

CONCLUSIONS. By means of method of Laplace integral transform in combination with the method of Cauchy functions the integral representation of exact analytical solution of mixed problem of conjugation for the separate system of evolutionary parabolic equations of the second order, which is modelled by hybrid differential operator of Bessel-Euler-(Kontorovich-Lebedev) in the piece-homogeneous polar axis $(0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, +\infty)$ with soft limits is obtained. Analytical expressions for main solutions (Green's functions and influence functions) that are convenient for use in theoretical studies and applications are also obtained.

REFERENCES

1. Городецкий В. В. Граничные свойства гладких у шари разрывов решений параболического типа / В. В. Городецкий. – Чернівці, 1998.
2. Громик А. П., Конет І. М., Ленюк М. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський, 2011.
3. Дейнека В. С., Сергиенко І. В., Скопецкий В. В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К., 1998.
4. Комаров Г. М., Ленюк М. П., Мороз В. В. Скинченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку. – Чернівці, 2001.
5. Конет І. М., Ленюк М. П. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока. – Чернівці, 2002.
6. Конет І. М., Ленюк М. П. Стационарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці, 2001.
7. Конет І. М., Ленюк М. П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці, 2004.
8. Курш А. Г. Курс высшей алгебры. – М., 1971.
9. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М., 1987.
10. Ленюк М. П. Інтегральні перетворення, породжені диференціальним оператором Ейлера другого порядку. – Чернівці, 2012.
11. Ленюк М. П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – К., 1997.
12. Ленюк М. П., Михалевська Г. І. Інтегральні перетворення типу Контровича-Лебедева. – Чернівці, 2002.
13. Ленюк М. П., Шинкарик М. І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. – Тернопіль, 2004.
14. Ленюк М. П., Шинкарик М. І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Ейлера, Бесселя, Лежандра). Частина 2. – Тернопіль, 2011.
15. Матійчук М. І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці, 2003.
16. Сергиенко І. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К., 1991.
17. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М., 1959.
18. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М., 1972.
19. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М., 1965.

Стаття надійшла до редколегії 17.12.14

Конет І., д-р фіз.-мат. наук, Пилипук Т., викладач

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Кам'янець-Подільський

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ЗОБРАЖЕНИЕ РАЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ РВНЕНИЙ НА КУСОВО-ОДНОРОДНОЙ ПОЛЯРНОЙ ОСИ С М'ЯКИМИ МЕЖАМИ

Методом інтегрального перетворення Лапласа у поєднанні з методом функцій Коші одержано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку мішаної задачі для системи еволюційних параболических рівнянь, змодельованих гібридним диференціальним оператором Бесселя-Ейлера (Контровича-Лебедева) на кусково-однорідній полярній осі $r \geq 0$ з м'якими межами.

Конет І., д-р фіз.-мат. наук, проф., Пилипук Т., преподаватель

Каменец-Подольский Национальный университет имени Ивана Огиенко, Каменец-Подольский

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПОЛЯРНОЙ ОСИ С МЯГКИМИ ГРАНИЦАМИ

Методом интегрального преобразования Лапласа в сочетании с методом функций Коши получено интегральное представление точного аналитического решения смешанной задачи для системы эволюционных параболических уравнений, смоделированных гибридным дифференциальным оператором Бесселя-Эйлера (Контровича-Лебедева) на кусочно-однородной полярной оси $r \geq 0$ с мягкими границами.

УДК 517.958

О. Плюхин, канд. фіз.-мат. наук, ст. викладач

ПолтНТУ ім. Ю. Кондратюка, Полтава

e-mail: plukhin@gmail.com

УМОВНА ІНВАНІАНТНІСТЬ (1+1) – ВИМІРНОГО РІВНЯННЯ РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ-КОНВЕКЦІЇ ВІДНОСНО АЛГЕБР ГАЛІЛЕЯ

Знайдено всі рівняння реакції-дифузії-конвекції розмірності (1+1), які є умовно інваріантними відносно алгебри Галілея без оператора маси, та алгебри Галілея з оператором маси

ВСТУП. В основі класичної механіки лежить принцип відносності Галілея. В (1+1)-вимірному просторі йому відповідають перетворення Галілея вигляду

$$t' = t, x' = x - vt. \quad (1)$$

Виконавши для формул (1) перепозначення $t \rightarrow x_0, x \rightarrow x_1, v \rightarrow \theta$, одержимо

$$x'_0 = x_0, x'_1 = x_1 - \theta x_0. \quad (2)$$

Перетворення (2), породжуються операторами Галілея

$$G_1 = x_0 \partial_1 + x_1 \partial_0, \quad (3)$$

$$G_2 = x_0 \partial_1 + \partial_2, \quad (4)$$

де $Q_i = (\alpha_i u + \beta_i) \partial_u, \alpha_i, \beta_i$ – певні константи.

