Oleg Vorontsov, PhD, Associate Professor,
Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University, the Architectural Faculty,
E - mail: uaag.poltava2012@gmail.com

SUPERPOSITION POINT SET OF n-DIMENSIONAL NUMERICAL SEQUENCE IN DISCRETE GEOMETRIC MODELING

Abstract: This article explores the feasibility of n-dimensional numerical sequence formulas based on the geometrical superposition set of point sets to model discrete geometric images according to preset specific initial input.

Keywords: discrete geometric modeling, numerical sequences, geometrical superposition set.

Олег Воронцов, Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка, кандидат технических наук, архитектурный факультет
E - mail: uaag.poltava2012@gmail.com

СУПЕРПОЗИЦИИ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ n-МЕРНЫХ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В ДИСКРЕТНОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Аннотация: В статье исследованы возможности использования формул n-мерных числовых последовательностей на основе геометрического аппарата суперпозиций точечных множеств для моделирования дискретно заданных геометрических образов по соответствующим исходным данным.

Ключевые слова: дискретное геометрическое моделирование, числовые последовательности, геометрический аппарат суперпозиций.

Постановка проблемы. Применение геометрического аппарата суперпозиций в сочетании с математическим аппаратом числовых последовательностей позволяет существенно повысить эффективность и расширить возможности процесса дискретного моделирования непрерывных геометрических образов. Но формулы числовых последовательностей на основе суперпозиций точечных множеств будут определять дискретно непрерывный геометрический образ только при определенных исходных (начальных) условиях. Поэтому системные исследования этих условий и возможностей использования $\boldsymbol{n}$-мерных числовых последовательностей на основе геометрического аппарата суперпозиций для формирования дискретных аналогов геометрических образов являются актуальными.

Анализ последних исследований. Детальный анализ основных исследований и публикаций посвященных использованию математического аппарата числовых последовательностей для дискретного геометрического моделирования был проведен в работе [1] автора данной статьи. В этой же работе исследованы некоторые возможности использования формул одномерных числовых последовательностей на основе суперпозиций точечных множеств, а также сделан вывод о перспективности исследований $\boldsymbol{n}$-мерных числовых последовательностей на основе геометрического аппарата суперпозиций для формирования дискретно заданных геометрических образов.

Постановка задания. Целью данной статьи является исследование возможностей использования формул $\boldsymbol{n}$-мерных числовых последовательностей на основе геометрического аппарата суперпозиций для формирования дискретно заданных геометрических образов по определенным исходным условиям.

Изложение основного содержания исследования. Дискретным аналогом непрерывной функции $\boldsymbol{n}$ аргументов

$$\boldsymbol{u_{x,y,z,\dots,n} = f(x,y,z,\dots,n)} \ , \tag{1}$$

является бесконечная $\boldsymbol{n}$-мерная числовая последовательность

$$\boldsymbol{a_{i,j,k,\dots,n} = f(i,j,k,\dots,n)} \ , \tag{2}$$

а ее рекуррентная формула определяет зависимость между смежными членами дискретного образа. Моделируемые дискретные аналоги геометрических образов задаются координатами узлов с равномерным шагом по оси.

Применение геометрического аппарата суперпозиций позволяет сделать данные алгоритмы значительно эффективнее за счет экономии вычислительных ресурсов при формировании дискретно заданных геометрических образов узлами с произвольными шагами вдоль осей по данным координатам произвольных узлов.

Суперпозиция соответствующих точек n множеств в m пространстве в декартовой системе координат определяется системой уравнений определенных в [2]:

$$\begin{array}{l} u_1 = k_{1,1}u_{1,1} + k_{1,2}u_{1,2} + \ldots + k_{1,j}u_{1,j} + \ldots + k_{1,n}u_{1,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_i = k_{i,1}u_{i,1} + k_{i,2}u_{i,2} + \ldots + k_{i,j}u_{i,j} + \ldots + k_{i,n}u_{i,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m = k_{m,1}u_{m,1} + k_{m,2}u_{m,2} + \ldots + k_{m,j}u_{m,j} + \ldots + k_{m,n}u_{m,n} \end{array} \tag{3}$$

где: u – обобщенное обозначение координат x, y, z .;

i – номер координатной оси;

j – номер исходного множества суперпозиции;

$k_{i,j}$ – коэффициент суперпозиции.

