

ГРУПОВА КЛАСИФІКАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ БАГАТОВИМІРНИХ КОНФОРМНО ІНВАРІАНТНИХ РІВНЯНЬ

Н. В. Ічанська ¹, Ю. Г. Подошвелев ²

¹ Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка,
Полтава, Україна

² Полтавський національний педагогічний університет імені В. Г. Короленка,
Полтава, Україна

natasha.ichanska@mail.ru, optimist1618@mail.ru

Розглянемо з симетрійної точки зору клас еволюційних рівнянь вигляду $\Delta u = F(u, u_0)$, де $u = u(x_0, \vec{x})$, $\vec{x} \in R^n$, $u_0 = \frac{\partial u}{\partial x_0}$, Δ — оператор Лапласа, F — довільна гладка функція. При специфічних значеннях функцій F , до таких рівнянь приводять задачі опису процесів тепло-та масообміну, механіки суцільного середовища, теорії фільтрації, росту популяцій, фізики моря та багато інших. У роботі [1] доведено, що в цьому класі рівнянь конформно інваріантним є рівняння

$$\Delta u = u^{\frac{n+2}{n-2}} f\left(\frac{u_0}{u}\right), \quad n \neq 2, \quad (1)$$

де f — довільна гладка функція свого аргументу та знайдено перетворення еквівалентності цього класу: *Максимальною локальною групою точкових перетворень еквівалентності класу еволюційних рівнянь $\Delta u = F(u, u_0)$ є група, яка породжується оператором $E = (C_0 x_0 + d_0) \partial_0 + (C_{ab} x_b + \kappa x_a + d_a) \partial_a + (C_1 u + C_2) \partial_u + (C_1 - 2\kappa) F \partial_F$, де $C_0, d_0, C_{ab} = -C_{ba}, \kappa, d_a, C_1, C_2$ - довільні сталі.*

У роботі розв'язано задачу: знайти максимальні алгебри інваріантності (МАІ) рівнянь (1) в залежності від значень функції f . Використовуючи класичні результати Лі щодо диференціальних інваріантів груп перетворень, доведено наступні твердження.

Теорема 1. *У випадку $n \neq 2$ основною алгеброю інваріантності класу рівнянь (1) є алгебра $A^{bas} = \langle \partial_0, \partial_a, J_{ab} = x_b \partial_a - x_a \partial_b, D = 2x_a \partial_a + (2 - n)u \partial_u, K_a = 2x_a D - \vec{x}^2 \partial_a \rangle$.*

Теорема 2. *З точністю до перетворень з групи еквівалентності $G^\sim$ для класу рівнянь (1) при $n \neq 2$ існує лише п'ять випадків розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності (нижче наведено нееквівалентні рівняння з цього класу та їх МАІ):*

1. $\Delta u = \lambda e^{\frac{u_0}{u}} u^{\frac{n+2}{n-2}}$: $A_1 = \langle A^{bas}, Q_1 = e^{\frac{4x_0}{2-n}} u \partial_u \rangle$;
2. $\Delta u = \lambda \left(\frac{u_0}{u}\right)^k u^{\frac{n+2}{n-2}}$: $A_2 = \langle A^{bas}, Q_2 = x_0 \partial_0 + \frac{2-n}{4} k u \partial_u \rangle$, $k \neq \frac{n+2}{n-2}$;
3. $\Delta u = \lambda u_0^{\frac{n+2}{n-2}}$: $A_3 = \langle A^{bas}, Q_3 = x_0 \partial_0 + \frac{2+n}{4} u \partial_u, Q^\infty = \beta(\vec{x}) \partial_u \rangle$;
4. $\Delta u = \lambda \left(\frac{u_0}{u} + m\right)^k u^{\frac{n+2}{n-2}}$: $A_4 = \langle A^{bas}, Q_4 = e^{\frac{4mx_0}{k(2-n)}} (\partial_0 - m u \partial_u) \rangle$, $k \neq \frac{n+2}{n-2}, m \neq 0, k \neq 0$;
5. $\Delta u = \lambda (u_0 + m u)^{\frac{n+2}{n-2}}$: $A_5 = \langle A^{bas}, Q_5 = e^{-\frac{4mx_0}{2+n}} (\partial_0 - m u \partial_u), Q^\infty = e^{-mx_0} \beta(\vec{x}) \partial_u \rangle$,
де $\beta(\vec{x})$ — довільна гладка функція, така що $\Delta \beta = 0$, $\lambda, m \neq 0, k \neq 0$ — сталі.

Знання МАІ, зокрема, дає можливість інтегрування рівняння, дозволяє генерувати нові розв'язки з відомих.

1. Серов М.І., Ічанська Н.В. Про конформну інваріантність нелінійних еволюційних багатовимірних рівнянь. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика Механіка. — 2016. — Т. 2(36). — С. 35-40.