Оператор (3) разом з операторами $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, Q_1$, утворюють одну з реалізацій алгебри Галілея з оператором маси, яку ми позначимо

$$AG^M(1,1) = \langle \partial_0, \partial_1, G_1, Q_1 \rangle. \quad (5)$$

Оператори алгебри (5) задовольняють наступним комутаційним співвідношенням

$$[\partial_0, \partial_1] = 0, [\partial_0, G_1] = \partial_1, [\partial_1, G_1] = Q_0, [\partial_0, Q_1] = 0, [\partial_1, Q_1] = 0, [G_1, Q_1] = 0.$$

Оператор (4) разом з операторами ∂_0, ∂_1 , утворює реалізацію алгебри Галілея без оператора маси

$$AG(1,1) = \langle \partial_0, \partial_1, G_2 \rangle. \quad (6)$$

Оператори алгебри (6) задовольняють наступним комутаційним співвідношенням

$$[\partial_0, \partial_1] = 0, [\partial_0, G_2] = \partial_1, [\partial_1, G_2] = 0.$$

Розглянемо нелінійне рівняння реакції-дифузії-конвекції

$$u_0 = \partial_1[f^1(u)u_1] + f^2(u)u_1 + f^3(u), \quad (7)$$

де $u = u(x_0, x_1)$, нижні індекси 0, 1 означають диференціювання за змінними x_0, x_1 ; $f^i(u)$ – довільні гладкі функції.

Рівняння (7) широко застосовується для опису різноманітних процесів фізики, хімії, біології та деяких інших наук. Це пов'язано з тим, що рівняння вигляду (7) враховують три типи механізмів переносу енергії, кожен з яких при математичному моделюванні в першому наближенні відповідно є лінійним щодо других похідних за просторовими координатами, перших похідних та самої шуканої функції. Наприклад, при описі процесів тепломасопереносу, перенос теплової енергії відбувається за рахунок теплопровідності середовища (закон Фур'є), за рахунок конвективного руху енергії та шляхом виділення (поглинання) енергії просторовими джерелами (стоками) енергії [1].

Повний опис симетрій Лі рівняння (7) проведено в [7], [8], [9], [11], [15], [16], [17], [18], де встановлено, що дане рівняння інваріантне відносно алгебри Галілея з оператором маси (5) лише у випадку, коли воно локально еквівалентне лінійному рівнянню теплопровідності вигляду

$$u_0 = u_{11}. \quad (8)$$

Відносно алгебри Галілея без оператора маси (6) рівняння (7) інваріантне у випадку коли воно локально еквівалентно рівнянню Бюргерса

$$u_0 + uu_1 = u_{11}, \quad (9)$$

або рівнянню

$$u_0 + \ln(u)u_1 = u_{11}. \quad (10)$$

Так як процеси, які описує рівняння (7), задовольняють принципу відносності Галілея, то природно вимагати, щоб і рівняння (7) задовольняло цьому ж принципу, тобто було інваріантне відносно алгебри Галілея (5) або (6).

Виявляється (див., наприклад, [12]), що у випадку коли вся множина розв'язків рівняння (7) не інваріантна відносно алгебри Галілея, то з неї за допомогою додаткових умов можливо виділити деяку підмножину, інваріантну відносно даної алгебри.

Виникає питання: чи існують інші вигляди рівняння (7) інваріантні відносно алгебр Галілея типу (5) або (6) разом із додатковими умовами?

Відповіді на це питання і присвячена дану статтю.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Поняття умовної симетрії введено в монографії [12]. Умовні симетрії рівнянь математичної фізики знайдено в [3, 4, 5, 6, 13, 14]. Метод умовної симетрії дає можливість одержувати такі підмножини розв'язків диференціальних рівнянь, симетрія яких ширша, а іноді зовсім відрізняється від симетрії всієї множини розв'язків.

