Міністерство аграрної політики України
Луганський національний аграрний університет

Леві Л.І., Коваль А.В., Ліхоманов О.О.

Схвалено Міністерством аграрної політики України як навчальний посібник для підготовки бакалаврів галузі знань 1001 «Техніка та енергетика аграрного виробництва» у вищих навчальних закладах Міністерства аграрної політики України
Гриф № 18-28-13/801 від 23.06.09

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЛІНІЙНА, ВЕКТОРНА АЛГЕБРА І АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

для практичних занять,
індивідуальної і самостійної роботи
з варіантами завдань
до розрахунково-графічної роботи

Луганськ - 2009

Міністерство аграрної політики України
Луганський національний аграрний університет

Лєві Л.І., Коваль А.В., Ліхоманов О.О.

Схвалено Міністерством аграрної політики України як навчальний посібник для підготовки бакалаврів галузі знань 1001 «Техніка та енергетика аграрного виробництва» у вищих навчальних закладах Міністерства аграрної політики України
Гриф № 18-28-13/801 від 23.06.09

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЛІНІЙНА, ВЕКТОРНА АЛГЕБРА І АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

для практичних занять,
індивідуальної і самостійної роботи
з варіантами завдань
до розрахунково-графічної роботи

Луганськ - 2009

ББК 22.11я7+22.151.54я7
Л 36

Рецензенти: В.М.Михайленко, доктор технічних наук, професор кафедри прикладної математики Київського національного університету будівництва і архітектури.
М.В.Брагінець, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри механізації виробничих процесів Луганського національного аграрного університету.

Л 36 Лєві Л.І., Коваль А.В., Ліхоманов О.О. Вища математика. Лінійна, векторна алгебра і аналітична геометрія. Навчальний посібник для практичних занять, індивідуальної і самостійної роботи з варіантами завдань до розрахунково-графічної роботи. – Луганськ: ТОВ «Віртуальна реальність», 2009. – 176 с.

ISBN 978-966-492-073-2

Навчальний посібник містить короткий теоретичний матеріал по визначникам, матрицям, системам лінійних рівнянь, лінійній і векторній алгебрі, аналітичній геометрії на площині та в просторі, а також велику кількість прикладів, що ілюструють основні методи розв'язку типових задач. Він також має завдання для самостійної роботи, варіанти завдань для розрахунково-графічних робіт і відповіді до них.

Навчальний посібник призначено для підготовки бакалаврів інженерних напрямів аграрних вищих навчальних закладів.

ББК 22.11я7+22.151.54я7

ISBN 978-966-492-073-2

© Лєві Л.І., Коваль А.В., Ліхоманов О.О., 2009
© ТОВ «Віртуальна реальність», 2009

ЗМІСТ

1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.1. Визначники і їх властивості. Обчислення визначників

1°. ***Визначником 1-го порядку*** називається вираз, який дорівнює самому елементу a_{11}:

$$\Delta = a_{11}.$$

Визначником 2-го порядку називається вираз вигляду:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Визначником 3-го порядку називається вираз вигляду:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Визначником n-го порядку називається вираз вигляду:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Загальне позначення елементу визначника a_{ij}, де $i-$ номер рядка, $j-$номер стовпця, на перетині яких він знаходяться.

Діагональ, що сполучає лівий верхній кут визначника з правим нижнім кутом називається ***головною***, а діагональ, що сполучає правий верхній кут з лівим нижнім кутом – ***побічною*** діагоналлю.

Властивості визначників:

1. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Якщо у визначнику переставити місцями два стовпці (або два рядки), то визначник змінить знак на протилежний. При цьому його абсолютна величина не змінюється.

3. Якщо у визначнику містяться два однакові стовпці (або рядки), то такий визначник дорівнює нулю.

б) Обчислимо визначник за правилом трикутників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 2 =$$

$$= 4 + 8 - 9 + 8 - 3 - 12 = -4.$$

Як видно, отримали один і той же результат.

3. Розклад визначників за елементами будь-якого рядка (або стовпця).

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника $n-$го порядку Δ_n, називається визначник $n-1$-го порядку, який утворюється із даного визначника Δ_n в результаті викреслювання i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елементу a_{ij} визначника Δ називається його мінор, взятий із знаком $(-1)^{i+j}$, тобто:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Будь-який визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка (або стовпця) на алгебраїчні доповнення цих елементів.

Наприклад, розклад визначника 3-го порядку за елементами першого рядка має вигляд:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \qquad (1.3)$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

При обчисленні визначників вищих порядків доцільно, використовуючи 7-му властивість визначників, добитися того, щоб всі елементи якого-небудь рядка (або стовпця), окрім одного, стали нулями. В цьому випадку визначник буде на один порядок менше початкового. Такий метод обчислення визначників називається ***методом пониження порядку***.

Приклад 1.3. Обчислити визначник розкладанням за елементами рядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок. Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot [2 \cdot 2 - 1 \cdot 3] - 2 \cdot [3 \cdot 2 - 1 \cdot 4] + (-1) \cdot [3 \cdot 3 - 2 \cdot 4] = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = -4.$$

1.2. Матриці і їх властивості

1^{0}. ***Матрицею*** розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця, що складається з елементів a_{ij}, та містить m рядків і n стовпців. Кожну таку таблицю беруть в круглі дужки або подвійні вертикальні риски і позначають якою-небудь великою буквою латинського алфавіту.

Наприклад

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad A_{m\times n} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

В скороченому запису матриця позначається

$$A = (a_{ij}) \quad \text{або} \quad A = \|a_{ij}\|; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Елементи a_{ij} називаються елементами матриці: індекс i – означає номер рядка, а j – номер стовпця, на перетині яких стоїть елемент.

Запис добутку числа рядків m на число стовпців n називають ***розміром*** матриці і позначають $m \times n$.

Матриця, в якій число рядків дорівнює числу стовпців, називається ***квадратною***. Кількість рядків (або стовпців) квадратної матриці називають її ***порядком***.

Матриця, в якій всього один рядок, називається матрицею-рядком, а матриця, у якої всього один стовпець, – матрицею-стовпцем.

Одиничною матрицею $n-$го порядку називається квадратна матриця, у якої на головній діагоналі розташовані одиниці, а решта всіх елементів дорівнює нулю

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначник одиничної матриці будь-якого порядку дорівнює одиниці.

Квадратна матриця називається ***трикутною***, якщо всі елементи, що стоять нижче (або вище) головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Наприклад

$$C_n = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Будь-якій квадратній матриці

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

можна поставити у відповідність певний вираз, який називається ***визначником*** (***детермінантом***) цієї матриці і позначається символом Δ_A.

Квадратній матриці A_n відповідає визначник Δ_A

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Наприклад, якщо $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, то $\Delta_A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -3$.

2°. Лінійні операції над матрицями.

1. Операції ***додавання або віднімання*** матриць вводяться тільки для матриць однакового розміру. Нехай задані матриці A і B розміром $m\times n$

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B_{m\times n} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сумою (різницею) двох матриць $A_{m\times n}$ і $B_{m\times n}$ однакового розміру **називається** матриця $C_{m\times n}$ того ж розміру, елементи якої дорівнюють **сумам (різницям)** відповідних елементів матриць $A_{m\times n}$ і $B_{m\times n}$:

$$C_{m\times n} = A_{m\times n} \pm B_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. *Добутком матриці* $A_{m\times n}$ ***на числа*** λ ***називається матриця, елементи якої отримані з елементів матриці*** $A_{m\times n}$ ***множенням на число*** λ:

$$\lambda A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. Операція ***множення*** матриці на матрицю вводиться тільки для **узгоджених** матриць. Матриця $A_{m\times n}$ називається ***узгодженою*** з матрицею $B_{n\times p}$, якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B. Якщо ця умова не виконується, (матриці неузгоджені), то множення таких матриць неможливе.

Добутком двох матриць $A_{m\times n}$ ***і*** $B_{n\times p}$, ***заданих у визначеному порядку*** (*A* – перша, *B* – друга) називається матриця $C_{m\times p}$, кожен елемент якої c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів $i-$го рядка матриці A на відповідні елементи $j-$го стовпця матриці B:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & \dots & c_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & \boxed{c_{ij}} & c_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & \dots & c_{mp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots a_{in}b_{nj},$$

де $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, p$.

Приклад 1.4. Обчислити добуток матриць $A_{3\times3} \cdot B_{3\times1} = C_{3\times1}$, якщо

$$A_{3\times3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad B_{3\times1} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. $C_{3\times1} = A_{3\times3} \cdot B_{3\times1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix},$

де
$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31};$$
$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31};$$
$$c_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31}.$$

Приклад 1.5. Обчислити добуток матриць $A_{3\times3} \cdot B_{3\times1} = C_{3\times1}$, якщо

$$A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}; \quad B_{3\times1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

$$C_{3\times1} = A_{3\times3} \cdot B_{3\times1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix},$$

де
$$c_{11} = 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 7 \cdot 3 = 14;$$
$$c_{21} = 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) + 8 \cdot 3 = 16;$$
$$c_{31} = 3 \cdot 1 + 6 \cdot (-2) + 9 \cdot 3 = 18.$$

Таким чином, остаточно маємо:

$$C_{3\times1} = A_{3\times3} \cdot B_{3\times1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

3°. Транспонування матриці

Транспонувати квадратну матрицю A – означає поміняти місцями рядки і стовпці матриці із збереженням їх нумерації. Транспонована матриця позначається A^T.

Наприклад $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$

4°. Обернена матриця

Оберненою матрицею по відношенню до заданої квадратної матриці A називається така квадратна матриця, що позначається A^{-1}, яка задовольняє рівностям

$$A \cdot A^{-1} = E \quad \text{і} \quad A^{-1} \cdot A = E.$$

Для того, щоб квадратна матриця A мала обернену матрицю A^{-1}, необхідно, щоб матриця A була невиродженою, тобто, щоб її визначник $\Delta_A \neq 0$. Тоді обернена матриця визначається за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Таким чином, для знаходження оберненої матриці A^{-1}, необхідно спочатку обчислити визначник матриці Δ_A і переконається, що матриця невироджена ($\Delta_A \neq 0$), потім записати транспоновану матрицю A^T. Далі, всі елементи транспонованої матриці замінити їх алгебраїчними доповненнями, а потім отриману матрицю розділити на визначник Δ_A.

1.3. Розв'язок систем лінійних рівнянь

Розглянемо три способи розв'язку систем лінійних рівнянь: за формулами Крамера, матричним способом, методом Гауса.

Нехай дана система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1.5)$$

1°. При розв'язку системи (1.5) ***за формулами Крамера***, невідомі знаходяться із співвідношень:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де Δ – визначник системи, складений із коефіцієнтів при невідомих, Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n – визначники невідомих, які отримують із визначника Δ заміною його першого, другого ..., n–го стовпця відповідно стовпцем вільних членів.

