Міністерство освіти і науки України
Національний університет
«Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка»

Матеріали

VII Всеукраїнської науково-технічної конференції

«Створення, експлуатація і ремонт автомобільного транспорту та будівельної техніки»

25 квітня 2024 р.

Полтава 2024

УДК 621.01.001, 531.65

Жигилій Сергій Михайлович, к.т.н., доцент
Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка»

ПРО РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА ДРУГОГО РОДУ ТА РІВНЯННЯ НІЛЬСЕНА

При складанні математичної моделі вібраційної машини будь-якого технологічного призначення, як механічної системи з багатьма ступенями вільності, вживають відомі з аналітичної механіки рівняння Лагранжа другого роду (які він у своїй роботі «Аналітична механіка» назвав «диференціальними рівняннями для вирішення всіх проблем динаміки»):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i, \quad (i=1,2,...,s), \tag{1}$$

де q_i і $\dot{q}_i=\frac{dq_i}{dt}$ – відповідно узагальнені координати й узагальнені швидкості, які є сукупністю незалежних між собою параметрів, що однозначно визначають положення та рух механічної системи в просторі; s і T – відповідно кількість ступенів вільності та кінетична енергія механічної системи; Q_i – узагальнена сила, що відповідає узагальненій координаті q_i.

Менш відомими та поширеними є рівняння Нільсена, які уперше були опубліковані в 1935 році в Берліні [1] у вигляді

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_j}-2\cdot\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j, \quad (i=1,2,...,s), \tag{2}$$

які містять загальну похідну за часом від кінетичної енергії $\dot{T}=\frac{dT}{dt}$.

Рівняння (1) і (2) указують порядок і послідовність дій, необхідних для складання диференціальних рівнянь руху матеріальної системи в узагальнених координатах, для чого треба знайти кінетичну енергію цієї системи $T=f\left(q_j,\dot{q}_j\right)$, як функцію узагальнених координат й швидкостей.

Існує думка, що для механічної системи з s ступенями вільності рівняння Нільсена дозволяють скоротити кількість операцій диференціювання з $3s$ (як при застосуванні алгоритму Лагранжа) до $2s+1$. З самих рівнянь (1) і (2) очевидно, що різниця в математичних діях між ними визначається першими доданками їх лівих частин $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)$ і $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{dT}{dt}\right)$ відповідно.

З’ясуємо це, розглянувши для прикладу вібраційний пристрій, обладнаний керованим механічним дебалансним збуджувачем колових поступальних коливань, як не таку вже й складну механічну систему, що має $s=4$ ступені вільності та складається з п’яти матеріальних тіл [2], узагальненими координатами якої є $q_1=x_C$, $q_2=y_C$, $q_3=\varphi$, $q_4=\theta$, а кінетична енергія визначається 11-а доданками у вигляді:

$$T=\frac{M}{2}\cdot\dot{x}_C^2+\frac{M}{2}\cdot\dot{y}_C^2+\frac{I_1}{2}\cdot\dot{\varphi}^2-I_2\cdot\dot{\varphi}\cdot\dot{\theta}+\frac{I_2}{2}\cdot\dot{\theta}^2+$$
$$+m\cdot e\cdot\dot{x}_C\cdot\dot{\varphi}\cdot cos(\varphi-\theta)-m\cdot e\cdot\dot{x}_C\cdot\dot{\varphi}\cdot cos\,\varphi+m\cdot e\cdot\dot{y}_C\cdot\dot{\varphi}\cdot sin(\varphi-\theta)-$$
$$-m\cdot e\cdot\dot{y}_C\cdot\dot{\varphi}\cdot sin\,\varphi-m\cdot e\cdot\dot{x}_C\cdot\dot{\theta}\cdot cos(\varphi-\theta)-m\cdot e\cdot\dot{y}_C\cdot\dot{\theta}\cdot sin(\varphi-\theta),$$

де M, m, I_1, I_2, e – певні сталі фізичні величини, а кожна узагальнена координата перебуває у функціональній залежності від часу t.

Для використання алгоритму Лагранжа знайдімо спочатку необхідні частинні похідні $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$, а потім похідні за часом $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)$ $(i=1,2,\ldots,4)$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_C}=M\cdot\dot{x}_C+m\cdot e\cdot\left[1\cdot\dot{\varphi}\cdot cos(\varphi-\theta)-1\cdot\dot{\varphi}\cdot cos\,\varphi-1\cdot\dot{\theta}\cdot cos(\varphi-\theta)\right],$$