Означення. [12] Система диференціальних рівнянь $S(x, u, u_1, \dots, u_k) = 0$, де $u = u(x)$, $x \in R^{1+n}$, $u \in R^m$, u_k – сукупність похідних k -го порядку функції u , називається умовно інваріантною відносно оператора X , якщо вона інваріантна відносно цього оператора разом з деякою додатковою умовою $S_1(x, u, u_1, \dots, u_k) = 0$.

Тобто виконуються наступні співвідношення $\tilde{X}S = \lambda_0 S + \lambda_1 S_1$, $\tilde{X}S_1 = \lambda_2 S + \lambda_3 S_1$, де $\lambda_\mu = \lambda_\mu(x, u, \partial)$ – деякі диференціальні оператори, $\mu = \overline{0, 3}$, $\tilde{X}$ – продовження оператора (див., наприклад, [2]).

Перепишемо рівняння (7) у вигляді

$$S = f^1(u)u_{11} + f^1(u)(u_1)^2 + f^2(u)u_1 + f^3(u) - u_0 = 0. \quad (11)$$

Тут і нижче крапка означає диференціювання за змінною u . Будемо шукати такі набори функцій f^i , $i = \overline{1, 3}$, при яких рівняння (11) умовно інваріантне (разом з додатковим рівнянням S_1) відносно операторів (3), (4) узагальнених наступним чином

$$G_1 = x_0 \partial_1 + x_1 M(u) \partial_u; \quad (12)$$

$$G_2 = x_0 \partial_1 + M(u) \partial_u, \quad (13)$$

де $M(u)$ – довільна гладка функція.

ІНВАРІАНТНІСТЬ ВІДНОСНО АЛГЕБРИ ГАЛІЛЕЯ З ОПЕРАТОРОМ МАСИ.

Теорема 1. Рівняння (7) умовно інваріантне відносно алгебри Галілея з оператором маси тоді і тільки тоді, коли рівняння (7), оператор (12) та рівняння S_1 мають вигляд:

$$\begin{aligned} u_0 &= \partial_1[f^1(u)u_1] + \frac{\lambda u}{2f^1(u)} + \lambda_1 u, \\ G_1 &= x_0 \partial_1 + x_1 M(u) \partial_u, \\ u_0 + \frac{1}{2M(u)}(u_1)^2 + \lambda M(u) &= 0, f^1(u)M(u) = -\frac{1}{2}u. \end{aligned} \quad (14)$$

Доведення. Подіявши продовженим оператором $\tilde{X}$ на рівняння (11), одержимо

$$\tilde{X}S = {}^{11}\eta f^1 + {}^1\eta(2\dot{f}^1 u_1 + f^2) - {}^0\eta + \eta(\dot{f}^1 u_{11} + \ddot{f}^1 (u_1)^2 + \dot{f}^2 u_1 + \dot{f}^3). \quad (15)$$

Використавши формули для ${}^{11}\eta$, ${}^1\eta$, ${}^0\eta$ (див., наприклад, [2]) і врахувавши вигляд оператора (12), отримаємо

$$\begin{aligned} \xi^0 = 0, \xi^1 = x_0, \eta = x_1 M, {}^1\eta = M + x_1 \dot{M} u_1, {}^0\eta = x_1 \dot{M} u_0 - u_1, \\ {}^{11}\eta = 2\dot{M} u_1 + x_1 \ddot{M} (u_1)^2 + x_1 \dot{M} u_{11}. \end{aligned} \quad (16)$$

Підставивши вирази (16) в формулу (15) і спростивши, одержимо

$$\begin{aligned} \tilde{X}S = x_1 ((f^1 M)_u u_{11} + (f^1 M)_{uu} (u_1)^2 + (f^2 M)_u u_1 - \dot{M} u_0 + \dot{f}^3 M) + \\ + (2(f^1 M)_u + 1) u_1 + f^2 M \end{aligned} \quad (17)$$

Розглянемо спочатку частину виразу (17), який не містить змінної x_1 :

$$S_2 = (2(f^1 M)_u + 1) u_1 + f^2 M. \quad (18)$$

Подіявши продовженим оператором $\tilde{X}$ на (18) і врахувавши (16), отримаємо

$$\tilde{X}S_2 = M(2(f^1 M)_u + 1) + x_1(2M(f^1 M)_{uu} + M(f^2 M)_u + (2(f^1 M)_u + 1)\dot{M} u_1). \quad (19)$$