При розв'язку системи можуть зустрітися три наступні випадки:

а) $\Delta \neq 0$ – система сумісна, має єдиний розв'язок;

б) $\Delta = 0$, але будь який $\Delta_i \neq 0$, система несумісна, рішень немає.

в) $\Delta = 0$, $\Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_n = 0$ – система невизначена, тобто має нескінченну безліч розв'язків (зводиться до кількості рівнянь, меншу за кількість невідомих).

2°. Розв'язок системи лінійних рівнянь (1.5) ***матричним способом***.

Якщо ввести матричні позначення

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix},$$

то систему можна записати матричним рівнянням

$$A \cdot X = B. \qquad (1.6)$$

Помножимо обидві частини цього рівняння на обернену матрицю A^{-1}

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Враховуючи, що добуток $A \cdot A^{-1} = E$, де E – одинична матриця, маємо

$$X = A^{-1} \cdot B. \qquad (1.7)$$

Тобто, щоб розв'язати систему (1.5), необхідно знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці системи A і помножити її на матрицю вільних членів (див. розділ 1.2).

Формулу (1.7) називають ***матричним записом розв'язку системи рівнянь*** (1.5) або ***розв'язком матричного рівняння*** (1.6).

3°. Розв'язок систем лінійних рівнянь ***методом Гауса***.

Одним з найбільш простих методів розв'язку систем лінійних рівнянь є метод безпосереднього виключення невідомих, або метод Гауса. Цей метод базується на елементарних перетвореннях системи рівнянь, або простіше, розширеної матриці.

Розширеною матрицею системи лінійних рівнянь (1.5) називають матрицю коефіцієнтів системи (1.5) з доданим ще одним стовпцем вільних членів, який відділяється рискою:

$$A_b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & & b_n \end{array}\right). \qquad (1.8)$$

Під елементарними перетвореннями розширеної матриці мають на увазі:

1) перестановку будь-яких двох рядків матриці;

2) множення якого-небудь рядка матриці на будь-яке, відмінне від нуля число;

3) додавання до будь-якого рядка матриці відповідних членів іншого рядка, помножених на одне і те ж число.

Ідея методу Гауса полягає в тому, щоб за допомогою елементарних перетворень привести розширену матрицю до рівносильної матриці трикутного (або діагонального) вигляду.

Потім по отриманій трикутній розширеній матриці відновлюється рівносильна система лінійних рівнянь, з якої послідовно знаходяться всі невідомі.

1.4. Розв'язок типових прикладів самостійної роботи по розділу 1

1. Знайти суму матриць

$$A_{3\times 2}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 5 & -2\\ -1 & 6\end{pmatrix},\qquad B_{3\times 2}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Згідно вказівок розділу 1.2, 2^{o}, 1 операція ***додавання*** матриць вводиться тільки для матриць однакового розміру. ***Сумою двох матриць*** A і B однакового розміру називається матриця C того ж розміру, елементи якої дорівнюють сумам відповідних елементів матриць A і B:

$$C_{3\times 2}=A_{3\times 2}+B_{3\times 2}=\begin{pmatrix}2+1 & 4+2\\ 5+3 & -2-1\\ -1+5 & 6+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 8 & -3\\ 4 & 9\end{pmatrix}.$$

2. Знайти різницю матриць

$$A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ -2 & 3 & 7\end{pmatrix},\qquad B_{2\times 3}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 3 & 5 & -2\end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Згідно вказівок розділу 1.2, 2^{o}, 1 операція ***віднімання*** матриць вводиться тільки для матриць однакового розміру. ***Різницею двох матриць*** A і B однакового розміру називається матриця C того ж розміру, елементи якої дорівнюють різницям відповідних елементів матриць A і B:

$$C_{2\times 3}=A_{2\times 3}-B_{2\times 3}=\begin{pmatrix}2-4 & 1-0 & 4-1\\ -2-3 & 3-5 & 7+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ -5 & -2 & 9\end{pmatrix}.$$

3. Знайти добуток матриці $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 7 & 1\\ 2 & 3 & 5 & 2\\ 4 & 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$ на число $\lambda=3$.

Розв'язок. Згідно вказівок розділу 1.2, 2^{o} 2, ***добутком матриці*** A ***на число*** λ називається матриця $\lambda\cdot A$, елементи якої отримують з елементів матриці A ***множенням на число*** λ:

$$B=\lambda\cdot A=\begin{pmatrix}3\cdot 3 & 3\cdot 4 & 3\cdot 7 & 3\cdot 1\\ 3\cdot 2 & 3\cdot 3 & 3\cdot 5 & 3\cdot 2\\ 3\cdot 4 & 3\cdot 1 & 3\cdot(-2) & 3\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 12 & 21 & 3\\ 6 & 9 & 15 & 6\\ 12 & 3 & -6 & 9\end{pmatrix}.$$

4. Обчислити добуток матриць $C=A\cdot B$ і $C=B\cdot A$, якщо це можливо:

а) $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\ 5\\ -8\end{pmatrix}$; *б)* $A=\begin{pmatrix}-5 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}7 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ -6 & -7 & 9\\ 5 & 2 & -8\end{pmatrix}$; *г)* $A=\begin{pmatrix}2 & 6\\ -8 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 8 & 4\end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 7\\ 8 & 5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7 & 4\\ -4 & 6\\ 3 & -8\end{pmatrix}$; *е)* $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & -5\\ 2 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 3\\ -1 & 3 & 2\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

Розв'язок. Згідно вказівок розділу 1.2, 2^{o} 3, операція ***множення*** двох матриць можлива лише для узгоджених матриць.

Як було вказано вище, ***добутком двох матриць*** $A_{m\times n}$ (де m – число рядків, n – число стовпців) і $B_{n\times p}$, заданих в певному порядку (A – перша, B – друга), називається матриця $C_{m\times p}$, кожен елемент якої c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B.

Тому маємо:

а) $A_{1\times 3}$, $B_{3\times 1}$, кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B, $(n_A=n_B=3)$, матриці узгоджені і матриця $C=A\cdot B=C_{1\times 1}$, матиме один рядок і один стовпець

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 5\\ -8\end{pmatrix}=\left(c_{11}\right)=(18),$$

оскільки

$$c_{11}=2\cdot 3+4\cdot 5+1\cdot(-8)=6+20-8=18.$$

Якщо необхідно знайти добуток $C=B\cdot A$, то матриці $B_{3\times 1}$, $A_{1\times 3}$, також узгоджені $(n_B=n_A=1)$, і $C=B\cdot A=C_{3\times 3}$, матиме 3 рядки і 3 стовпці

4. Якщо всі елементи деякого стовпця (або рядка) визначника містять загальний множник, то його можна винести за знак визначника:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5. Якщо всі елементи деякого стовпця (рядка) у визначнику дорівнюють нулю, то такий визначник також дорівнює нулю.

6. Якщо всі елементи одного стовпця (рядка) відповідно пропорційні елементам іншого стовпця (рядка), то такий визначник дорівнює нулю.

7. Якщо до кожного елементу деякого стовпця (рядка) визначника додати відповідні елементи іншого стовпця (рядка) помножені на будь-яке число, то визначник не зміниться:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2^{0}. Обчислення визначників.

1. Визначник ***першого порядку*** дорівнює самому елементу a_{11}

$$\Delta=a_{11}.$$

2. Визначник ***другого порядку*** обчислюється за формулою

$$\begin{matrix} \text{"+"} & & \text{"–"} \end{matrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}. \qquad (1.1)$$

Приклад 1.1. Обчислити визначник $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$.

Розв'язок. $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}=2\cdot(-5)-4\cdot(-3)=-10+12=2$.

2. Обчислення визначників 3-го порядку виконуються за правилом Саррюса, за правилом трикутників або його розкладанням за елементами рядка (або стовпця).

При обчисленні ***визначника 3-го порядку за правилом Саррюса*** до нього приписуються два перші стовпці справа (або два перші рядки знизу). Добутки елементів, що лежать на діагоналях, паралельних головній, беруться із знаком «+», а добутки елементів, що лежать на діагоналях, паралельних побічній – із знаком «–».

Алгебраїчна сума всіх шести добутків дорівнює визначникові.

$$\begin{matrix} \text{"+"} & \text{"+"} & \text{"+"} & \text{"–"} & \text{"–"} & \text{"–"} \end{matrix}$$

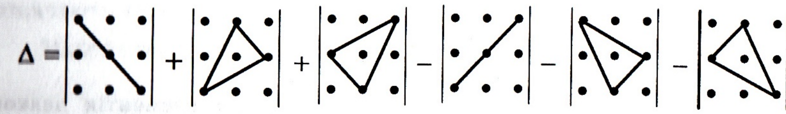
$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}. \qquad (1.2)$$

Визначник 3-го порядку можна обчислити за *правилом трикутників*.

При цьому визначник дорівнює алгебраїчній сумі добутків елементів, розташованих на головній, побічній діагоналях і у вершинах рівнобічних трикутників з основами, паралельними діагоналям.

Добутки елементів, розташованих на головній діагоналі і у вершинах рівнобічних трикутників з основами паралельними їй, беруться із знаком «+», а елементів, розташованих на побічній діагоналі і у вершинах рівнобічних трикутників з основами паралельними їй, – із знаком «–».



$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Приклад 1.2. Обчислити визначник $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

а) за правилом Саррюса; *б*) за правилом трикутників.

Розв'язок. *а*) Обчислимо визначник за правилом Саррюса:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{matrix}=$$

$$=1\cdot2\cdot2+2\cdot1\cdot4+(-1)\cdot3\cdot3-(-1)\cdot2\cdot4-1\cdot1\cdot3-2\cdot3\cdot2=$$
$$=4+8-9+8-3-12=-4.$$

$$C=B\cdot A=\begin{pmatrix}3\\5\\-8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&12&3\\10&20&5\\-16&-32&-8\end{pmatrix},$$

оскільки

$c_{11}=3\cdot2=6$; $c_{12}=3\cdot4=12$; $c_{13}=3\cdot1=3$;

$c_{21}=5\cdot2=10$; $c_{22}=5\cdot4=20$; $c_{23}=5\cdot1=5$;

$c_{31}=(-8)\cdot2=-16$; $c_{32}=(-8)\cdot4=-32$; $c_{33}=(-8)\cdot1=-8$.

б) $A_{1\times3}$, $B_{3\times2}$; $n_A=n_B=3$, матриці узгоджені і $C=A\cdot B=C_{1\times2}$, тобто

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}-5&3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&4\\2&-1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23&-19\end{pmatrix},$$

оскільки

$c_{11}=(-5)\cdot(-3)+3\cdot2+2\cdot1=15+6+2=23$;

$c_{12}=(-5)\cdot4+3\cdot(-1)+2\cdot2=-20-3+4=-19$.

