

¹ Андрій Яковенко,

викладач, Полтавський фаховий коледж нафти і газу, <https://orcid.org/0000-0003-0818-6332>,
e-mail: andrii.yakovenko95@gmail.com

² Олексій Васильєв,

кандидат технічних наук, доцент кафедри галузевого машинобудування та мехатроніки,
<https://orcid.org/0000-0002-9914-5482>, e-mail: a.s.vasiliev.76@gmail.com

² Сергій Жигилій,

кандидат технічних наук, доцент кафедри будівельних конструкцій, <https://orcid.org/0000-0001-5829-9226>, e-mail: theormech.zhs@gmail.com

¹Національного університету "Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка", вул. Михайла Грушевського, 2А, м. Полтава, 36021, Україна

²Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка», просп. Першотравневий 24, м. Полтава, 36011, Україна

ВИЗНАЧЕННЯ ПОЛОЖЕННЯ ЦЕНТРА ІНЕРЦІЇ ПОРОЖНИСТОГО КОРПУСУ ВІБРОМАШИНИ ВП-10 ТА ВІДПОВІДНОГО ОСЬОВОГО МОМЕНТУ ІНЕРЦІЇ

АНОТАЦІЯ. Застосування вібраційних методів набуває особливої актуальності для вдосконалення технологічних процесів. Вібрація забезпечує не лише підвищення ефективності роботи устаткування, але й сприяє покращенню якісних характеристик оброблюваних матеріалів. Зокрема, в галузі будівництва та інженерії ущільнення матеріалів є одним із ключових процесів, що визначає стабільність і надійність конструктивних рішень. Параметри ущільнення, які регулюються вібраційними установками, мають вирішальне значення для досягнення найкращих результатів. До цих параметрів відносяться амплітуда та частота коливань, інтенсивність навантаження, а також геометричні особливості конструкції вібраційної плити. Визначення найкращих значень цих параметрів дозволяє не лише забезпечити максимальну якість ущільнення, але й сприяє раціональному використанню енергетичних ресурсів та підвищенню надійності обладнання. В науковій статті розглядається визначення положення центра мас корпусу який має вигляд пустотілої трапеції та осьового моменту інерції розробленої нами вібраційної установки ВП - 10. Розглянуті параметри є необхідними для подальшого розрахунку кінетичної енергії, що, у свою чергу, дозволяє розв'язувати прикладні задачі механіки, спрямовані на оптимізацію конструктивних і експлуатаційних характеристик вібраційних плит.

Ключові слова: вібраційна плита, центр мас, момент інерції, вібраційна машина, оптимізація параметрів, вібробудувач

DETERMINATION OF THE POSITION OF THE CENTER OF INERTIA OF THE HOLLOW BODY OF VIBRATING MACHINE VP-10 AND THE CORRESPONDING AXIAL MOMENT OF INERTIA

ABSTRACT. The use of vibration methods is becoming particularly relevant for improving technological processes. Vibration not only increases the efficiency of equipment, but also contributes to improving the quality characteristics of the processed materials. In particular, in the field of construction and engineering, material compaction is one of the key processes that determines the stability and reliability of structural solutions. Compaction parameters controlled by vibratory units are critical to achieving the best results. These parameters include the amplitude and frequency of oscillations, the intensity of the load, as well as the geometric features of the design of the vibrating plate. Determining the optimal values of these parameters allows not only to ensure maximum compaction quality, but also contributes to the rational use of energy resources and increased reliability of the equipment. The scientific article considers the determination of the position of the center of mass of the body, which has the form of a hollow trapezoid, and the axial moment of inertia of the VP-10 vibration installation developed by us. The considered parameters are necessary for further calculation of kinetic energy, which, in turn, allows solving applied problems of mechanics aimed at optimizing the design and operational characteristics of vibrating plates.

Keywords: vibration plate, center of mass, moment of inertia, vibration machine, parameter optimization, vibration exciter.

1. Постановка проблеми. Якість ущільнення матеріалів вібраційними установками залежить від амплітуди та частоти коливань, навантаження і геометричних параметрів обладнання. Визначення найкращих значень цих параметрів є ключовим для забезпечення високої якості ущільнення та раціонального використання енергії. Дослідження показують, що ефективність ущільнення залежить не лише від потужності вібратора, а й від взаємодії установки з матеріалом. Оптимізація динамічних параметрів на які впливають такі величини, як положення центра мас і осьовий момент інерції, дозволяє покращити передавання енергії, зменшити втрати та підвищити продуктивність. Аналіз параметрів установки дає змогу визначити режими роботи, що забезпечують максимальну якість ущільнення. Результати можуть бути корисними для інженерів і конструкторів, які займаються проектуванням та вдосконаленням вібраційних машин у будівельній і дорожній галузях.