Любое уравнение системы (3) можно рассматривать как проекцию суперпозиции на определенную координатную ось, а любую пару уравнений как проекцию суперпозиции на координатную 2-плоскость, поэтому свойства суперпозиций можно рассматривать на прямой или на плоскости, не ограничивая при этом общности результата.

Способ перехода от непрерывной функции к замкнутой форме описания числовой последовательности путем замены непрерывных параметров дискретными со следующим освобождением от дискретных параметров, дает возможность из одной функции получать разные рекуррентные формулы.

Для полинома второй степени

$$y = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 \tag{4}$$

бесконечная одномерная числовая последовательность имеет вид

$$a_i = m_0 + m_1 i + m_2 i^2 \ , \tag{5}$$

рекуррентную зависимость которой можно записать в виде

$$a_{i+2} = 2a_{i+1} - a_i + 2m \tag{6}$$

Формула (6) будет дискретным аналогом полинома второй степени при условии принадлежности начальных условий в виде заданных координат трех точек формуле (5) – рис. 1.

Например для замкнутой формы последовательности

$$a_i = 0{,}5 i^2 \ , \tag{7}$$

одну из рекуррентных зависимостей можно записать в виде:

$$a_{i+3} = 3a_{i+2} - 3a_{i+1} + a_i \ , \tag{8}$$

или в виде вычислительного шаблона: 1 = 3 — -3 — 1

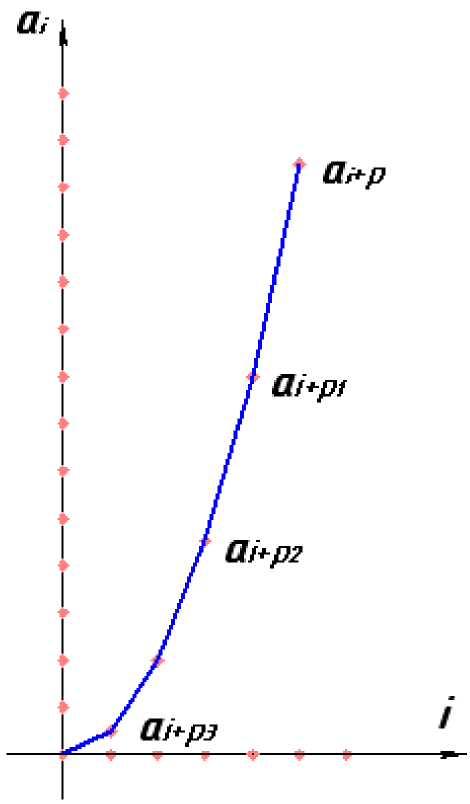


Рисунок 1. Дискретно заданная кривая $a_{i+2} = 2a_{i+1} - a_i + 2m$

Рекуррентная формула (8) будет дискретным аналогом кривой линии только тогда, когда начальные условия в виде трех заданных точек удовлетворяют формуле (6).

Н рисунке 1 показана дискретно заданная кривая (ДЗК), которая построена по рекуррентной формуле (8) при начальных условиях: $a_i = 0,5$, $a_{i+1} = 2$, $a_{i+2} = 4,5$, которые принадлежат последовательности (6).

При произвольно заданных начальных условиях формула (8) не будет дискретным аналогом бесконечной числовой последовательности.