З формули (19) маємо рівняння $2(f^1 M)_u + 1 = 0$, розв'язавши яке, одержимо $f^1 M = -\frac{1}{2}(u + C)$, $C = \text{const}$. З точністю до перетворень еквівалентності $u + C \rightarrow u$ маємо

$$f^1 M = -\frac{1}{2}u. \quad (20)$$

Підставивши (20) в (18), одержимо

$$f^2 = 0. \quad (21)$$

Врахувавши формули (20), (21), одержимо, що (17) має вигляд

$$\tilde{X}S = x_1 \left(-\frac{1}{2} u_{11} - \dot{M} u_0 + \dot{f}^3 M \right). \quad (22)$$

Виділивши S у виразі (22), одержимо

$$\tilde{X}S = -\frac{x_1}{2f^1} S - \frac{u \dot{f}^1 x_1}{2(f^1)^2} S_1, \quad (23)$$

де

$$S_1 = u_0 + \frac{1}{2M} (u_1)^2 + \phi(u), \quad (24)$$

$$\phi(u) = \frac{f^1}{\dot{f}^1} \left(\dot{f}^3 - \frac{f^3}{u} \right). \quad (25)$$

Подіявши продовженим оператором $\tilde{X}$ на рівняння (24) і врахувавши (16), отримаємо

$$\tilde{X}S_1 = \dot{M} x_1 \left(u_0 + \frac{1}{2M} (u_1)^2 + \frac{M}{\dot{M}} \dot{\phi} \right). \quad (26)$$

Порівнявши формулу (24) і вираз в дужках формули (26), отримаємо рівняння $\phi = \frac{M}{\dot{M}} \dot{\phi}$, розв'язавши яке і врахувавши (20), одержимо

$$\phi = \lambda M = -\frac{\lambda u}{2f^1}. \quad (27)$$

Підставивши в (27) вираз для ϕ (25) і розв'язавши отримане рівняння відносно f^3 , знаходимо

$$f^3 = \frac{\lambda u}{2f^1} + \lambda_1 u. \quad (28)$$

Підставивши (21), (28) у рівняння (7), одержимо рівняння реакції-дифузії з теореми 1; підставивши (27) в (24) одержимо додаткове рівняння з теореми 1.

Розгляд випадку $\dot{f}^1 = 0$ приводить до рівняння

$$u_0 = \lambda u_{11} + \lambda_1 u \quad (29)$$

і відповідного йому оператора

$$G_1 = \lambda x_0 \partial_1 - \frac{1}{2} x_1 u \partial_u. \quad (30)$$

Рівняння (29) та оператор (30) за допомогою перепозначень $u \rightarrow e^{\lambda_1 x_0} u$, $x_0 \rightarrow \frac{1}{\lambda} x_0$ зводяться відповідно до рівняння теплопровідності (8) та оператора Галілея (3) при $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = 0$. Таким чином, рівняння (29) класично інваріантне відносно оператора (30).

Розгляд випадку $\dot{M} = 0$ приводить до частинного випадку, який можна отримати з (14).

Теорему доведено.

ІНВАРІАНТНІ ВІДНОСНО АЛГЕБРИ ГАЛІЛЕЯ БЕЗ ОПЕРАТОРА МАСИ.

Теорема 2. Рівняння (7) умовно інваріантне відносно алгебри Галілея без оператора маси тоді і тільки тоді, коли рівняння (7), оператор (13) та рівняння S_1 набувають вигляду:

$$\begin{aligned} u_0 &= \partial_1 [D_u u_1] + (\lambda_7 D_u - E) u_1 + (\lambda_2 D - \lambda_1 u + \lambda_3) \left(\lambda_5 - \frac{\lambda_4}{D_u} \right), \\ G_2 &= x_0 \partial_1 + \frac{1}{E_u} \partial_u, \\ u_0 + \lambda_1 E_u (u_1)^2 + E u_1 + \frac{\lambda_4}{E_u} &= 0, \quad \frac{1}{E_u} = \frac{\lambda_2 D - \lambda_1 u + \lambda_3}{D_u}. \end{aligned} \quad (31)$$

Доведення теореми 2 проводиться аналогічно доведення теореми 1.