2. Аналіз останніх досліджень і публікацій. Вібраційні методи є невід'ємною складовою сучасних виробничих процесів, сприяючи їх оптимізації, підвищенню ефективності та покращенню якісних характеристик кінцевої продукції. Використання вібраційних методів дозволяє значно вдосконалити низку технологічних операцій, зокрема у будівництві, машинобудуванні, транспортній інженерії та інших галузях промисловості [1].

Одним із найважливіших напрямів застосування вібраційних методів є ущільнення матеріалів, що відіграє вирішальну роль у формуванні необхідної структури та міцності виробів. Процес ущільнення впливає на експлуатаційні характеристики матеріалу, забезпечуючи його рівномірну щільність, мінімізацію залишкових порожот та підвищення несучої здатності. Від ефективності цього процесу залежить довговічність, міцність і стабільність конструкцій, особливо в будівельній, дорожній та транспортній інфраструктурі [2].

Параметри ущільнення, що визначаються характеристиками вібраційної установки, зокрема амплітудою, частотою та напрямком коливань, безпосередньо впливають на досягнення необхідних фізико-механічних властивостей матеріалу. Оптимізація цих параметрів є важливим науково-технічним завданням, яке спрямоване на підвищення ефективності процесу ущільнення, зниження енергетичних витрат та забезпечення максимальної технологічної продуктивності [3].

Дослідження впливу параметрів вібраційних установок на якість ущільнення дозволяє розробити нові конструктивні рішення та удосконалити методи проектування сучасних ущільнювальних машин [4]. Встановлення найкращих режимів роботи таких установок сприятиме підвищенню ефективності виробничих процесів та раціональному використанню ресурсів.

3. Мета і завдання дослідження. Метою даної статті є визначення положення центра мас та осьового моменту інерції корпусу, що є необхідним для подальшого розрахунку кінетичної енергії та розв'язання прикладних задач механіки, спрямованих на оптимізацію параметрів вібраційної плити. Отримані результати дозволяють підвищити енергоефективність, розширити технологічні можливості та оптимізувати тягові характеристики, необхідні для ефективного переміщення вібраційного пристрою.

4. Основний матеріал і результати. На основі конструкторських розробок нами була створена вібраційна машина зі змінними робочими органами ВП-10 для ущільнення матеріалу [5]. Для з'ясування загальної тенденції впливу окремих параметрів вібраційної машини ВП - 10 на рух її робочого органу, а також для визначення оптимального співвідношення між масою окремих складових елементів вібраційної машини, величини збуджучої сили, що генерується віброзбуджувачем, і зовнішньої рушійної сили постала потреба скласти для цієї машини математичну модель її руху, щоб потім дослідити зазначену модель.

Для цього була прийнята схематична модель вібромашини у вигляді плоскої механічної системи, що рухається у вертикальній площині Ouz (рис. 1), яка складається з корпусу 1 (масою m_1 у формі порожнистої трапеції $ABDK$ відповідних розмірів й товщиною δ_1), на який жорстко закріплений корпус 2 збуджувача коливань, дебалансний вал 3 якого розташований перпендикулярно до напрямку робочого руху вібромашини. На дебалансному

валові 3 жорстко закріпленій дебаланс 5, обертання якого визначає робочий технологічний процес. Знизу до корпусу 1 також жорстко закріплена плита 4, до якої шарнірно приєднана направляюча ручка 6.

За таких припущень вібраційна машина ВП-10 моделюється механічною системою [6], що складається з чотирьох матеріальних тіл.

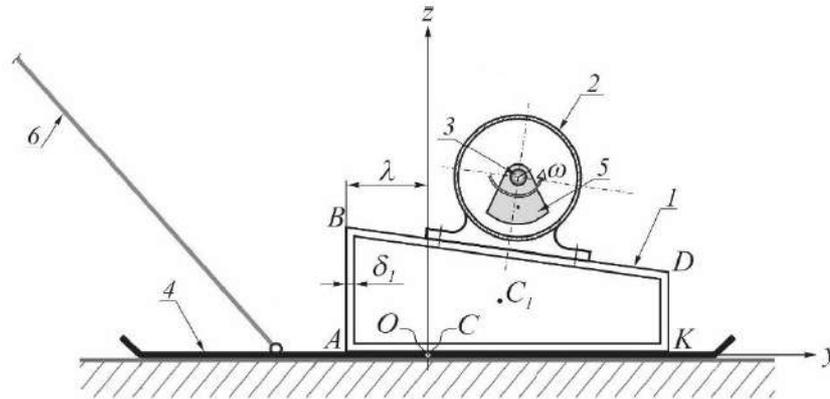


Рисунок 1. Схематична модель вібраційної машини ВП-10
Figure 1. Schematic model of the VP-10 vibration machine