Якщо $B_{3\times2}$, а $A_{1\times3}$, то кількість стовпців матриці B, не дорівнює кількості рядків матриці A, $(n_B=2\neq n_A=1)$, матриці не узгоджені і операція множення $C=B\cdot A$ не має сенсу.

в) $A_{1\times3}$, $B_{3\times3}$; $n_A=n_B=3$, матриці узгоджені і $C=A\cdot B=C_{1\times3}$:

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}7&2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&4\\-6&-7&9\\5&2&-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22&1&14\end{pmatrix},$$

оскільки

$c_{11}=7\cdot2+2\cdot(-6)+4\cdot5=14-12+20=22$;

$c_{12}=7\cdot1+2\cdot(-7)+4\cdot2=7-14+8=1$;

$c_{13}=7\cdot4+2\cdot9+4\cdot(-8)=28+18-32=14$.

Якщо $B_{3\times3}$, $A_{1\times3}$; $n_B=3\neq n_A=1$, матриці не узгоджені і операція множення $C=B\cdot A$ не має сенсу.

г) $A_{2\times2}$, $B_{2\times2}$; $n_A=n_B=2$, матриці узгоджені і $C=A\cdot B=C_{2\times2}$:

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}2&6\\-8&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&7\\5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36&38\\-19&-52\end{pmatrix},$$

оскільки

$c_{11}=2\cdot3+6\cdot5=6+30=36$;

$c_{12}=2\cdot7+6\cdot4=14+24=38$;

$c_{21}=-8\cdot3+1\cdot5=-24+5=-19$;

$c_{22}=-8\cdot7+1\cdot4=-56+4=-52$.

Якщо $C=B\cdot A$, $B_{2\times2}$, $A_{2\times2}$; $n_B=n_A=2$, матриці узгоджені і $C=B\cdot A=C_{2\times2}$:

$$C=B\cdot A=\begin{pmatrix}3&7\\5&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&6\\-8&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-50&25\\-22&34\end{pmatrix},$$

оскільки

$c_{11}=3\cdot2+7\cdot(-8)=6-56=-50$;

$c_{12}=3\cdot6+7\cdot1=18+7=25$;

$c_{21}=5\cdot2+4\cdot(-8)=10-32=-22$;

$c_{22}=5\cdot6+4\cdot1=30+4=34$.

д) $A_{2\times3}$, $B_{3\times2}$, $n_A=n_B=3$, матриці узгоджені і $C=A\cdot B=C_{2\times2}$:

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}2&1&7\\8&5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7&4\\-4&6\\3&-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-42\\-58&14\end{pmatrix},$$

оскільки

$c_{11}=2\cdot(-7)+1\cdot(-4)+7\cdot3=-14-4+21=3$;

$c_{12}=2\cdot4+1\cdot6+7\cdot(-8)=8+6-56=-42$;

$c_{21}=8\cdot(-7)+5\cdot(-4)+6\cdot3=-56-20+18=-58$;

$c_{22}=8\cdot4+5\cdot6+6\cdot(-8)=32+30-48=14$.

Якщо $C=B\cdot A$, $B_{3\times2}$, $A_{2\times3}$; $n_B=n_A=2$, матриці узгоджені і $C=B\cdot A=C_{3\times3}$:

$$C=B\cdot A=\begin{pmatrix}-7&4\\-4&6\\3&-8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&7\\8&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18&13&-25\\40&26&8\\-58&-37&-27\end{pmatrix},$$

оскільки

$c_{11}=(-7)\cdot2+4\cdot8=-14+32=18$;

$c_{12}=(-7)\cdot1+4\cdot5=-7+20=13$;

$c_{13}=(-7)\cdot7+4\cdot6=-49+24=-25$;

$c_{21} = (-4)\cdot 2 + 6\cdot 8 = -8 + 48 = 40$;

$c_{22} = (-4)\cdot 1 + 6\cdot 5 = -4 + 30 = 26$;

$c_{23} = (-4)\cdot 7 + 6\cdot 6 = -28 + 36 = 8$;

$c_{31} = 3\cdot 2 + (-8)\cdot 8 = 6 - 64 = -58$;

$c_{32} = 3\cdot 1 + (-8)\cdot 5 = 3 - 40 = -37$;

$c_{33} = 3\cdot 7 + (-8)\cdot 6 = 21 - 48 = -27$.

е) $A_{3\times 2}, B_{3\times 3}$, $n_A = 2 \neq n_B = 3$, матриці не узгоджені, операція множення $C = A\cdot B$ не має сенсу.

Якщо $C = B\cdot A$, $B_{3\times 3}$, $A_{3\times 2}$; $n_B = n_A = 3$, матриці узгоджені і $C = B\cdot A = C_{3\times 2}$:

$$C = B\cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 29 \\ 12 & -7 \\ 1 & 36 \end{pmatrix},$$

оскільки

$c_{11} = 4\cdot 1 + 1\cdot 3 + 3\cdot 2 = 4 + 3 + 6 = 13$;

$c_{12} = 4\cdot 4 + 1\cdot(-5) + 3\cdot 6 = 16 - 5 + 18 = 29$;

$c_{21} = (-1)\cdot 1 + 3\cdot 3 + 2\cdot 2 = -1 + 9 + 4 = 12$;

$c_{22} = (-1)\cdot 4 + 3\cdot(-5) + 2\cdot 6 = -4 - 15 + 12 = -7$;

$c_{31} = 5\cdot 1 + (-2)\cdot 3 + 1\cdot 2 = 5 - 6 + 2 = 1$;

$c_{32} = 5\cdot 4 + (-2)\cdot(-5) + 1\cdot 6 = 20 + 10 + 6 = 36$.

Ці приклади підтверджують, що результат добутку двох матриць залежить від того, в якому порядку вони перемножуються і в загальному випадку $A\cdot B \neq B\cdot A$.

5. Дана матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Знайти обернену матрицю A^{-1}.

Розв'язок. Як вказано в розділі 1.2, 4°, для знаходження оберненої матриці A^{-1} необхідно спочатку обчислити визначник матриці A, Δ_A і переконатися, що матриця невироджена $(\Delta_A \neq 0)$, потім записати транспоновану матрицю A^T. Далі всі елементи транспонованої матриці A^T замінити їх алгебраїчними доповненнями, а потім отриману матрицю розділити на визначник Δ_A.

а) Обчислимо визначник Δ_A за правилом Саррюса:

$$\Delta_A = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{matrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)\cdot 1 + 2\cdot(-3)\cdot 4 + 3\cdot 2\cdot 2 - 3\cdot(-1)\cdot 4 - 1\cdot(-3)\cdot 2 - 2\cdot 2\cdot 1 =$$

$$= -1 - 24 + 12 + 12 + 6 - 4 = 1.$$

Визначник матриці $\Delta_A = 1 \neq 0$, тобто матриця невироджена і має **обернену матрицю.**

б) Запишемо транспоновану матрицю – матрицю, в якій рядки матриці **A замінені її** стовпцями з тими ж номерами

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

в) Обернену матрицю отримаємо за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} & A_{33} \end{pmatrix},$$

де Δ_A – визначник матриці A, A_{ij} – алгебраїчні доповнення, які дорівнюють **визначникам,** які отримують при викреслюванні i-го рядка і j-го **стовпця транспонованої** матриці A^T, узяті із знаком $(-1)^{i+j}$.

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 5$; $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4$; $A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3$;

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -14$; $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -11$; $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 9$;

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8$; $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6$; $A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5.$

Таким чином

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 \\ -14 & -11 & 9 \\ 8 & 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 \\ -14 & -11 & 9 \\ 8 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

6. Користуючись формулами Крамера, розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 12; \\ 4x_1 - x_2 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 4; \\ 6x_1 - 4x_2 = 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3; \\ 2x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$

Розв'язок. *а*) Обчислимо визначники системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1) - 2\cdot 4 = -3-8 = -11 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 12\cdot(-1) - 2\cdot 5 = -22; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 - 12\cdot 4 = -33.$$

Тоді за формулами Крамера маємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-22}{-11} = 2; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-33}{-11} = 3.$$

Відповідь: $x = 2$; $y = 3$.

б) $$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 3\cdot(-4) - (-2)\cdot 6 = -12 + 12 = 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 9 & -4 \end{vmatrix} = 4\cdot(-4) - (-2)\cdot 9 = 2 \neq 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 3\cdot 9 - 4\cdot 6 = 3 \neq 0.$$

Відповідь: Система несумісна, розв'язків не має.

в) $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - 1\cdot 2 = 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 - 1\cdot 6 = 0; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 6 - 3\cdot 2 = 0.$$

Відповідь: Система невизначена, має нескінченну безліч розв'язків.

7. У майстерні будівельного цеху виготовляють двері і вікна.

На виготовлення двері витрачають 3 дошки, а на виготовлення вікна – 1 дошку. Витрати робочого часу на їх виготовлення відповідно дорівнюють 5 годин і 3 години. Відомо, що в тиждень майстерні поставляють 90 дощок і робочий час складає 190 годин.

Скласти такий план тижневого виготовлення дверей і вікон, при якому повністю використовуються ресурси (дошки і робочий час).

Розв'язок. Позначимо через x_1 і x_2 кількість одиниць тижневого виробництва дверей і вікон відповідно. За умовою задачі складемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 90, \\ 5x_1 + 3x_2 = 190. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему матричним способом. Запишемо її в матричному вигляді

$$A\cdot X = B \;\Rightarrow\; X = A^{-1}\cdot B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 90 \\ 190 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Для матриці A знайдемо обернену матрицю A^{-1}. Для цього спочатку обчислимо визначник матриці A

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 3 - 1\cdot 5 = 9 - 5 = 4 \neq 0.$$

Запишемо транспоновану матрицю і знайдемо алгебраїчні доповнення:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot 3 = 3; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot 1 = -1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot 5 = -5; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot 3 = 3.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 \\ -5/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо розв'язок системи за формулою $X = A^{-1}\cdot B$

$$X = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 \\ -5/4 & 3/4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 90 \\ 190 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4\cdot 90 - 1/4\cdot 190 \\ -5/4\cdot 90 + 3/4\cdot 190 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$x_1 = 20; \; x_2 = 30.$$

Відповідь: Для повного використання ресурсів в тиждень необхідно виготовляти 20 дверей і 30 вікон.

Відмітимо, що для розв'язку задач такого типу зручно використовувати матричний спосіб. Обчисливши один раз обернену матрицю і змінюючи обмеження на ресурси (денні, тижневі, місячні), отримуємо кожного разу з рівності (1) відповідний план випуску продукції.

