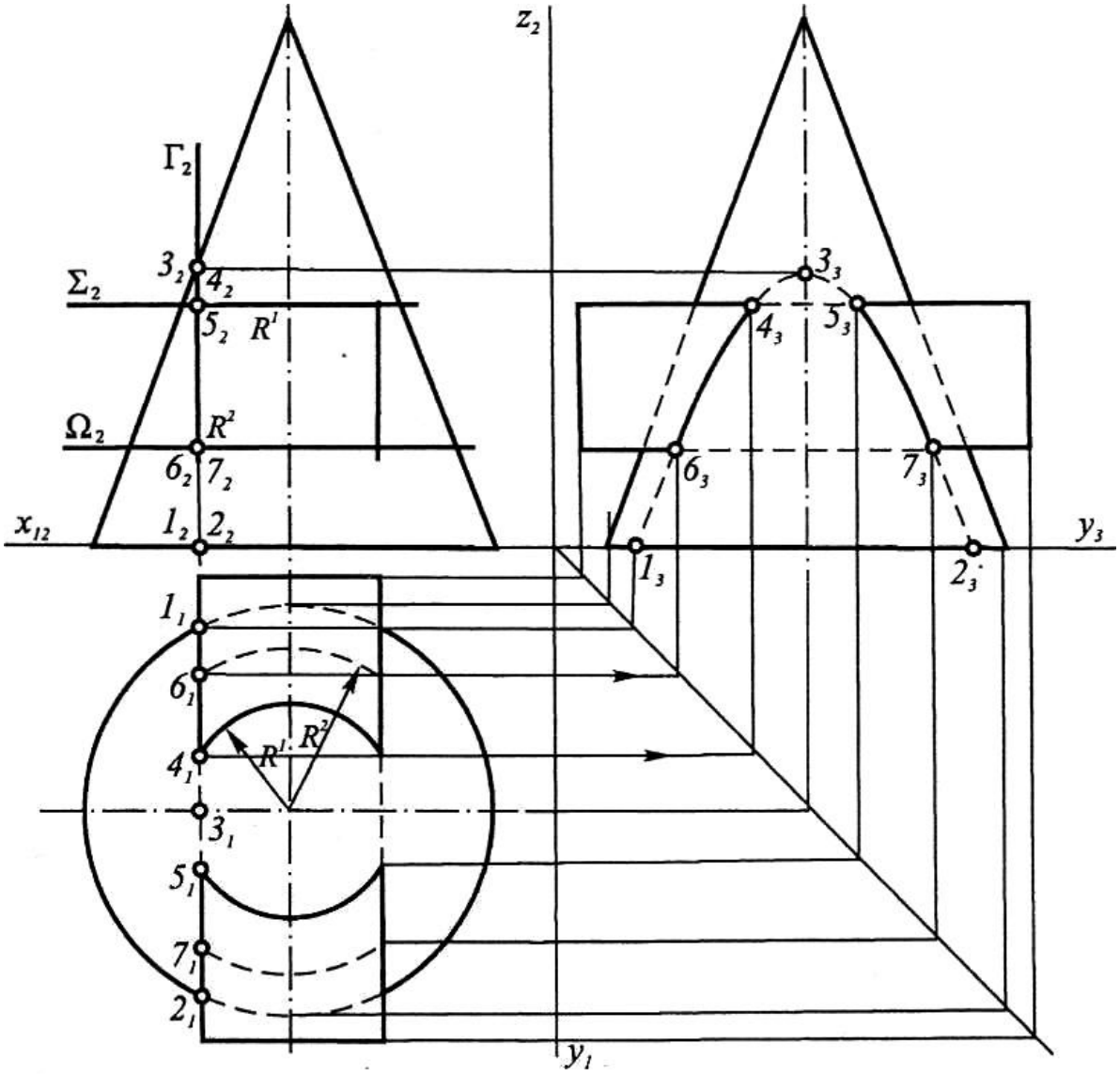


Рисунок 9.3 – Перетин прямого кругового конуса
з чотиригранною призмою

Література

1. *Нарисна геометрія: підручник / В.Є. Михайленко, М.Ф. Євстіфеєв, С.М. Ковальов, О.В. Кащенко; За ред. В.Є. Михайленка. – 2-ге вид., переробл. – К.: Вища шк., 2004. – 303 с.: іл. ISBN 966-642-156-9.*
2. *Інженерна та комп'ютерна графіка: підручник / В.Є. Михайленко, В.В. Ванін, С.М. Ковальов; за ред. В.Є. Михайленка. – К.: Каравела, 2012. – 360 с.*