За результатами проведених експериментальних випробувань і досліджень [7] встановлено, що в робочому режимі корпус 1 вібраційної машини здійснює плоскопаралельний рух в площині Oyz , через що за теоремою Кеніга [8] його кінетична енергія

$$T_1 = \frac{m_1 \cdot V_{C_1}^2}{2} + \frac{I_1 \cdot \omega_1^2}{2}, \quad (3)$$

де V_{C_1} – модуль швидкості центра інерції C_1 корпусу 1; ω_1 – модуль миттєвої кутової швидкості корпусу 1 навколо осі його миттєвого обертання, яка в розглядуваному положенні механічної системи проходить через точку C_1 перпендикулярно до площини розташування механічної системи; I_1 – осьовий момент інерції корпусу 1 відносно зазначеної осі миттєвого обертання.

Для цього спочатку зобразимо на рисунку 2 трапецію $ABDK$ та у допоміжній декартовій системі координат $A\zeta\xi$ визначимо положення її центра мас [9] як матеріального тіла відповідної форми.

Центр мас трапеції позначимо J , а її координати ζ_J і ξ_J визначимо за формулами

$$\zeta_J = \frac{S_\xi}{A} \quad \text{та} \quad \xi_J = \frac{S_\zeta}{A}, \quad (4)$$

де A – площа трапеції; S_ξ і S_ζ – статичні моменти її площі відносно осей ξ та ζ відповідно.

Розбивши трапецію $ABDK$ на прямокутник $AEDK$ площею $A_{AEDK} = d \cdot a$, центр мас J_1 якого знаходиться на перетині його діагоналей, і прямокутний трикутник EBD площею $A_{EBD} = \frac{d \cdot (b - a)}{2}$, центр мас J_2 якого знаходиться на перетині його медіан, з рисунка 2 встановлюємо, що:

$$\xi_1 = \frac{AK}{2} = \frac{d}{2}; \quad \zeta_1 = \frac{DK}{2} = \frac{a}{2}; \quad \xi_2 = \frac{DE}{3} = \frac{d}{3}; \quad \zeta_2 = AE + \frac{EB}{3} = a + \frac{b - a}{3} = \frac{2a + b}{3}.$$

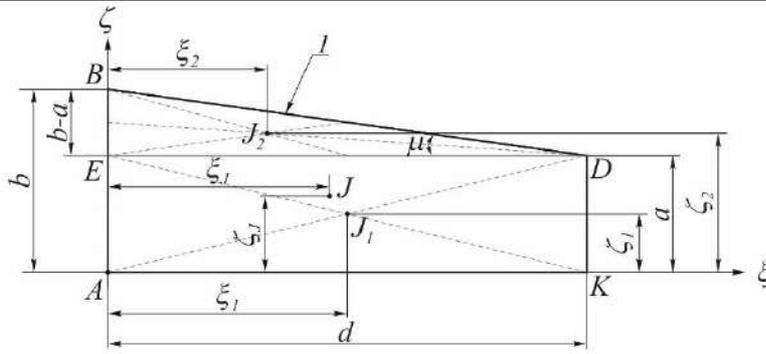


Рисунок 2. До визначення положення центра мас трапеції
 Figure 2. Before determining the position of the center of mass of the trapezoid

Площа трапеції $ABDK$ $A = d \cdot \frac{a+b}{2}$, а статичні моменти площі трапеції відносно відповідних осей

$$S_{\zeta} = S_{\zeta_1} + S_{\zeta_2} = A_{AEDK} \cdot \zeta_1 + A_{EBD} \cdot \zeta_2 = d \cdot a \cdot \frac{a}{2} + \frac{d \cdot (b-a)}{2} \cdot \frac{2a+b}{3} = d \cdot \frac{a^2 + b^2 + a \cdot b}{6};$$

$$S_{\xi} = S_{\xi_1} + S_{\xi_2} = A_{AEDK} \cdot \xi_1 + A_{EBD} \cdot \xi_2 = d \cdot a \cdot \frac{d}{2} + \frac{d \cdot (b-a)}{2} \cdot \frac{d}{3} = d^2 \cdot \frac{2a+b}{6}.$$