1.5. Завдання для самостійної роботи по розділу 1

1. Знайти суму матриць

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. *б*) $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Знайти різницю матриць

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$. *б*) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Знайти добуток матриці $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = 3$.

4. Обчислити добуток матриць $C = A \cdot B$ і $C = B \cdot A$ якщо

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$; *б*) $A=\begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -6 & -7 & 9 \\ 5 & 2 & -8 \end{pmatrix}$; *г*) $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -4 & 6 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$; *е*) $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Для заданих матриць A знайти обернені матриці A^{-1}:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; *б*) $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; *в*) $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Користуючись формулами Крамера, розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 = 2; \\ 3x_1 + 4x_2 = 11; \end{cases}$ *б*) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 6; \\ 4x_1 + 6x_2 = 8; \end{cases}$ *в*) $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 = 9; \\ x_1 - x_2 = 3. \end{cases}$

7. На установці виготовляють суцільну і порожнисту цеглу. На їх виготовлення витрачається 3 кг і 2 кг матеріалу відповідно. Час, що витрачається на виготовлення суцільної або порожнистої цегли однаковий і дорівнює 1 хв. Відомо, що денний запас матеріалу – 1200 кг, а робочий час 8 годин 20 хв.

Скласти план денного виготовлення кожного виду цегли, при якій повністю використовуються ресурси (матеріал і робочий час).

1.6. Розв'язок типового прикладу завдання 1 РГР

1. Розв'язати систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

а) за формулами Крамера, *б*) матричним способом, *в*) методом Гауса.

Розв'язок.

а) Розв'яжемо систему за формулами Крамера, які мають вигляд:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \tag{1.9}$$

де Δ – **визначник системи рівнянь;** $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ – визначники невідомих, **отримані із** Δ заміною його першого, другого і третього стовпця відповідно **стовпцем вільних членів.**

Запишемо визначники $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ і обчислимо їх:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 4 + (-1)\cdot 3\cdot(-1) - (-1)\cdot(-2)\cdot 4 - 2\cdot 1\cdot(-1) - 3\cdot 3\cdot 1 = -4 + 12 + 3 - 8 + 2 - 9 = -4.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot(-2)\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 5 + (-1)\cdot 2\cdot(-1) - (-1)\cdot(-2)\cdot 5 - 5\cdot 1\cdot(-1) - 3\cdot 2\cdot 1 = -10 + 15 + 2 - 10 + 5 - 6 = -4.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 1 + 5\cdot 1\cdot 4 + (-1)\cdot 3\cdot 5 - (-1)\cdot 2\cdot 4 - 2\cdot 1\cdot 5 - 5\cdot 3\cdot 1 = 4 + 20 - 15 + 8 - 10 - 15 = -8.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 5 + 3\cdot 2\cdot 4 + 5\cdot 3\cdot(-1) - 5\cdot(-2)\cdot 4 - 2\cdot 2\cdot(-1) - 2\cdot 2\cdot(-1) - 3\cdot 3\cdot 5 = -20 + 24 - 15 + 40 + 4 - 45 = -12.$$

Тепер знайдемо невідомі x_1, x_2, x_3 за формулами (1.9)

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-4}{-4}=1; \quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-8}{-4}=2; \quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-12}{-4}=3.$$

Відповідь: $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$.

б) Розв'яжемо систему рівнянь матричним способом.

Позначимо через A матрицю заданої системи рівнянь, через X – матрицю-стовпець невідомих і через B – матрицю-стовпець вільних членів:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Якщо система лінійних рівнянь в матричному вигляді записується, $A\cdot X=B$, то матриця невідомих знаходиться із рівняння $X=A^{-1}\cdot B$.

Для знаходження матриці невідомих X, знайдемо обернену матрицю (див. розділ 1.2) і помножимо її на матрицю-стовпець вільних членів.

Оскільки матриця A невироджена (як було визначено раніше, ($\Delta=\Delta_A=-4\neq 0$), то для неї існує обернена матриця A^{-1}.

Обернену матрицю A^{-1} знайдемо в наступній послідовності:

1) Запишемо транспоновану матрицю – матрицю A^T, в якій рядки матриці A замінені її стовпцями з тими ж номерами:

$$A^T=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обернену матрицю можна отримати за формулою:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta_A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

де Δ_A – визначник матриці A,

A_{ij} – алгебраїчні доповнення, які дорівнюють визначникам, що отримані викреслюванням i-го рядка і j-го стовпця транспонованої матриці, взяті із знаком $(-1)^{i+j}$.

Знайдемо алгебраїчні доповнення транспонованої матриці A^T:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1; \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-2; \quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1; \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=6; \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-5;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=5; \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=14; \quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-13.$$

Таким чином $$A^{-1}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -5 \\ 5 & 14 & -13 \end{pmatrix},$$

а розв'язок системи рівнянь визначається співвідношенням

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -5 \\ 5 & 14 & -13 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо значення c_1, c_2, c_3:

$c_1=-1\cdot 5+(-2)\cdot 2+1\cdot 5=-4$;

$c_2=1\cdot 5+6\cdot 2+(-5)\cdot 5=-8$;

$c_3=5\cdot 5+14\cdot 2+(-13)\cdot 5=-12$.

Підставляючи замість c_1, c_2, c_3 числові значення, отримаємо:

$$X=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$.

в) Розв'яжемо систему рівнянь методом Гауса.

Запишемо розширену матрицю системи

$$A_b=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

і зробимо елементарні перетворення, щоб привести її до трикутного вигляду.

Зробимо коефіцієнт a_{11} рівним одиниці і обнулимо коефіцієнти a_{21}, a_{31} і a_{32}.

Для цього:

а) поміняємо місцями перший і другий рядки, а потім віднімемо із першого рядка другий. Результат запишемо замість першого рядка:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim$$

б) віднімемо від другого рядка перший, помножений на 2. Результат запишемо замість другого рядка:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 13 & -5 & 11 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim$$

в) віднімемо від третього рядка перший, помножений на 4. Результат запишемо замість третього рядка:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 13 & -5 & 11 \\ 0 & 19 & -7 & 17 \end{array}\right) \sim$$

г) помножимо другий рядок на 19, а третій на 13. Потім віднімемо від отриманого третього рядка другий і результат запишемо замість третього рядка

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 13 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right).$$

Здійснимо зворотний хід методу Гауса, відновивши рівносильну систему за розширеною матрицею

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -3, \\ 13x_2 - 5x_3 = 11, \\ 4x_3 = 12. \end{cases}$$

З останнього рівняння маємо $x_3 = 3$.

Підставляємо значення x_3 в друге рівняння і знаходимо x_2:

$$13x_2 - 5 \cdot 3 = 11 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2.$$

Підставляючи значення x_2 і x_3 в перше рівняння знаходимо x_1:

$$x_1 - 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = -3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1.$$

Відповідь: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

2.1. Векторні і скалярні величини. Розкладання вектора за координатними осями

1°. Основні визначення.

Величина називається ***скалярною***, якщо вона визначається своїм числовим значенням, і векторною, якщо для її визначення задається ще й напрям.

Два вектори вважаються ***рівними***, якщо вони мають однакову довжину, паралельні один одному і однаково напрямлені.

Два вектори називаються ***протилежними***, якщо вони мають однакову довжину, паралельні і протилежно напрямлені.

Два вектори називаються ***колінеарними***, якщо вони розташовані на одній прямій (або паралельних прямих), незалежно від того, чи напрямлені вони однаково, чи їх напрями протилежні.

Якщо вектори лежать в одній площині або в площинах, паралельних між собою, то вони називаються ***компланарними***.

Вектор, довжина (модуль) якого дорівнює одиниці, називається ***одиничним*** вектором.

2°. Розклад вектора за базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Візьмемо прямокутну декартову систему координат в просторі і разом з нею три одиничні вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, початок яких співпадає з початком координат і які напрямлені відповідно по осях Ox, Oy, Oz (рис. 2.1).

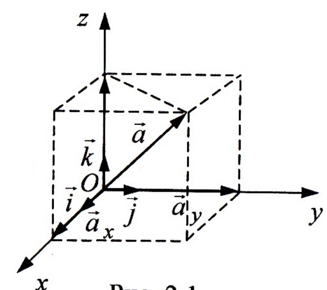


Рис. 2.1

Система трьох векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, називається декартовим прямокутним базисом.

Будь-який вектор в просторі можна подати у вигляді суми трьох векторів, один з яких розташований вздовж осі Ox, другий вздовж осі Oy і третій – вздовж осі Oz:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \tag{2.1}$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори, які напрямлені вздовж координатних осей, a_x, a_y, a_z – проекції вектора на координатні осі.

Модуль вектора $\vec{a}$ дорівнює

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{2.2}$$

Якщо через α, β, γ позначити кути, які утворює вектор $\vec{a}$ з додатними напрямами координатних осей, то формули

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}, \qquad (2.3)$$

дають вирази для напрямних косинусів вектора $\vec{a}$ через його проекції.

Між напрямними косинусами існує залежність

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (2.4)$$

3°. Дії над векторами.

1. Алгебраїчна сума векторів

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}. \qquad (2.5)$$

2. Множення вектора на число

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}. \qquad (2.6)$$

3. Якщо $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ – координати початку і кінця вектора, тоді

– проекції вектора на координатні осі визначаються співвідношеннями

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1; \qquad (2.7)$$

– модуль вектора визначається за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,; \qquad (2.8)$$

– напрямні косинуси визначаються виразами

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{|\vec{a}|}; \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{|\vec{a}|}; \quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{|\vec{a}|}. \qquad (2.9)$$

4°.1. Для знаходження вектора $\vec{c}\{c_x; c_y; c_z\}$, який дорівнює сумі двох векторів $\vec{a}\{a_x; a_y; a_z\}$ і $\vec{b}\{b_x; b_y; b_z\}$, необхідно перенести початок вектора $\vec{b}$ в кінець вектора $\vec{a}$ і побудувати вектор $\vec{c}$ так, щоб його початок співпадав з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{b}$ (рис.2.2).

При цьому

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \{a_x + b_x;\ a_y + b_y;\ a_z + b_z\}. \qquad (2.10)$$

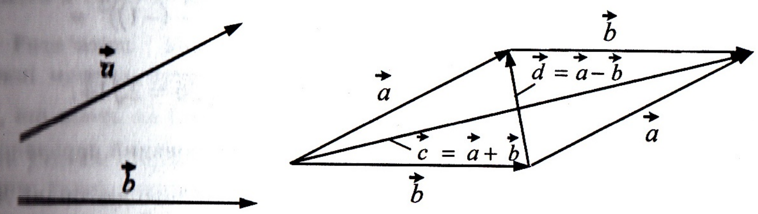


Рис. 2.2

2. Вектором $\vec{d}$, який дорівнює різниці двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який сполучає кінець вектора $\vec{b}$ з кінцем вектора $\vec{a}$, приведених до єдиного початку (рис. 2.2):

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \{a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z\}. \qquad (2.11)$$

3. Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, колінеарний вектору $\vec{a}$, такий що

$$\vec{b} = \{\lambda a_x;\ \lambda a_y;\ \lambda a_z\}. \qquad (2.12)$$

Якщо $\lambda > 0$, напрями векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ співпадають; якщо $\lambda < 0$ – напрями векторів протилежні.