На рисунке 2 представлен график числовой последовательности построенный по рекуррентной формулой (8) с исходными условиями

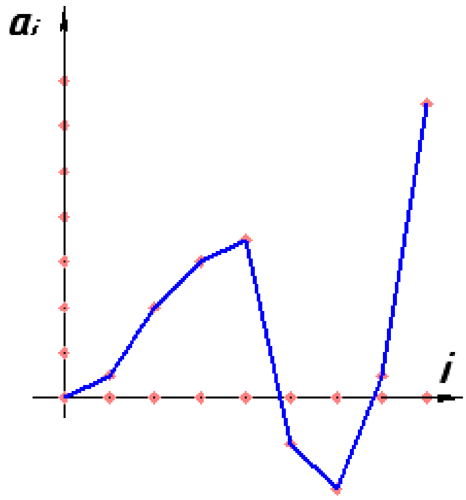


Рисунок 2. График числовой последовательности $a_{i+3} = 3a_{i+2} - 3a_{i+1} + a_i$ с исходными условиями $a_i = 0,5$, $a_{i+1} = 2$, $a_{i+2} = 3$

$a_i = 0,5$, $a_{i+1} = 2$, $a_{i+2} = 3$.

Одновременно, координаты любой точки a_{i+p} числовой последовательности второго порядка (7), ряд значений которой приведен в таблице 1 и графически представлен на рис.1, можно определить как суперпозицию координат трех несмежных произвольных точек a_{i+p_1}, a_{i+p_2}, a_{i+p_3}, данной последовательности [3] :

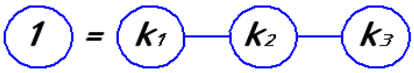
$$a_{i+p} = k_1 a_{i+p_1} + k_2 a_{i+p_2} + k_3 a_{i+p_3} , \qquad (9)$$

Таблица 1

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ai	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18	24,5	32	40,5	50

где
$$k_1=(-1)^2\frac{(p-p_2)(p-p_3)}{(p_2-p_1)(p_3-p_1)};\ k_2=(-1)^2\frac{(p-p_1)(p-p_3)}{(p_1-p_2)(p_3-p_2)};\qquad (10)$$
$$k_3=(-1)^2\frac{(p-p_1)(p-p_2)}{(p_1-p_3)(p_2-p_3)};$$

или в виде вычислительного шаблона:



Формулы (10) были выведены в работе (3) при условии (11) :

$$k_1+k_2+k_3+...+k_k+...+k_n+k_{n+1}=1 \qquad (11)$$

Определим a_{i+p} по таким данным: $p=2;\ p_1=3;\ p_2=7;\ p_3=8;\ i=0.$

$$a_{i+p}=k_1a_{i+p_1}+k_2a_{i+p_2}+k_3a_{i+p_3}=$$
$$=\frac{(p-p_2)(p-p_3)}{(p_2-p_1)(p_3-p_1)}4{,}5+\frac{(p-p_1)(p-p_3)}{(p_1-p_2)(p_3-p_2)}24{,}5+$$

$$+\frac{(p-p_1)(p-p_2)}{(p_1-p_3)(p_2-p_3)}32=\frac{(2-7)(2-8)}{(7-3)(8-3)}4{,}5+\frac{(2-3)(2-8)}{(3-7)(8-7)}24{,}5+$$
$$+\frac{(2-3)(2-7)}{(3-8)(7-8)}32=2\Rightarrow 2=2\,. \qquad (12)$$

При начальных условиях $a_{i+p_1}=4{,}5\ ;\ a_{i+p_2}=24{,}5\ ;\ a_{i+p_3}=32$, формула (9) будет дискретным аналогом бесконечной числовой последовательности (7), а при начальных условиях: $a_{i+p_1}=4{,}5\ ;\ a_{i+p_2}=24{,}5\ ;\ a_{i+p_3}=26$, формула (9) определяет дискретный ряд точек другой бесконечной числовой последовательности :

$$a_i=-25{,}2+12i-0{,}7i^2\ .$$

Если же начальное условие будет соответствовать формуле (7) :

$$a_i = 0{,}5i^2 = 0{,}5 \cdot 8^2 = 32 ,$$

получим ДЗК, показанную на рис.1.