Підставляючи встановлені значення в формулу (4), дістанемо координати

$$\zeta_J = \frac{d \cdot \frac{a^2 + b^2 + a \cdot b}{6}}{d \cdot \frac{a+b}{2}} = \frac{d \cdot (a^2 + b^2 + a \cdot b)}{6} \cdot \frac{2}{d \cdot (a+b)} = \frac{a^2 + b^2 + a \cdot b}{3 \cdot (a+b)} \quad (5)$$

і

$$\xi_J = \frac{d^2 \cdot \frac{2a+b}{6}}{d \cdot \frac{a+b}{2}} = \frac{d^2 \cdot (2a+b)}{6} \cdot \frac{2}{d \cdot (a+b)} = \frac{d \cdot (2a+b)}{3 \cdot (a+b)}, \quad (6)$$

за якими на рисунку 3 й зображуємо шукану точку J .

Тепер на рисунку 3 розглянемо трапецію, назвавши її, наприклад, $A'B'D'K'$, яка визначає порожнину корпусу l . За отриманими формулами (5) і (6) встановимо положення центра J' мас цієї трапеції як матеріального тіла відповідної форми, враховуючи (після нескладного геометричного аналізу), що трапеція $A'B'D'K'$ має розміри:

$$d' = d - 2 \cdot \delta_1, \quad (7)$$

$$a' = a - \delta_1 - \delta_a = a - \delta_1 - \left(\frac{\delta_1}{\cos \mu} - \delta_1 \cdot \operatorname{tg} \mu \right) = a - \delta_1 - \frac{\delta_1}{\cos \mu} + \delta_1 \cdot \operatorname{tg} \mu, \quad (8)$$

$$b' = b - \delta_1 - \delta_b = b - \delta_1 - \left(\frac{\delta_1}{\cos \mu} + \delta_1 \cdot \operatorname{tg} \mu \right) = b - \delta_1 - \frac{\delta_1}{\cos \mu} - \delta_1 \cdot \operatorname{tg} \mu, \quad (9)$$

де $\mu = \angle BDE$ – кут уведений в обіг на рисунку 3, з якого очевидно, що

$$\cos \mu = \frac{DE}{BD} = \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + d^2 - 2ab}}, \quad (10)$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{BE}{DE} = \frac{b-a}{d}. \quad (11)$$

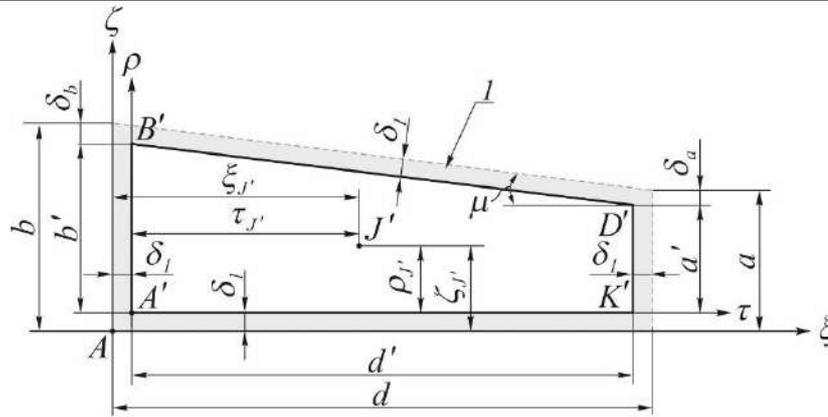


Рисунок 3. До визначення положення центра мас трапеції $A'B'D'K'$
 Figure 3. Before determining the position of the center of mass of the trapezoid $A'B'D'K'$

Площа трапеції $A'B'D'K'$

$$A' = d' \cdot \frac{a' + b'}{2} = d \cdot \frac{a + b}{2} - (a + b) \cdot \delta_1 - \left(1 + \frac{1}{\cos \mu}\right) \cdot (d - 2 \cdot \delta_1) \cdot \delta_1,$$

або, урахувавши значення A , матимемо:

$$A' = A - (a + b) \cdot \delta_1 - \left(1 + \frac{1}{\cos \mu}\right) \cdot (d - 2 \cdot \delta_1) \cdot \delta_1. \quad (12)$$