2.1.1. Розв'язок типових прикладів самостійної роботи по розділу 2.1

1. Знайти суму векторів $\vec{a} = 5\vec{i} + 10\vec{j} - 2\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$.

Розв'язок. $\vec{a} + \vec{b} = (5+1)\vec{i} + (10+2)\vec{j} + (-2+6)\vec{k} = 6\vec{i} + 12\vec{j} + 4\vec{k}$.

2. Знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(1; -3; 2)$, $B(-3; 2; 4)$.

Розв'язок. Проекції вектора $\overrightarrow{AB}$ на координатні осі

$$a_x = x_2 - x_1; \quad a_y = y_2 - y_1; \quad a_z = z_2 - z_1.$$

$$a_x = -3 - 1 = -4; \quad a_y = 2 - (-3) = 5; \quad a_z = 4 - 2 = 2 \Rightarrow \overrightarrow{AB}\{-4; 5; 2\}.$$

3. Знайти відстань між точками $A(3;\,-4;\,-1)$ і $B(-1;\,2;\,-3)$.

Розв'язок. Скориставшись формулою 2.11, отримаємо

$$d=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-1-3)^2+(2-(-4))^2+(-3-(-1))^2}=$$

$$=\sqrt{(-4)^2+6^2+(-2)^2}=\sqrt{16+36+4}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}\,.$$

4. На векторах $\vec a\{3;\,1;\,4\}$ і $\vec b\{-2;7;1\}$ побудований паралелограм $ABCD$. $\overrightarrow{AB}=\vec a$; $\overrightarrow{AD}=\vec b$. Знайти величину і напрям його діагоналі AC.

Розв'язок. Із точки A відкладемо вектори $\vec a$, $\vec b$ і побудуємо паралелограм $ABCD$ (рис. 2.3).

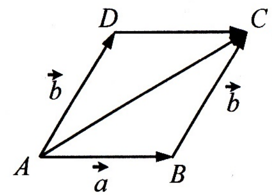


Рис. 2.3

Діагональ AC дорівнює сумі векторів $\vec a$ і $\vec b$

$$\overrightarrow{AC}=\vec a+\vec b=(3+(-2))\vec i+(1+7)\vec j+(4+1)\vec k=$$

$$=\vec i+8\vec j+5\vec k\,.$$

Довжина діагоналі AC

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{1^2+8^2+5^2}=\sqrt{90}=\sqrt{9\cdot 10}=3\sqrt{10}\,.$$

Напрямні косинуси знайдемо за формулами (2.3)

$$\cos\alpha=\frac{1}{3\sqrt{10}};\qquad \cos\beta=\frac{8}{3\sqrt{10}};\qquad \cos\gamma=\frac{5}{3\sqrt{10}}\,.$$

5. Вектори $\vec a$ і $\vec b$ утворюють кут $\varphi=60^{\circ}$, $\left|\vec a\right|=5$, $\left|\vec b\right|=8$. Знайти $\left|\vec a-\vec b\right|$.

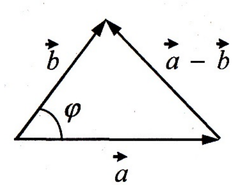


Рис. 2.4

Розв'язок. Зробимо рисунок (2.4). Згідно теореми косинусів маємо:

$$\left|\vec a-\vec b\right|^2=\left|\vec a\right|^2+\left|\vec b\right|^2-2\left|\vec a\right|\left|\vec b\right|\cos\varphi\,.$$

Підставляючи числові значення, отримаємо

$$\left|\vec a-\vec b\right|^2=5^2+8^2-2\cdot 5\cdot 8\cos 60^{\circ}=25+64-80\,\frac{1}{2}=49\,.$$

$$\left|\vec a-\vec b\right|=\sqrt{49}=7\,.$$

6. Невагомі стержні AB і BC шарнірно закріплені в точках A, B, C (рис.2.5). Знайти сили, які діють на стержні, якщо $\alpha=60^{\circ}$, а вага підвішеного в точці B вантажу $\vec P=100\ H$.

Розв'язок. Умова шарнірного закріплення означає, що обидва стержні можуть бути тільки розтягнуті або стиснуті, тобто сили F_{AB} і F_{BC}, що діють на точку B з боку цих стержнів можуть бути напрямлені тільки уздовж стержнів. Згадка про шарнірне закріплення кінців стержнів істотна: якщо, наприклад, стержень AB жорстко закріплений в точці A, то без стержня BC взагалі можна обійтися, оскільки стержень AB і сам утримає вантаж!

Для остаточного вибору напрямів сил слід врахувати, що під дією підвішеного вантажу стержень AB розтягується, а стержень BC стискається. Рівнодіюча всіх трьох сил, прикладених в точці B дорівнює нулю.

Перенесемо сили паралельно самим собі і побудуємо трикутник сил.

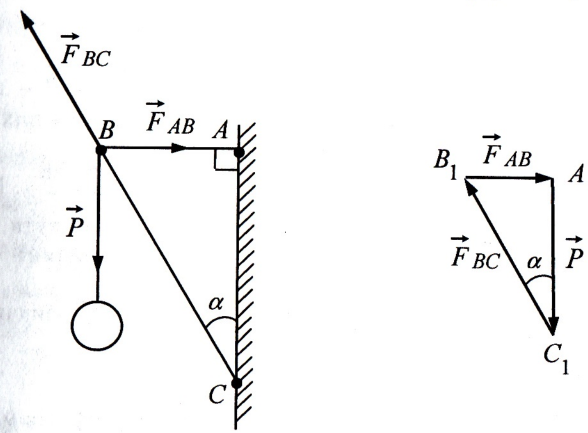


Рис. 2.5

Так як $\Delta A_1B_1C_1$ прямокутний і за умовою задачі кут $\alpha=60^{\circ}$, то знаходимо

$$F_{AB}=P\,\mathrm{ctg}\,\alpha=100\cdot 0{,}58=58\ H;\qquad F_{BC}=\frac{P}{\cos\alpha}=\frac{100}{0{,}87}=114\ H\,.$$

Стержень AB розтягнутий силою $58\,H$, стержень BC стиснутий силою $114\,H$.

7. Електричний ліхтар вагою $30\,H$ підвішений до стелі на шнурі AB і потім притягається до стінки мотузкою BC (рис. 2.6).

Визначити натяг шнура і мотузки, якщо відомо, що кут $\alpha = 60^\circ$, кут $\beta = 135^\circ$.

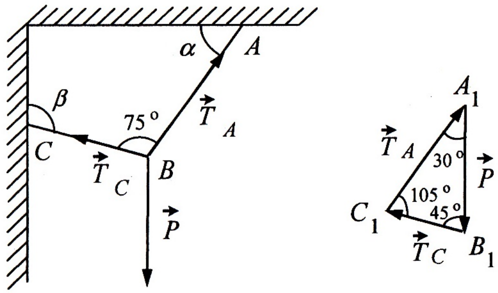


Рис. 2.6

Розв'язок. На точку B діють три сили $\vec{T}_A$, $\vec{T}_C$ і $\vec{P}$ – вага лампи. Оскільки система знаходиться в рівновазі, то рівнодіюча цих сил дорівнює нулю. Побудуємо трикутник сил.

Сторони цього трикутника рівні $\overrightarrow{B_1C_1} = \vec{T}_C$, $\overrightarrow{C_1A_1} = \vec{T}_A$. Модулі цих сил знайдемо за теоремою синусів. Для цього визначимо кути при вершинах трикутника. За умовою завдання кут при вершині A_1 рівний $90^\circ - \alpha = 30^\circ$, при вершині C_1 рівний $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$, значить кут при вершині C_1 дорівнює $180^\circ - 105^\circ - 30^\circ = 45^\circ$.

Враховуючи, що $\sin 105^\circ = \sin 75^\circ$, за теоремою синусів маємо

$$\frac{T_A}{\sin\ 45^\circ} = \frac{T_C}{\sin\ 30^\circ} = \frac{P}{\sin\ 75^\circ}.$$

Звідки

$$T_A = P\,\frac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 21{,}9\ H; \qquad T_C = P\,\frac{\sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 15{,}5\,H.$$

2.1.2. Завдання для самостійної роботи по розділу 2.1

1. Визначити $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$ і $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, причому $\left|\vec{a}\right| = 5$, $\left|\vec{b}\right| = 12$.

2. Задані початок $A(3;2;-1)$ і кінець $B(1;5;4)$ вектора $\overrightarrow{AB}$. Знайти проекції вектора на координатні осі, його модуль і напрямні косинуси.

3. Знайти різницю векторів $\vec{a} = \{2;4;-1\}$ і $\vec{b} = \{4;-3;5\}$.

4. За даними векторів $\vec{a} = \{3;\ -4;\ 5\}$ і $\vec{b} = \{-1;\ 0;\ -2\}$ знайти координати вектора $\vec{c} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$.

5. Знайти величину і напрямні косинуси рівнодіючої $\vec{R}$ трьох сил $\vec{F}_1\{14;\ 5;\ 4\}$, $\vec{F}_2\{-6;2;7\}$, $\vec{F}_3\{4;2;9\}$.

6. На векторах $\vec{a}\{3;1;4\}$ і $\vec{b}\{-2;7;1\}$ побудований паралелограм $ABCD$. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Знайти величину і напрям його діагоналі BD.

7. Вантаж вагою $\vec{P}$, підвішений на нитці до нерухомої точки, утримується горизонтальною силою $\vec{Q}$ в положенні, при якому нитка утворює з вертикаллю кут $\alpha = 45^\circ$. Знайти величину горизонтальної сили $\vec{Q}$ і величину натягу нитки $\vec{T}$.

8. Три сили $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ прикладені до однієї точки і мають взаємно перпендикулярні напрями. Визначити модуль їх рівнодіючої, якщо $\left|\vec{F}_1\right| = 10\,H$, $\left|\vec{F}_2\right| = 11\,H$, $\left|\vec{F}_3\right| = 2\ H$.

9. Турист вагою $\vec{P} = 600\ H$ переправляється на тросі через прірву (див. рис.2.7). Який натяг троса в мить, коли турист знаходиться посередині і обидві половини троса утворюють між собою кут 160°.