…, …,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_4}=\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=I_2\cdot\dot{\varphi}\cdot 1-I_2\cdot\dot{\theta}-m\cdot e\cdot\left[\dot{x}_C\cdot 1\cdot cos(\varphi-\theta)+\dot{y}_C\cdot 1\cdot sin(\varphi-\theta)\right];$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_C}\right)=M\cdot\ddot{x}_C+m\cdot e\cdot\left[\ddot{\varphi}\cdot cos(\varphi-\theta)-\dot{\varphi}\cdot sin(\varphi-\theta)\cdot\left(\dot{\varphi}-\dot{\theta}\right)-\right.$$
$$\left.-\ddot{\varphi}\cdot cos\,\varphi+\dot{\varphi}^2\cdot sin\,\varphi-\ddot{\theta}\cdot cos(\varphi-\theta)+\dot{\theta}\cdot sin(\varphi-\theta)\cdot\left(\dot{\varphi}-\dot{\theta}\right)\right],$$

…, …,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_4}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)=I_2\cdot\ddot{\varphi}-I_2\cdot\ddot{\theta}-m\cdot e\cdot\left[\ddot{x}_C\cdot cos(\varphi-\theta)-\right.$$
$$\left.-\dot{x}_C\cdot sin(\varphi-\theta)\cdot\left(\dot{\varphi}-\dot{\theta}\right)+\ddot{y}_C\cdot sin(\varphi-\theta)+\dot{y}_C\cdot cos(\varphi-\theta)\cdot\left(\dot{\varphi}-\dot{\theta}\right)\right].$$

Підрахувавши здійснені операції диференціювання, встановлюємо, що на етапі знаходження частинних похідних їх виконано 18 разів, а при знаходженні похідних за часом – 50. Тобто для встановлення першого доданка рівняння (1) знадобилося здійснити 68 операцій диференціювання.

При використанні рівнянь Нільсена знайдімо спочатку похідну за часом $\dot{T}=\frac{dT}{dt}$, а потім відповідні частинні похідні $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{dT}{dt}\right)$ $(i=1,2,\ldots,4)$:

$$\frac{dT}{dt}=M\cdot\dot{x}_C\cdot\ddot{x}_C+M\cdot\dot{y}_C\cdot\ddot{y}_C+I_1\cdot\dot{\varphi}\cdot\ddot{\varphi}-I_2\cdot\left(\ddot{\varphi}\cdot\dot{\theta}+\dot{\varphi}\cdot\ddot{\theta}\right)+I_2\cdot\dot{\theta}\cdot\ddot{\theta}+$$
$$+m\cdot e\cdot\left[\ddot{x}_C\cdot\dot{\varphi}\cdot cos(\varphi-\theta)+\dot{x}_C\cdot\ddot{\varphi}\cdot cos(\varphi-\theta)-\dot{x}_C\cdot\dot{\varphi}\cdot sin(\varphi-\theta)\cdot\left(\dot{\varphi}-\dot{\theta}\right)\right]-$$
$$-m\cdot e\cdot\left(\ddot{x}_C\cdot\dot{\varphi}\cdot cos\,\varphi+\dot{x}_C\cdot\ddot{\varphi}\cdot cos\,\varphi-\dot{x}_C\cdot\dot{\varphi}^2\cdot sin\,\varphi\right)+$$
$$+m\cdot e\cdot\left[\ddot{y}_C\cdot\dot{\varphi}\cdot sin(\varphi-\theta)+\dot{y}_C\cdot\ddot{\varphi}\cdot sin(\varphi-\theta)+\dot{y}_C\cdot\dot{\varphi}\cdot cos(\varphi-\theta)\cdot\left(\dot{\varphi}-\dot{\theta}\right)\right]-$$
$$-m\cdot e\cdot\left(\ddot{y}_C\cdot\dot{\varphi}\cdot sin\,\varphi+\dot{y}_C\cdot\ddot{\varphi}\cdot sin\,\varphi+\dot{y}_C\cdot\dot{\varphi}^2\cdot cos\,\varphi\right)-$$
$$-m\cdot e\cdot\left[\ddot{x}_C\cdot\dot{\theta}\cdot cos(\varphi-\theta)+\dot{x}_C\cdot\ddot{\theta}\cdot cos(\varphi-\theta)-\dot{x}_C\cdot\dot{\theta}\cdot sin(\varphi-\theta)\cdot\left(\dot{\varphi}-\dot{\theta}\right)\right]-$$

$$-m\cdot e\cdot\left[\ddot{y}_C\cdot\dot{\theta}\cdot sin(\varphi-\theta)+\dot{y}_C\cdot\ddot{\theta}\cdot sin(\varphi-\theta)+\dot{y}_C\cdot\dot{\theta}\cdot cos(\varphi-\theta)\cdot(\dot{\varphi}-\dot{\theta})\right];$$

$$\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_1}=\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{x}_C}=M\cdot 1\cdot\ddot{x}_C+m\cdot e\cdot\left[1\cdot\ddot{\varphi}\cdot cos(\varphi-\theta)-1\cdot\dot{\varphi}\cdot sin(\varphi-\theta)\cdot(\dot{\varphi}-\dot{\theta})-\right.$$