Координати $\rho_{J'}$ і $\tau_{J'}$ точки J' у системі координат $A'\rho\tau$ (рис. 3) дістанемо за формулами (5) і (6), підставляючи в них відповідні значення (7) та (8) і (9) й здійснюючи легітимні тригонометричні перетворення:

$$\rho_{J'} = \frac{(a + b - 2 \cdot \delta_1) \cdot \left[a + b - \delta_1 \cdot \left(2 + \frac{3}{\cos \mu}\right) \right] - (a - \delta_1) \cdot (b - \delta_1)}{3 \cdot \left(a + b - 2 \cdot \delta_1 - 2 \cdot \frac{\delta_1}{\cos \mu} \right)} + \frac{(a - b) \cdot \delta_1 \cdot \text{tg} \mu + \delta_1^2 \cdot (3 + 4 \cdot \text{tg}^2 \mu)}{3 \cdot \left(a + b - 2 \cdot \delta_1 - 2 \cdot \frac{\delta_1}{\cos \mu} \right)},$$

$$\tau_{J'} = \frac{d' \cdot (2 \cdot a' + b')}{3 \cdot (a' + b')} = \frac{(d - 2 \cdot \delta_1) \cdot \left(2 \cdot a + b - 3 \cdot \delta_1 - 3 \cdot \frac{\delta_1}{\cos \mu} + \delta_1 \cdot \text{tg} \mu \right)}{3 \cdot \left(a + b - 2 \cdot \delta_1 - 2 \cdot \frac{\delta_1}{\cos \mu} \right)}.$$

За отриманими значеннями $\rho_{J'}$ і $\tau_{J'}$ зображуємо точку J' (рис. 3).

Знаючи координати $\rho_{J'}$ і $\tau_{J'}$ точки J' в системі координат $A'\rho\tau$ встановлюємо (рис. 3) координати $\zeta_{J'}$ і $\xi_{J'}$ цієї точки в системі відліку $A\zeta\xi$:

$$\xi_{J'} = \delta_1 + \tau_{J'}, \quad (13)$$

$$\zeta_{J'} = \delta_1 + \rho_{J'}. \quad (14)$$

Тепер встановимо положення центра інерції C_1 безпосередньо корпусу l . Для цього на рисунку 4 зобразимо корпус l й точки J і J' , місцезнаходження яких вже з'ясовано.

Координати ζ_{C_1} і ξ_{C_1} точки C_1 у системі відліку $A\zeta\xi$ знову знайдемо за формулами

$$\zeta_{C_1} = \frac{S_{1\zeta}}{A_1} \quad \text{та} \quad \xi_{C_1} = \frac{S_{1\xi}}{A_1}, \quad (15)$$

де A_1 – площа корпусу I (певна річ, в дійсності A_1 – це площа поперечного перерізу корпусу I вібраційної машини ВП-10; але в умовах розглядуваної схематичної моделі, це площа матеріального тіла I досліджуваної механічної системи); $S_{1\xi}$ і $S_{1\zeta}$ – статичні моменти площі корпусу I відносно осей ξ та ζ відповідно.

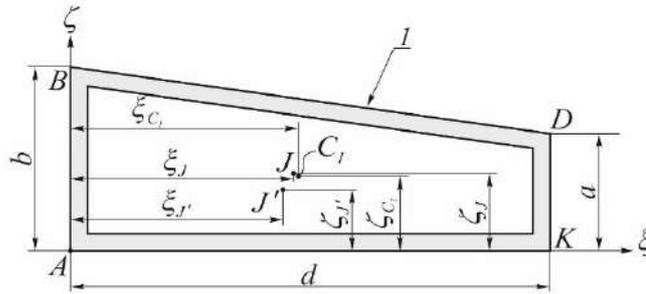


Рисунок 4. До визначення положення центра інерції корпусу I
 Figure 4. Before determining the position of the center of inertia of the body I

Площа корпусу I

$$A_1 = A - A' = (a + b) \cdot \delta_1 + \left(1 + \frac{1}{\cos \mu}\right) \cdot (d - 2 \cdot \delta_1) \cdot \delta_1, \quad (16)$$

а її статичні моменти відносно осей ξ та ζ

$$S_{1\xi} = S_\xi + S_{\xi'} = d \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \zeta_J + A' \cdot \zeta_{J'}, \quad (17)$$

$$S_{1\zeta} = S_\zeta + S_{\zeta'} = d \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \xi_J + A' \cdot \xi_{J'}, \quad (18)$$

де значення A' , ζ_J , ξ_J , $\xi_{J'}$ і $\zeta_{J'}$ визначають формули (12), (5), (6), (13) і (14) відповідно.

Підставивши значення (16), (17) і (18) в формули (15), знайдемо координати ζ_{C_1} і ξ_{C_1}

Встановимо [10] тепер в формулі (3) значення осьового моменту інерції I_1 . Знову спочатку розглянемо матеріальну пластину у вигляді трапеції $ABDK$ як сукупність матеріальних пластин у вигляді прямокутника $AEDK$ і прямокутного трикутника EBD (рис. 2).