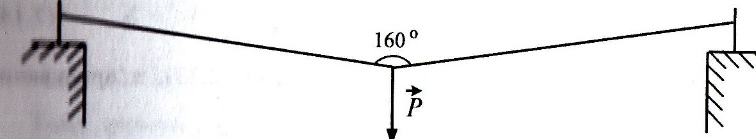


Рис. 2.7

2.2. Скалярний добуток двох векторів

1°. ***Скалярним добутком*** двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку їх модулів на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi. \qquad (2.13)$$

Кутом між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається кут φ, на який слід повернути один з векторів для того, щоб їх напрями збігалися (рис. 2.8). Надалі під кутом між векторами розумітимемо кут φ, що задовольняє умові $0\le\varphi\le\pi$.

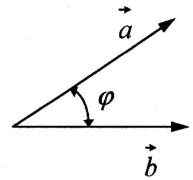


Рис. 2.8

2°. Властивості скалярного добутку.

1. $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|^{2}$.
2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, якщо $\vec{a}=\vec{0}$ або $\vec{b}=\vec{0}$, або $\vec{a}\perp\vec{b}$.
3. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
4. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.
5. $\left(m\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\left(m\vec{b}\right)=m\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$.
6. $\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1;\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$.

3°. Запис скалярного добутку через проекції векторів, що перемножуються.

Якщо два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані в координатній формі своїми проекціями на осі координат

$$\vec{a}=\left\{a_x;a_y;a_z\right\},\quad \vec{b}=\left\{b_x;b_y;b_z\right\},$$

то ***скалярний добуток*** цих векторів дорівнює сумі добутків однойменних проекцій векторів, що перемножуються

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z. \qquad (2.14)$$

4°. Кут між двома векторами. З рівняння (2.13), з врахуванням (2.14) випливає

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \qquad (2.15)$$

Косинус кута між двома напрямами в просторі дорівнює сумі добутків однойменних напрямних косинусів цих напрямів

$$\cos\varphi=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2. \qquad (2.16)$$

Умова ***перпендикулярності двох*** напрямів

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0. \qquad (2.17)$$

Проекцією вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається число

$$\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right), \qquad (2.18)$$

або

$$\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}. \qquad (2.19)$$

5°. Умова ***паралельності і перпендикулярності*** векторів

Якщо $\vec{a}\left\{a_x;\ a_y;\ a_z\right\}$, $\vec{b}\left\{b_x;\ b_y;\ b_z\right\}$, тоді:

– умова ***паралельності*** векторів

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}, \qquad (2.20)$$

– умова ***перпендикулярності*** векторів

$$a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0. \qquad (2.21)$$

6°. Механічний зміст скалярного добутку.

З фізики відомо, що робота A, сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки з початку в кінець вектора $\vec{s}$, який утворює з вектором $\vec{F}$ кут α (рис. 2.9) дорівнює

$$A=\left|\vec{F}\right|\cdot\left|\vec{s}\right|\cos\alpha,$$

або, згідно (2.13) $\quad A=\vec{F}\cdot\vec{s}$.

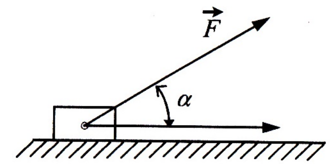


Рис. 2.9

Тому робота дорівнює скалярному добутку вектора сили $\vec{F}$ на вектор переміщення $\vec{s}$. В цьому суть ***механічного змісту*** скалярного добутку.

2.2.1. Розв'язок типових прикладів самостійної роботи по розділу 2.2

1. Знайти скалярний добуток векторів $2\vec{a}-3\vec{b}$ і $\vec{c}+4\vec{d}$.

Розв'язок. Знаходимо

$$\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}+4\vec{d}\right)=2\vec{a}\cdot\vec{c}+8\vec{a}\cdot\vec{d}-3\vec{b}\cdot\vec{c}-12\vec{b}\cdot\vec{d}.$$

2. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{p}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ і $\vec{q}=\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$.

Розв'язок. Скалярний добуток векторів знайдемо за формулою (2.14) з врахуванням 2°, 6

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=1\cdot 1+(-3)\cdot 1+1\cdot(-4)=1-3-4=-6.$$

3. Довжини векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнюють $\left|\vec{a}\right|=8$, $\left|\vec{b}\right|=5$ і кут між векторами $\left(\widehat{a,b}\right)=150^{\circ}$. Знайти їх скалярний добуток.

Розв'язок. Скориставшись формулою (2.13) отримаємо

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=8\cdot 5\cdot\cos 150^{\circ}=40\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-20\sqrt{3}.$$

4. Знайти кут φ між векторами $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$ і $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$.

Розв'язок. Скориставшись формулою (2.15), отримаємо

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{1\cdot 1+1\cdot(-2)+(-4)\cdot 2}{\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{-9}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{9}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\varphi=\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=135^{\circ}.$$

5. Знайти проекцію вектора $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$ на напрям вектора $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$.

Розв'язок. Згідно формули (2.18)

$$\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right).$$

Косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ знайдемо за формулою (2.15)

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{3\cdot 1+4\cdot 1+(-1)\cdot 0}{\sqrt{3^2+4^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{2}}=\frac{7}{\sqrt{52}}.$$

Отже,

$$\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\sqrt{26}\cdot\frac{7}{\sqrt{52}}=\frac{7}{\sqrt{2}}.$$

Цю задачу можна розв'язати простіше, застосовуючи формулу (2.19)

$$\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\frac{\left(3\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}\right)\cdot\left(\vec{i}+\vec{j}\right)}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3+4}{\sqrt{2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}.$$

6. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a}\{6;\alpha;3\}$ і $\vec{b}\{2;-5;\beta\}$ колінеарні?

Розв'язок. Вектори $\vec{a}\left\{a_x;a_y;a_z\right\}$ і $\vec{b}\left\{b_x;b_y;b_z\right\}$ є колінеарними, якщо $\vec{a}=\lambda\vec{b}$:

$$a_x=\lambda b_x;\quad a_y=\lambda b_y;\quad a_z=\lambda b_z\quad\Rightarrow\quad\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}=\lambda.$$

Тобто координати колінеарних векторів пропорційні. Тому з умови $\frac{6}{2}=\frac{\alpha}{-5}=\frac{3}{\beta}=3$ випливає, що $\alpha=-15$, $\beta=1$. В цьому випадку вектори $\vec{a}\{6;-15;3\}$ і $\vec{b}\{2;-5;1\}$ – колінеарні, причому мають однаковий напрям, оскільки $\lambda=3>0$.

7. Показати, що чотирикутник із вершинами $A(-3;-2;1)$, $B(7;8;6)$; $C(-4;18;8)$, $D(-14;8;3)$ є квадратом.

Розв'язок. Розглянемо вектори

$$\overrightarrow{AB}=\{7-(-3);8-(-2);6-1\}=\{10;10;5\},$$

$$\overrightarrow{BC}=\{-4-7;(18-8;8-6)\}=\{-11;10;2\},$$

$$\overrightarrow{DC}=\{-4-(-14);(18-8;8-3)\}=\{10;10;5\},$$

$$\overrightarrow{AD}=\{-14-(-3);(8-(-2);3-1)\}=\{-11;10;2\}.$$

Оскільки

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{10^2+10^2+5^2} = 15, \qquad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-11)^2+10^2+2^2} = 15,$$

то
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\overrightarrow{DA}\right|.$$

Крім цього

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 10\cdot(-11)+10\cdot 10+5\cdot 2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD} \text{ і } \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}.$$

Тому чотирикутник $ABCD$ є квадратом.

8. Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{F}\{6;1;2\}$ на переміщенні $\vec{s}\{2;4;-1\}$.

Розв'язок. Робота, яку виконує сила $\vec{F}$ на ділянці шляху $\vec{s}$ дорівнює їх скалярному добутку $A = \vec{F}\cdot\vec{s}$, тому

$$A = 6\cdot 2+1\cdot 4+2\cdot(-1) = 14 \text{ (од. роботи)}.$$

2.2.2. Завдання для самостійної роботи по розділу 2.2

1. З'ясувати, чи колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо так, то чи мають вони однаковий напрям. Яке відношення їх довжин:

а) $\vec{a}\{4;5;-2\}$, $\vec{b}\{4;5;2\}$; *б)* $\vec{a}\{2;-1;1\}$, $\vec{b}\{4;2;-2\}$;

в) $\vec{a}\{4;3;-2\}$, $\vec{b}\{8;6;-4\}$; *г)* $\vec{a}\{-4;2;0\}$, $\vec{b}\{2;-1;0\}$;

д) $\vec{a}\{3;0;2\}$, $\vec{b}\{3;2;0\}$; *е)* $\vec{a}\{2;4;6\}$, $\vec{b}\{3;6;9\}$.

2. Чи перпендикулярні вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо:

а) $\vec{p}\{2;0;-3\}$, $\vec{q}\{3;4;2\}$; *б)* $\vec{p}\{0;4;1\}$, $\vec{q}\{1;-2;8\}$;

в) $\vec{p}\{3;0;-2\}$, $\vec{q}\{-2;3;0\}$; *г)* $\vec{p}\{1;-1;2\}$, $\vec{q}\{2;-2;1\}$.

3. Задано ромб $ABCD$. Довести, що його діагоналі перетинаються під прямим кутом.

4. Знайти кут φ між векторами $\vec{a} = 2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$.

5. Задані напрями $l_1(45^\circ; 45^\circ; 90^\circ)$ і $l_2(45^\circ; 90^\circ; 45^\circ)$. Знайти кут φ між ними.

6. В площині xOy знайти вектор $\vec{a}$, перпендикулярний вектору $\vec{b}\{3;-4;12\}$, який має з ним однакову довжину.

7. Знайти координати вектора $\vec{d} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, якщо він перпендикулярний векторам $\vec{a} = \vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ і $\vec{b} = 2\vec{i}+6\vec{k}$, а скалярний добуток вектора $\vec{d}$ і вектора $\vec{c} = \vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ дорівнює -1.

8. Знайти координати вектора $\vec{d} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, якщо він перпендикулярний вектору $\vec{a} = 2\vec{i}-\vec{k}$; скалярний добуток вектора $\vec{d}$ і вектора $\vec{b} = \vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ дорівнює 1, а проекція вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{c} = 3\vec{j}-4\vec{k}$ дорівнює $1/5$.

9. Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{F} = 2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ на переміщенні $\vec{s} = \vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$.

2.2.3. Розв'язок типового прикладу завдання 2 РГР

1. Знайти внутрішні кути $\angle A$, $\angle B$ і $\angle C$ трикутника, заданого вершинами $A(3;2;-5)$, $B(6;-4;7)$, $C(-2;8;-3)$ і переконатися, що їх сума дорівнює 180^0.