$$\left.-1\cdot\ddot{\varphi}\cdot cos\varphi+1\cdot\dot{\varphi}^2\cdot sin\varphi-1\cdot\ddot{\theta}\cdot cos(\varphi-\theta)+1\cdot\dot{\theta}\cdot sin(\varphi-\theta)\cdot(\dot{\varphi}-\dot{\theta})\right],$$

$$\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_2}=\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{y}_C}=M\cdot 1\cdot\ddot{y}_C+m\cdot e\cdot\left[1\cdot\ddot{\varphi}\cdot sin(\varphi-\theta)+1\cdot\dot{\varphi}\cdot cos(\varphi-\theta)\cdot(\dot{\varphi}-\dot{\theta})-\right.$$

$$\left.-1\cdot\ddot{\varphi}\cdot sin\varphi-1\cdot\dot{\varphi}^2\cdot cos\varphi-1\cdot\ddot{\theta}\cdot sin(\varphi-\theta)-1\cdot\dot{\theta}\cdot cos(\varphi-\theta)\cdot(\dot{\varphi}-\dot{\theta})\right],$$

$$\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_3}=\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{\varphi}}=I_1\cdot 1\cdot\ddot{\varphi}-I_2\cdot 1\cdot\ddot{\theta}+m\cdot e\cdot\left[\ddot{x}_C\cdot 1\cdot cos(\varphi-\theta)-2\cdot\dot{x}_C\cdot\dot{\varphi}\cdot sin(\varphi-\theta)+\right.$$

$$+\dot{x}_C\cdot 1\cdot\dot{\theta}\cdot sin(\varphi-\theta)-\ddot{x}_C\cdot 1\cdot cos\varphi+2\cdot\dot{x}_C\cdot\dot{\varphi}\cdot sin\varphi+\ddot{y}_C\cdot 1\cdot sin(\varphi-\theta)+$$

$$+2\cdot\dot{y}_C\cdot\dot{\varphi}\cdot cos(\varphi-\theta)-\dot{y}_C\cdot 1\cdot\dot{\theta}\cdot cos(\varphi-\theta)-\ddot{y}_C\cdot 1\cdot sin\varphi-$$

$$\left.-2\cdot\dot{y}_C\cdot\dot{\varphi}\cdot cos\varphi+\dot{x}_C\cdot 1\cdot\dot{\theta}\cdot sin(\varphi-\theta)-\dot{y}_C\cdot 1\cdot\dot{\theta}\cdot cos(\varphi-\theta)\right],$$

$$\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_4}=\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{\theta}}=-I_2\cdot\ddot{\varphi}\cdot 1+I_2\cdot 1\cdot\ddot{\theta}+m\cdot e\cdot\left[\dot{x}_C\cdot\dot{\varphi}\cdot 1\cdot sin(\varphi-\theta)-\dot{y}_C\cdot\dot{\varphi}\cdot 1\cdot cos(\varphi-\theta)-\right.$$

$$-\ddot{x}_C\cdot 1\cdot cos(\varphi-\theta)+\dot{x}_C\cdot\dot{\varphi}\cdot 1\cdot sin(\varphi-\theta)-2\cdot\dot{x}_C\cdot\dot{\theta}\cdot sin(\varphi-\theta)-$$

$$\left.-\ddot{y}_C\cdot 1\cdot sin(\varphi-\theta)-\dot{y}_C\cdot\dot{\varphi}\cdot 1\cdot cos(\varphi-\theta)+2\cdot\dot{y}_C\cdot\dot{\theta}\cdot cos(\varphi-\theta)\right].$$

Неважко бачити, що на етапі знаходження похідної $\frac{dT}{dt}$ довелося здійснити 38 диференціювань та при знаходженні частинних похідних також 38 подібних дій, через що для встановлення першого доданка рівняння (2) знадобилося здійснити 76 операцій диференціювання.

З’ясована різниця очевидна й твердження, що рівняння Нільсена зменшують кількість операцій диференціювання є безпідставним. Усвідомивши це, варто розуміти, що застосування рівнянь Нільсена скорочує тільки кількість заголовків (або повідомлень) про наміри про взяття потрібних похідних, але обсяг математичних дій, пов’язаних з безпосереднім диференціюванням, збільшується порівняно з рівнянь Лагранжа II-о роду.

Література

1. Nielsen I. Elementare Mechanik. – Berlin, 1935.

2. Жигилій С.М. До визначення кінетичної енергії вібраційного пристрою з керованим збуджувачем коливань / С.М. Жигилій // Тези 75-ї наукової конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів та студентів Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка». Том 1. (Полтава, 02 – 25.V.23 р.) – Полтава: Національний університет імені Юрія Кондратюка, 2023. – С. 127-128.