Рассмотрим другой пример. Для замкнутой формы последовательности

$$a_i = c^i , \tag{13}$$

одну из рекуррентных зависимостей можно записать в виде [4]:

$$a_{i+2} = \frac{a_{i+1}^{\;2}}{a_i} \tag{14}$$

Другая рекуррентная формула будет иметь вид [4]:

$$a_{i+3} = \frac{a_{i+1} a_{i+2}}{a_i} , \tag{15}$$

Формула (15) будет дискретным аналогом бесконечной последовательности (13) при условии принадлежности начальных условий в виде заданных координат трех точек формуле (14) – рис. 3, табл.2. При произвольно заданных начальных условиях формула (15) не будет

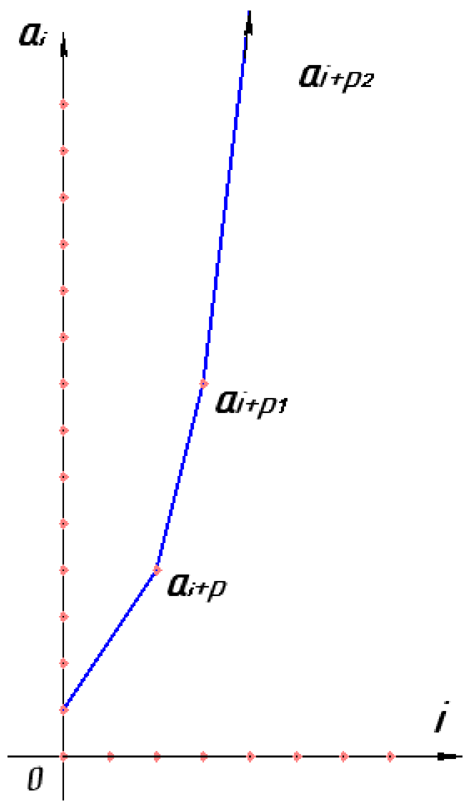


Рисунок 3. Дискретно заданная кривая $a_i = 2^i$, построенная по рекуррентной формуле (15) при исходных условиях: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$.

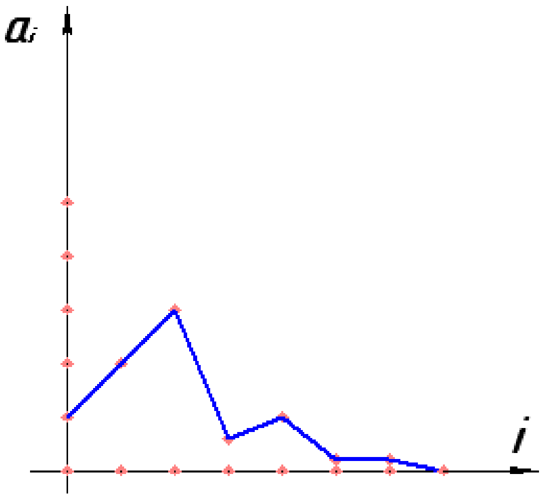


Рисунок 4. Дискретно заданная кривая $a_i = 2^i$, построенная по рекуррентной формуле (15) при исходных условиях: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$.

дискретным аналогом бесконечной числовой последовательности, то есть, определяет числовую последовательность, которая не будет моделью кривой, – рис. 4.

Таблица 2

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ai	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Координаты произвольных точек (несмежных узлов) последовательности $a_i = c^i$ (рис. 3) могут быть определены как суперпозиции координат начала системы координат и двух произвольных точек этой последовательности [5].

$$a_{i+p} = k_1 a_{i+p_1} + k_2 a_{i+p_2} , \qquad (16)$$

где

$$k_1 = \frac{(i+p)a_{i+p_2} - (i+p_2)a_{i+p}}{(i+p_1)a_{i+p_2} - (i+p_2)a_{i+p_1}} , \quad k_2 = \frac{(i+p_1)a_{i+p} - (i+p)a_{i+p_1}}{(i+p_1)a_{i+p_2} - (i+p_2)a_{i+p_1}} .$$

При условии: $i + p = p; \;\; i + p_1 = p_1; \;\; i + p_2 = p_2$:

$$a_p = \frac{p - p_2 a_{p-p_2}}{p_1 - p_2 a_{p_1 - p_2}} a_{p_1} + \frac{p - p_1 a_{p-p_1}}{p_2 - p_1 a_{p_2 - p_1}} a_{p_2} . \qquad (17)$$