Згідно з [11] осьові моменти інерції прямокутної пластини $AEDK$ (розмірами $d \times a$) та трикутної пластини EBD (з катетами d і $(b-a)$) у системі координат $A\zeta\xi$ відносно їх центральних осей, що проходять перпендикулярно до площини $A\zeta\xi$ через точки J_1 і J_2 відповідно, дорівнюють

$$I_{AEDK}^* = \frac{m_{AEDK} \cdot (d^2 + a^2)}{12} \quad \text{і} \quad I_{EBD}^* = \frac{m_{EBD} \cdot [d^2 + (b-a)^2]}{18}.$$

Осьові ж моменти інерції пластин $AEDK$ і EBD відносно осі, що проходить перпендикулярно до площини $A\zeta\xi$ через точку J визначимо за теоремою Штейнера-Гюйгенса [11]:

$$I_{AEDK} = I_{AEDK}^* + m_{AEDK} \cdot (J_1 J)^2 = \frac{m_{AEDK} \cdot (d^2 + a^2)}{12} + m_{AEDK} \cdot (J_1 J)^2 = m_{AEDK} \cdot \left[\frac{d^2 + a^2}{12} + (J_1 J)^2 \right],$$

$$I_{EBD} = I_{EBD}^* + m_{EBD} \cdot (J_2 J)^2 = \frac{m_{EBD} \cdot [d^2 + (b-a)^2]}{18} + m_{EBD} \cdot (J_2 J)^2 = m_{EBD} \cdot \left[\frac{d^2 + (b-a)^2}{18} + (J_2 J)^2 \right].$$

З рисунка 3 за положеннями векторного числення видно, що у системі відліку $A\zeta\xi$ квадрати відповідних віддалей дорівнюють

$$(J_1J)^2 = (\xi_1 - \xi_J)^2 + (\zeta_1 - \zeta_J)^2 = \left(\frac{d}{2} - \xi_J\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \zeta_J\right)^2, \quad (19)$$

$$(J_2J)^2 = (\xi_2 - \xi_J)^2 + (\zeta_2 - \zeta_J)^2 = \left(\frac{d}{3} - \xi_J\right)^2 + \left(\frac{2a+b}{3} - \zeta_J\right)^2, \quad (20)$$

де значення координат ζ_J і ξ_J визначають формули (5) і (6) відповідно.

Оскільки момент інерції тіла є величиною адитивною (тобто момент інерції тіла дорівнює сумі моментів інерції окремих частин цього тіла), то, з урахуванням формул (19) і (20), момент інерції матеріальної пластини у вигляді трапеції $ABDK$ відносно осі, що проходить перпендикулярно до площини $A\zeta\xi$ через точку J , дорівнює

$$\begin{aligned} I_{ABDK} &= I_{AEDK} + I_{EBD} = \\ &= m_{AEDK} \cdot \left[\frac{d^2 + a^2}{12} + \left(\frac{d}{2} - \xi_J\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \zeta_J\right)^2 \right] + m_{EBD} \cdot \left[\frac{d^2 + (b-a)^2}{18} + \left(\frac{d}{3} - \xi_J\right)^2 + \left(\frac{2a+b}{3} - \zeta_J\right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Тому що у розглядуваному випадкові маси m_{ABDK} , m_{AEDK} і m_{EBD} пропорційні площам трапеції $ABDK$, прямокутника $AEDK$ і трикутника EBD відповідно, то, склавши очевидні пропорції, неважко встановити, що

$$m_{AEDK} = \frac{2 \cdot a}{a+b} \cdot m_{ABDK}, \quad \text{а} \quad m_{EBD} = \frac{b-a}{a+b} \cdot m_{ABDK},$$

з урахуванням чого й після відповідних «спрощень-перетворень» дістаємо:

$$\begin{aligned} I_{ABDK} &= m_{ABDK} \cdot \left\{ \frac{2 \cdot a}{a+b} \cdot \left[\frac{d^2 + a^2}{12} + \left(\frac{d}{2} - \xi_J\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \zeta_J\right)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b-a}{a+b} \cdot \left[\frac{d^2 + (b-a)^2}{18} + \left(\frac{d}{3} - \xi_J\right)^2 + \left(\frac{2a+b}{3} - \zeta_J\right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Момент інерції матеріальної пластини у вигляді трапеції $A'B'D'K'$ у системі відліку $A'\rho\tau$ відносно осі, що проходить перпендикулярно до площини $A'\rho\tau$ через точку J' (рис. 3), знайдемо, скориставшись отриманою формулою (21), підставляючи в яку необхідні величини, що визначають отримані вище відповідні формули, дістанемо:

$$\begin{aligned} I_{A'B'D'K'} &= m_{A'B'D'K'} \cdot \left\{ \frac{2 \cdot a'}{a'+b'} \cdot \left[\frac{(d')^2 + (a')^2}{12} + \left(\frac{d'}{2} - \tau_{J'}\right)^2 + \left(\frac{a'}{2} - \rho_{J'}\right)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b'-a'}{a'+b'} \cdot \left[\frac{(d')^2 + (b'-a')^2}{18} + \left(\frac{d'}{3} - \tau_{J'}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot a' + b'}{3} - \rho_{J'}\right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Застосовуючи теорему Штейнера-Гюйгенса [8] і враховуючи адитивність моменту інерції тіла та те, що в розглядуваному випадкові масу матеріального тіла у вигляді трапеції $A'B'D'K'$ необхідно приймати від'ємною, осьовий момент інерції I_1 корпусу I відносно осі, що проходить через точку C_1 , знайдемо у вигляді суми:

$$I_1 = I_{ABDK} + m_{ABDK} \cdot (C_1J)^2 - I_{A'B'D'K'} - m_{A'B'D'K'} \cdot (C_1J')^2. \quad (23)$$

З рисунка 4 неважко бачити, що

$$(C_1 J)^2 = (\xi_{C_1} - \xi_J)^2 + (\zeta_{C_1} - \zeta_J)^2 \quad \text{і} \quad (C_1 J')^2 = (\xi_{C_1} - \xi_{J'})^2 + (\zeta_{C_1} - \zeta_{J'})^2, \quad (24)$$

де значення координат ζ_{C_1} і ξ_{C_1} , ζ_J , ξ_J , $\zeta_{J'}$ і $\xi_{J'}$ визначають формули (15), (5), (6), (13) і (14) відповідно.

Встановимо співвідношення між масами m_1 , m_{ABDK} і $m_{A'B'D'K'}$, які відповідно пропорційні площам A_1 корпусу I , A трапеції $ABDK$ і A' трапеції $A'B'D'K'$, через що

$$m_{ABDK} = m_1 \cdot \frac{A}{A_1} = m_1 \cdot \frac{d \cdot (a+b)}{2 \cdot A_1} \quad \text{і} \quad m_{A'B'D'K'} = m_1 \cdot \frac{A'}{A_1}, \quad (25)$$

де значення площ A_1 і A' визначають формули (16) і (12) відповідно.

Підставляючи значення, які визначають формули (21), (24), (22) і (25), у формулу (23), отримуємо остаточне шукане значення осьового моменту інерції I_1 . Якщо звернути увагу на те, що після зазначеної процедури підставляння, кожен доданок отриманої формули буде містити спільний множник m_1 , який можна винести за дужки, й позначити відповідну суму, що опиниться у дужках після винесення m_1 , через i_1^2 , то можна дістати формулу осьового моменту інерції I_1 корпусу I відносно осі його миттєвого обертання у вигляді:

$$I_1 = m_1 \cdot i_1^2 = const, \quad (26)$$

де згідно з [8] i_1 – це радіус інерції корпусу I відносно його центральної осі.

5. Висновки.

1) У даній роботі розв'язано задачу визначення положення центра мас корпусу C_1 , а також його осьового моменту інерції I_1 відносно осі миттєвого центру обертання, що проходить через задану точку C_1 вібраційної машини ВП-10. Отримані результати є важливими для подальших розрахунків кінетичних характеристик руху вібраційної машини та можуть бути використані для оптимізації динамічних параметрів цієї машини.

2) Встановлено, що у виведених залежностях (4) ÷ (26) всі параметри є константами, що визначаються через чотири основні геометричні характеристики корпусу: лінійні розміри d , a , b та δ_1 , що враховує конструктивні вібраційної машини ВП-10. Отримані математичні вирази дозволяють здійснювати точні розрахунки механічних параметрів конструкції та забезпечують основу для подальших досліджень, спрямованих на вдосконалення робочих режимів вібраційних машин.