Розв'язок. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, і протилежні їм вектори $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, враховуючи, що координати останніх мають знаки, протилежні координатам основних векторів

$$\overrightarrow{AB} = \left\{x_B-x_A;\ y_B-y_A;\ z_B-z_A\right\}.$$

$$\overrightarrow{AB} = \{6-3;\ -4-(-2);\ 7-(-5)\} = \{3;\ -6;\ 12\}, \qquad \overrightarrow{BA} = \{-3;\ 6;\ -12\};$$

$$\overrightarrow{AC} = \{-2-3;\ 8-2;\ -3-(-5)\} = \{-5;\ 6;\ 2\}, \qquad \overrightarrow{CA} = \{5;\ -6;\ -2\};$$

$$\overrightarrow{BC} = \{-2-6;\ 8-(-4);\ -3-7\} = \{-8;\ 12;\ -10\}, \qquad \overrightarrow{CB} = \{8;\ -12;\ 10\}.$$

Обчислимо довжини сторін трикутника за формулою

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}.$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{3^2+(-6)^2+12^2} = \sqrt{9+36+144} = \sqrt{189} = 13{,}75;$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{(-5)^2+6^2+2^2} = \sqrt{25+36+4} = \sqrt{65} = 8{,}06;$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{(-8)^2+12^2+(-10)^2} = \sqrt{64+144+100} = \sqrt{308} = 17{,}55.$$

Знайдемо косинус кута між векторами за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

$$\cos\angle A = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{3\cdot(-5)+(-6)\cdot 6+12\cdot 2}{13{,}75\cdot 8{,}06} =$$

$$= \frac{-15+(-36)+24}{110{,}84} = \frac{-27}{110{,}84} = -0{,}244;$$

$\angle A = \arccos(-0{,}244) \approx 180^0 - 76^0 \approx 104^0.$

$$\cos\angle B = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{-3\cdot(-8)+6\cdot 12+(-12)\cdot(-10)}{13{,}75\cdot 17{,}55} =$$

$$= \frac{24+72+120}{241{,}27} = \frac{216}{241{,}27} = 0{,}895;$$

$\angle B = \arccos 0{,}895 \approx 26^0\,30'.$

$$\cos\angle C = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{5\cdot 8+(-6)\cdot(-12)+(-2)\cdot 10}{8{,}06\cdot 17{,}55} =$$

$$= \frac{40+72-20}{141{,}49} = \frac{92}{141{,}49} = 0{,}650;$$

$\angle C = \arccos 0{,}650 \approx 49^0\,30'.$

Перевірка: $\angle A + \angle B + \angle C = 104^0 + 26^0\,30' + 49^0\,30' = 180^0.$

Відповідь: $\angle A \approx 104^0$; $\angle B \approx 26^0\,30'$; $\angle C \approx 49^0\,30'$.

2.3. Векторний добуток двох векторів

Трійка не компланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається ***правою***, якщо при обертанні буравчика в напрямі від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ напрям поступального руху буравчика утворює гострий кут з напрямом вектора $\vec{c}$. Якщо ж кут тупий, то трійка називається ***лівою***.

1^0. ***Векторним добутком*** двох векторів $\vec{a}\times\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє наступним умовам:

1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$, де $\varphi = \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$; (2.22)

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто $\vec{c}\perp\vec{a}$ и $\vec{c}\perp\vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$, має такий напрям, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів. Векторний добуток позначають одним із символів:

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \left[\vec{a}\ \vec{b}\right].$$

2^0. Основні властивості векторного добутку

1. $\vec{a}\times\vec{b} = -\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$,

тобто від перестановки множників векторний добуток змінює знак на протилежний.

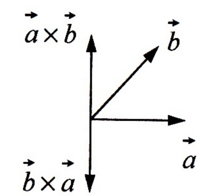


Рис. 2.10

2. Якщо $\vec{a}\neq 0$ і $\vec{b}\neq 0$, а векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b} = 0$, то дане рівняння визначає умову колінеарності векторів.

3. Скалярний множник можна виносити за знак векторного добутку

$$\lambda\,\vec{a}\times\vec{b} = \lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right).$$

4. Векторний добуток має розподільну властивість

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}.$$

5. Векторні добутки одиничних векторів (ортів) задовольняють рівностям:

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0};\quad \vec{i}\times\vec{j} = \vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}.$$

3°. Якщо ***вектори задані*** проекціями на осі координат $\vec{a}\left\{a_x; a_y; a_z\right\}$ і $\vec{b}\left\{b_x; b_y; b_z\right\}$, то ***векторний добуток*** визначається за формулою

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{2.23}$$

4°. Геометричний зміст векторного добутку.

Модуль $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, віднесених до спільного початку, тобто

$$S_{\Diamond} = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|. \tag{2.24}$$

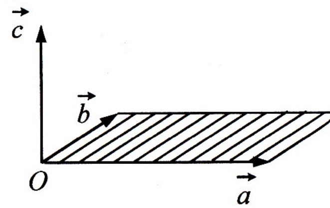


Рис. 2.11

Площа трикутника ABC, дорівнює половині площі паралелограма

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times AC\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ AB_x & AB_y & AB_z \\ AC_x & AC_y & AC_z \end{vmatrix}\right|. \tag{2.25}$$

5°. Фізичні додатки

1. Момент сили $\vec{F}$, прикладений до точки A, рівний векторному добутку вектора $\overrightarrow{OA}$ на вектор $\vec{F}$:

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{OA}\times\vec{F}.$$

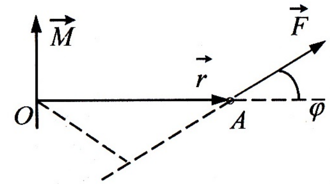


Рис. 2.12

2. Швидкість $\vec{\vartheta}$ точки P твердого тіла, яке обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо нерухомої осі l визначається формулою Ейлера

$$\vec{\vartheta} = \vec{\omega}\times\vec{r}.$$

3. Якщо електрон, з зарядом e рухається зі швидкістю $\vec{\vartheta}$ в магнітному полі постійної напруженості $\vec{H}$, то на електрон діє сила $\vec{F}_л$ Лоренца

$$\vec{F}_л = \frac{e}{c}\left(\vec{\vartheta}\times\vec{H}\right).$$

2.3.1. Розв'язок типових прикладів самостійної роботи по розділу 2.3

1. Задано вектори $\vec{a}\{3;4;1\}$ і $\vec{b}\{-1;2;5\}$. Знайти координати векторного добутку $\vec{a}\times\vec{b}$.

Розв'язок. Скористаємося формулою (2.23)

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = 18\vec{i} + 16\vec{j} + 10\vec{k}.$$

Тоді координати векторного добутку $\vec{a}\times\vec{b} = \{18;16;10\}$.

2. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(1;0;6)$, $B(4;5;-2)$ і $C(7;3;4)$.

Розв'язок. Знайдемо спочатку координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} = \{4-1; 5-0; -2-6\} = \{3;5;-8\}$, $\overrightarrow{AC} = \{7-1; 3-0; 4-6\} = \{6;3;-2\}$.

Для знаходження площі трикутника скористаємося формулою (2.25)

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & -8 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 5 & -8 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}\vec{k}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(14\vec{i} - 42\vec{j} - 21\vec{k}\right)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{14^2 + (-42)^2 + (-21)^2} = 24{,}5 \text{ (кв. од.)}.$$

3. Знайти координати вектора $\vec{c}$, якщо відомо, що він перпендикулярний векторам $\vec{a}\{1;0;3\}$, $\vec{b}\{-2;4;-3\}$ і утворює з віссю Oy гострий кут, а його модуль дорівнює 39.

Розв'язок. Оскільки вектори $\vec{c}$ і $\vec{a}\times\vec{b}$ колінеарні, то

$$\vec{c} = \lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \lambda\left(\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}\vec{k}\right) =$$

$$= \lambda\left(-12\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}\right).$$

Знаючи модуль вектора $\vec{c}$, знаходимо λ

$$\left|\vec{c}\right| = 39 = |\lambda|\sqrt{(-12)^3 + (-3)^2 + 4^2} = |\lambda|\cdot\sqrt{169} = |\lambda|\cdot 13, \quad \lambda = \pm 3.$$

Гострий кут між вектором $\vec{c}$ і віссю Oy буде $\cos\beta = \dfrac{-3\lambda}{|\vec{c}|} > 0$,

отже, $\lambda = -3$. Таким чином, $\vec{c} = 36\vec{i} + 9\vec{j} - 12\vec{k}$.

4. Позначивши через φ кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, виразити $\operatorname{tg}\varphi$ через векторний і скалярний добутки цих векторів.

Розв'язок. Модуль векторного добутку двох векторів

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi.$$

Скалярний добуток двох векторів

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi.$$

Поділивши перший вираз на другий, отримаємо

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{\vec{a}\cdot\vec{b}}.$$

5. Дано: $\left|\vec{a}\right| = 10$, $\left|\vec{b}\right| = 2$ и $\vec{a}\cdot\vec{b} = 12$. Обчислити $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

Розв'язок. Скалярний добуток двох векторів

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\varphi \;\Rightarrow\; \cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{12}{10\cdot 2} = \frac{3}{5} \;\Rightarrow\; \varphi < 90^\circ.$$

Згідно попередньої задачі $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{\vec{a}\cdot\vec{b}} \;\Rightarrow\; \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \vec{a}\cdot\vec{b}\operatorname{tg}\varphi$.

Виразимо $\operatorname{tg}\varphi$ через $\cos\varphi$

$$1+\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} - 1 = \frac{1}{\frac{9}{25}} - 1 = \frac{25}{9} - 1 = \frac{16}{9} \;\Rightarrow\; tg\varphi = \frac{4}{3}.$$

Остаточно маємо:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \vec{a}\cdot\vec{b}\operatorname{tg}\varphi = 12\cdot\frac{4}{3} = 16; \quad \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = 16.$$

2.3.2. Завдання для самостійної роботи по розділу 2.3

1. Дано вектори $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 26$ і $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = 72$. Обчислити $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 4$, обчислити $\left|\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\right|$.

3. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{2}{3}\pi$, $\left|\vec{a}\right| = 1$, $\left|\vec{b}\right| = 2$. Обчислити $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2$.

4. Дано вектори $\vec{a}\{3;-1;2\}$ і $\vec{b}\{1;2;-1\}$. Знайти координати їх векторного добутку $\vec{a}\times\vec{b}$.

5. Дано точки $A(4;1;4)$, $B(3;4;1)$, $C(5;4;3)$. Знайти координати векторного добутку $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$.

6. В трикутнику з вершинами $A(3;1;4)$, $B(7;-4;4)$, $C(3;5;1)$ знайти висоту $h = \left|\overrightarrow{BD}\right|$.

7. Сила $\vec{F}\{2;-4;5\}$ прикладена до точки $B(4;-2;3)$. Визначити момент цієї сили відносно точки $A(3;2;-1)$.