Определим a_{i+p}, например, для последовательности $a_i = 2^i$, ряд значений которой приведен в таблице 2, по таким данным: ***p=2; p₁=3; p₂=7; i=0.***

$$a_2 = k_1 a_3 + k_2 a_7 \qquad (18)$$

$$k_1 = \frac{2-7\times\frac{1}{32}}{3-7\times\frac{1}{16}} = 0{,}695121\ ; \quad k_2 = \frac{2-3\times\frac{1}{2}}{7-3\times 2^4} = -0{,}012195\ ;$$

$$a_2 = 0{,}695121\cdot 8 - 0{,}012195\cdot 128 = 4 \Rightarrow 4 = 4\ .$$

При начальных условиях $a_{i+p_1} = 8\ ;\ a_{i+p_2} = 128$, формула (17) будет дискретным аналогом бесконечной числовой последовательности $a_i = 2^i$, а при других начальных условиях: $a_{i+p_1} = 8\ ;\ a_{i+p_2} = 2172$, формула (17) определяет дискретный ряд точек другой бесконечной числовой последовательности : $a_i = 3^i + i - 22$.

Если ***n***-мерная числовая последовательность (2) распадается на сумму ***n*** последовательностей $a_{i,j,k,...,n} = f_1(i) + f_2(j) + f_2(k) + ... + f_2(n)$, то рекуррентная формула ***n***-мерной числовой последовательности может быть получена как сумма рекуррентных формул ***n*** одномерных последовательностей [6], а также как сумма формул числовых последовательностей на основе суперпозиций одномерных точечных множеств.

Выводы. Для дискретного моделирования непрерывных геометрических образов по соответствующим исходными данным могут быть использованные формулы ***n***-мерных числовых последовательностей на основе геометрического аппарата суперпозиций. Данные формулы в правой части должны иметь коэффициенты, число которых равняется числу параметров функции и, которые получаются из непрерывных аналитических зависимостей. Перспективными являются дальнейшие исследования формул ***n***-мерных числовых последовательностей с применением геометрического аппарата суперпозиций для формирования ***n***-мерных геометрических образов.

Литература

1. Воронцов, О.В. Геометричний апарат суперпозицій та рекурентні формули числових послідовностей у дискретному моделюванні геометричних образів. / О.В. Воронцов // Сучасні проблеми моделювання / Збірник наукових праць Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького. Вип.1 – Мелітополь: МДПУ, 2014. – С. – 35 – 40.

2. Ковалев, С.Н. О суперпозициях. / С.Н. Ковалев // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2010. – Вип. 84. – С. 38 – 42.

3. Воронцов, О.В. Дискретна інтерполяція геометричних образів об'єктів будівництва одновимірними числовими послідовностями із нерівномірним кроком. / О.В. Воронцов // Строительство и техногенная безопасность. – Симферополь.: НАПКС, 2013. – Вип. 48. – С. 43 – 49.

4. Воронцов, О.В. Заміна неперервних форм елементарних функціональних залежностей рекурентними формулами задання дискретних числових послідовностей. /О.В. Воронцов // Геометричне та комп'ютерне моделювання: Збірник наук. праць — Харків: ХДУХТ, 2010. – Вип. 27. – С. 57 – 62.

5. Воронцов, О.В. Определение дискретных аналогов классов элементарных функций суперпозициями одномерных точечных множеств / О.В. Воронцов, Л.О. Тулупова // Universsum: Технические науки: электрон. научн. журн. 2014. №3(4). URL: http: // 7universsum. Com /ru/ tech/ archive/ item/1135.

6. Ковальов С.М., Гумен М.С., Пустюльга С.І., Михайленко В.Є., Бурчак І.Н. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Спеціальні розділи. Випуск 1. – Луцьк.: Редакційно-видавничий відділ ЛДТУ, 2006. – С. 118 – 176.