Список використаних джерел:

1. Будівельна техніка: підручник / О.Г. Онищенко, В.О. Онищенко. Б.О. Коробко, В.В. Вірченко / За ред. В.О. Онищенка. – К.: Кондор-Видавництво, 2017. – 416 с.
2. Назаренко І.І. Вібраційні машини і процеси будівельної індустрії / І.І. Назаренко. – Навчальний посібник. – К.: КНУБА, 2007. – 230с ISBN 978-966-627-134-7.
3. Сукач М.К. Будівельна техніка: навчальний посібник / М.К. Сукач, І.В. Ніколенко, О.Ю. Вольтерс. – Київ Сімферополь: КНУБА – НАПКС, 2010. – 296 с.
4. Zhyhylii S.M. Mathematical model of the dynamic action of the controlled vibration exciter on the processed medium of mixer with toroidal working container / S.M. Zhyhylii, M.O. Kharchenko, J.O. Katella // International Journal of Engineering & Technology. 2018. Vol. 7, No. 3.2. Pp. 478–485. DOI: 10.14419/ijet.v7i3.2.14576
5. Васильєв О.С., Яковенко А.М. Вібраційна машина для підготовки та ущільнення повер-хонь. Технічні науки та технології, 2023. № 4 (34), С. 52–60. [https://doi.org/10.25140/2411-5363-2023-4\(34\)-52-60](https://doi.org/10.25140/2411-5363-2023-4(34)-52-60)
6. Morin D. Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions / David Morin. – Cambridge University Press; 1st edition, 2008. – 734 p. ISBN-10: 0521876222

7. Яковенко А. М., Васи́льєв О. С. Визначення щільності поверхні, яка піддається впливу різними робочими органами вібраційної плити ВП-10. *Technology Audit and Production Reserves*, 2024 4(1(78), 26–31. <https://doi.org/10.15587/2706-5448.2024.310802>
8. Seely F. *Analytical mechanics for engineers* / Fred B. Seely, Newton E. Ensign. – Chapman & Hall, Limited, New York, London; 3d ed., rewritten View all formats and editions, 1941. – 488 p.
9. Павловський М.А. Теоретична механіка: підручник / М.А. Павловський. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
10. Жигилій С.М. Кінематика точки: курс лекцій з дисципліни «Теоретична механіка» для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання / С.М. Жигилій. – Полтава : ПолтНТУ, 2024. – 194 с.
11. Beer F. *Vector mechanics for engineers: statics and dynamics, tenth edition* / Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, Jr., David F. Mazurek, Phillip J. Cornwell – New York: McGraw-Hill Companies, Inc.,

References:

1. Onyshchenka, V. O. (2017). *Budivelna tekhnika [Construction Machinery]*. Kyiv: Kondor-Vydavnytstvo Publ., 416 pp.
2. Nazarenko, I. I. (2007). *Vibratsiyni mashyny i protsesy budivel'noyi industriyi [Vibration Machines and Processes of the Construction Industry]*. Kyiv: KNUBA, 230 pp. ISBN 978-966-627-134-7.
3. Sukach, M. K. (2010). *Budivelna tekhnika: navchalnyi posibnyk [Construction Engineering: Textbook]*. Kyiv-Simferopol: KNUBA – NAPKS, 296 pp.
4. Zhyhylii, S. M. (2018). Mathematical model of the dynamic action of the controlled vibration exciter on the processed medium of mixer with toroidal working container. *International Journal of Engineering & Technology*, 7(3.2), 478–485. <https://doi.org/10.14419/ijet.v7i3.2.14576>.
5. Vasyliiev O., Yakovenko A. (2023) Vibrating machine for surface preparation and sealing. *Technical sciences and technologies*. №4 (34), 52–60pp. [https://doi.org/10.25140/2411-5363-2023-4\(34\)-52-60](https://doi.org/10.25140/2411-5363-2023-4(34)-52-60).
6. Morin, D. (2008). *Introduction to classical mechanics: With problems and solutions (1st ed.)*. Cambridge University Press. ISBN-10: 0521876222
7. Yakovenko A., Vasyliiev O. (2024) Determination of the density of the surface which is exposed to various working bodies of the vibration plate VP-10. *Technology Audit and Production Reserves*, 4(1(78), 26– 31pp. <https://doi.org/10.15587/2706-5448.2024.310802>
8. Seely, F. B., & Ensign, N. E. (1941). *Analytical mechanics for engineers (3rd ed., rewritten)*. Chapman & Hall, Limited.
9. Pavlovsky, M. A. (2002). *Theoretical mechanics*. Tekhnika.
10. Zhyhylii, S. M. (2024). *Kinematics points: Course of lectures on the discipline "Theoretical Mechanics"*. PoltNTU.
11. Beer, F. P., Johnston, E. R., Mazurek, D. F., & Cornwell, P. J. (2019). *Vector mechanics for engineers: Statics and dynamics (10th ed.)*. McGraw-Hill Education.