Зауваження 1. При розгляді випадку $\dot{f}^1 = 0, \dot{M} = 0$ одержуємо рівняння і оператор, які замінами зводяться до рівняння Бюргерса (9) та оператора Галілея (4) при $\alpha_i = 0, \beta_i = 1$.

Зауваження 2. Випадок $\dot{f}^1 = 0, \dot{M} = 0$ приводить до рівняння і оператора Лі наведених в роботі [8] (див. таблиця 1, випадок 3). Виконавши заміни наведені в роботі [10], одержимо рівняння (10) і оператора Галілея (4) при $\alpha_i = -1, \beta_i = 0$.

ВИСНОВКИ. У статті знайдено рівняння вигляду (7), які разом з додатковою умовою інваріантні відносно алгебри Галілея без оператора маси, а також з оператором маси. Оскільки отримані рівняння задовольняють принципу відносності Галілея, то вони можуть описувати реальні природні процеси. Так, наприклад, додаткове рівняння з теореми 1 має вигляд

$$u_0 + \frac{1}{2M(u)} (u_1)^2 + \lambda M(u) = 0.$$

Це рівняння Гамільтона-Якобі, яке широко застосовується в класичній механіці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М., 1967.
2. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М., 1978.
3. Фушич В. И. О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 246, № 4. – С. 846–850.
4. Фушич В. И. Как расширить симметрию дифференциальных уравнений // Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР. – 1987.
5. Фушич В. И. Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики // УМЖ. – 1991. – Т. 43, № 11. – С. 1456–1470.
6. Фушич В. И., Серов Н. И. Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. – 1990. – Т. А, № 7. – С. 24–27.
7. Baikov V., Gazizov R., Ibragimov N., Kovalev V. Water redistribution in irrigated soil profiles: Invariant solutions of the governing equation // Nonlinear Dynamics. – 1997. – Vol. 13. – P. 395–409.
8. Cherniha R., Serov M. Symmetries, ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection terms // European J. Appl. Math. – 1998. – Vol. 9, № 5. – P. 527–542.
9. Cherniha R., Serov M. Symmetries, ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection term II // Euro. J. Appl. Math. – 2006. – Vol. 17. – P. 597–605.
10. Cherniha R., Serov M., Rassokha I. Lie symmetries and form-preserving transformations of reaction-diffusion-convection equations // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – Vol. 342, № 2. – P. 1363–1379.
11. Dorodnitsyn V. A. On invariant solutions of non-linear heat conduction with a source // USSR Comput. Math. and Math. Phys. – 1982. – Vol. 22. – P. 115–122.
12. Fushchych W. I., Shtelen W. M., Serov M. I. Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics. – Dordrecht, 1993.
13. Fushchych W., Tsyfra I. On reduction and exact solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. Gen. – 1987. – Vol. 20. – P. 45–47.
14. Karczewska A. Statical solutions to turbulent diffusion // Nonlinear Analysis. – 1999. – Vol. 37. – P. 635–675.
15. Katkov V. L. The group classification of solutions of the hopf equations // Zhur. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz. – 1965. – Vol. 6. – P. 105–106.
16. Lie S. über integration durch bestimmte integrale von einer klasse lineare partiellen differentialgleichungen // Arch. Math. (Leipzig). – 1881. – Vol. 6. – P. 328–368.
17. Oron A., Rosenau P. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. – 1986. – Vol. 118. – P. 172–176.
18. Ovsiannikov L. V. The Group Analysis of Differential Equations. – New York, 1982.

Стаття надійшла до редколегії 03.05.15

Pliukhin O., PhD
Poltava National Yuri Kondrayuk Technical University, Poltava

CONDITIONAL INVARIANCE OF (1+1)-DIMENSIONAL REACTION-DIFFUSION-CONVECTION EQUATION WITH RESPECT TO GALILEAN ALGEBRAS

All reaction-diffusion-convection equations of (1+1) dimension, that are invariant under Galilean algebras (with mass and without mass operator) are found.

Плюхин А., канд. физ.-мат. наук, ст.преподаватель
ПолтНТУ им. Ю. Кондратюка, Полтава

УСЛОВНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ (1+1)-МЕРНОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ-КОНВЕКЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО АЛГЕБР ГАЛИЛЕЯ

Найдено все уравнения реакции-диффузии-конвекции размерности (1+1), которые являются условно инвариантными относительно алгебры Галилея без оператора массы, и алгебры Галилея с оператором массы