8. Сила $\vec{F}\{2;2;9\}$ прикладена до точки $B(2;4;0)$. Визначити величину і напрямні косинуси моменту цієї сили відносно точки $A(4;2;-3)$.

9. Сила $\vec{F}\{3;4;-2\}$ прикладена до точки $A(2;-1;-2)$. Знайти величину моменту цієї сили відносно початку координат і його напрямні косинуси.

10. Визначити синус кута, який утворюється векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

а) $\vec{a} = \{4;-4;2\}$, $\vec{b} = \{2;3;6\}$;

б) $\vec{a} = \{2;-4;-4\}$, $\vec{b} = \{2;1;-2\}$.

11. Вектор $\vec{c}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a}\{4;-2;-3\}$, $\vec{b}\{0;1;3\}$, і утворює з віссю Oy тупий кут. Знайти його координати, якщо $\left|\vec{c}\right| = 6{,}5$.

2.3.3. Розв'язок типового прикладу завдання 3 РГР

1. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q}$; $\vec{b}=3\vec{p}-\vec{q}$; $|\vec{p}|=1$; $|\vec{q}|=2$; $\left(\widehat{\vec{p}\,\vec{q}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$;

б) $\vec{a}=\{1,5,2\}$; $\vec{b}=\{-1,1,-1\}$.

Розв'язок. Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, згідно формули (2.26) дорівнює модулю їх векторного добутку

$$S_{\Diamond}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

Знайдемо векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

а) $\vec{a}\times\vec{b}=\left(\vec{p}+2\vec{q}\right)\times\left(3\vec{p}-\vec{q}\right)=\vec{p}\times3\vec{p}-\vec{p}\times\vec{q}+2\vec{q}\times3\vec{p}-2\vec{q}\times\vec{q}=$

$=0-\vec{p}\times\vec{q}-3\vec{p}\times2\vec{q}-0=-\vec{p}\times\vec{q}-6\left(\vec{p}\times\vec{q}\right)=-7\left(\vec{p}\times\vec{q}\right)=-7\vec{p}\times\vec{q}.$

Тоді площа паралелограма

$$S_{\Diamond}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|-7\vec{p}\times\vec{q}\right|=7\left|\vec{p}\right|\cdot\left|\vec{q}\right|\sin\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=7\cdot1\cdot2\cdot\frac{1}{2}=7\text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь: 7 кв. од.

б) Якщо вектори задані своїми проекціями на осі координат, то в цьому випадку їх векторний добуток обчислюється за формулою (2.25)

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&5&2\\-1&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&2\\1&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&2\\-1&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&5\\-1&1\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=(-5-2)\vec{i}-(-1-(-2))\vec{j}+(1-(-5))\vec{k}=-7\vec{i}-\vec{j}+6\vec{k}.$$

Тоді площа паралелограма

$$S_{\Diamond}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{(-7)^2+(-1)^2+6^2}=\sqrt{86}\text{ (кв. од.)}$$

Відповідь: $\sqrt{86}\approx9{,}27$ кв. од.

2.4. Мішаний добуток трьох векторів

1°. ***Мішаним добутком*** трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число, яке дорівнює добутку вектора $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ скалярно на вектор $\vec{c}$:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c},\quad\text{або}\quad\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}.\qquad(2.26)$$

Якщо вектори задано своїми координатами, то мішаний добуток трьох векторів дорівнює визначнику третього порядку, який складається з відповідних координат векторів, що перемножуються

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}.\qquad(2.27)$$

2°. Властивості мішаного добутку

1. Якщо в мішаному добутку поміняти місцями довільні два множника, то мішаний добуток змінить знак на протилежний

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=-\vec{c}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{a}\right).$$

2. При циклічній перестановці множників мішаний добуток не змінюється:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}.$$

3. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ***компланарні*** тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю.

3°. Геометричний зміст мішаного добутку

Модуль мішаного добутку $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ відкладених до спільного початку:

$$V=\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|.\qquad(2.28)$$

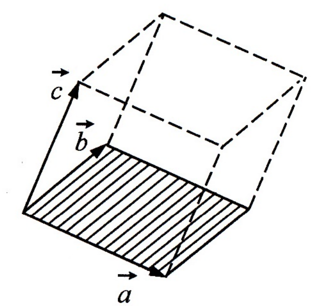


Рис. 2.13

4°. Додаток

Об'єм трикутної піраміди (тетраедра), побудованої на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ дорівнює

$$V_T=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|.\qquad(2.29)$$

**2.4.1. Розв'язок типових прикладів самостійної роботи по ро-
зділу 2.4**

1. Обчислити об'єм трикутної призми, побудованої на вектора $\vec{a}\{1;-3;2\}$, $\vec{b}\{3;1;-2\}$, $\vec{c}\{2;-1;2\}$ і визначити орієнтацію трійк векторів в просторі.

Розв'язок. Значення мішаного добутку знайдемо за формуло (2.27)

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}1&-3&2\\3&1&-2\\2&-1&2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1&-2\\-1&2\end{vmatrix}-(-3)\cdot\begin{vmatrix}3&-2\\2&2\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}3&1\\2&-1\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(2-2)+3\cdot(6+4)+2\cdot(-3-2)=0+30-10=20.$$

Оскільки мішаний добуток векторів додатній, то вони утворюют праву трійку.

Об'єм трикутної призми дорівнює половині об'єму паралелепіпеда побудованого на цих векторах

$$V_{\text{пр}}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=10 \text{ (куб. од.).}$$

2. Довести компланарність векторів $\vec{a}\{4;3;5\}$, $\vec{b}\{2;2;2\}$ $\vec{c}\{-3;-2;-4\}$.

Розв'язок. Умова компланарності $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$. Перевіримо її:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}4&3&5\\2&2&2\\-3&-2&-4\end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix}2&2\\-2&-4\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}2&2\\-3&-4\end{vmatrix}+5\cdot\begin{vmatrix}2&2\\-3&-2\end{vmatrix}=$$

$$=4\cdot(-8+4)-3\cdot(-8+6)+5\cdot(-4+6)=-16+6+10=0,$$

отже, вектори компланарні.

3. Задано вектори $\vec{a}\{-1;-1;2\}$ і $\vec{b}\{1;-2;2\}$. Знайти невідоми вектор $\vec{x}\{x;y;z\}$, якщо скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{x}=-7$, вектор $\vec{c}=\vec{a}\times$ перпендикулярний осі Ox, а мішаний добуток $\vec{x}\,\vec{a}\,\vec{b}=2$.

Розв'язок. Запишемо вектори $\vec{a}$ і $\vec{x}$ через їх орти

$$\vec{a}=-1\vec{i}-1\vec{j}+2\vec{k};\qquad \vec{x}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

Використовуючи умову $\vec{a}\cdot\vec{x}=-7$, отримаємо рівняння

$$\left(-1\vec{i}-1\vec{j}+2\vec{k}\right)\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)=-1\cdot x\vec{i}^{\,2}-1\cdot y\vec{i}^{\,2}+2z\vec{k}^{\,2}=-x-y+2z=-7,$$

або

$$x+y-2z=7.$$

Запишемо векторний добуток $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{x}$

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{x}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&-1&2\\x&y&z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&2\\y&z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&2\\x&z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1&-1\\x&y\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=(-z-2y)\vec{i}-(-z-2x)\vec{j}+(-y+x)\vec{k}=-(z+2y)\vec{i}+(z+2x)\vec{j}+(x-y)\vec{k}.$$

Оскільки вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до осі Ox, то проекція c_x вектора $\vec{c}$ на вісь Ox дорівнює нулю, тобто $c_x=-(2y+z)=0$.

Із умови $\vec{x}\,\vec{a}\,\vec{b}=2$ маємо:

$$\begin{vmatrix}x&y&z\\-1&-1&2\\1&-2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&2\\-2&2\end{vmatrix}x-\begin{vmatrix}-1&2\\1&2\end{vmatrix}y+\begin{vmatrix}-1&-1\\1&-2\end{vmatrix}z=2x+4y+3z=2.$$

Отримані рівнянні об'єднаємо в систему

$$\begin{cases}x+y-2z=7,\\2y+z=0,\\2x+4y+3z=2.\end{cases}$$

Розв'язок шукаємо за формулами Крамера. Знайдемо визначник системи

$$\Delta=\left|\begin{matrix}1&1&-2\\0&2&1\\2&4&3\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&1\\0&2\\2&4\end{matrix}\quad\begin{matrix}=1\cdot2\cdot3+1\cdot1\cdot2+(-2)\cdot0\cdot4-(-2)\cdot2\cdot2-\\-1\cdot1\cdot4-1\cdot0\cdot3=6+2-0+8-4-0=12\neq0.\end{matrix}$$

Так як визначник системи не дорівнює нулю, то система має єдиний розв'язок. Знайдемо визначники Δ_x, Δ_y, Δ_z.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}7&1&-2\\0&2&1\\2&4&3\end{vmatrix}=24;\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}1&7&-2\\0&0&1\\2&2&3\end{vmatrix}=12;\quad \Delta_z=\begin{vmatrix}1&1&7\\0&2&0\\2&4&2\end{vmatrix}=-24.$$

$$x=\frac{24}{12}=2,\quad y=\frac{12}{12}=1,\quad z=\frac{-24}{12}=-2.$$

Таким чином, невідомий вектор $\vec{x}=\{2;1;-2\}$.

2.4.2. Завдання для самостійної роботи по розділу 2.4

1. Обчислити мішаний добуток заданих векторів:

а) $\vec{a}=\vec{i}$, $\vec{b}=\vec{j}$, $\vec{c}=\vec{k}$; *б)* $\vec{a}=\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{j}$, $\vec{c}=\vec{i}$;

в) $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=8\vec{i}+6\vec{j}+4\vec{k}$;

г) $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(3;1;2)$, $\vec{c}=(2;3;1)$.

2. Обчислити, якою трійкою (правою або лівою) є трійка векторі якщо:

а) $\vec{a}=(1;2;1)$, $\vec{b}=(2;1;1)$, $\vec{c}=(1;1;2)$.

б) $\vec{a}=(1;-1;2)$, $\vec{b}=(-2;1;1)$, $\vec{c}=(1;-2;2)$.

3. Встановити, чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, якщо:

а) $\vec{a}\{5;-1;3\}$, $\vec{b}\{2;1;2\}$, $\vec{c}\{3;-1;-2\}$;

б) $\vec{a}\{3;1;-1\}$, $\vec{b}\{1;2;-3\}$, $\vec{c}\{3;-4;7\}$.

4. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на заданих векто рах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

а) $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$, $\vec{b}=-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{j}+5\vec{k}$;

б) $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$.

5. На векторах $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$ і $\vec{c}=3\vec{i}-4$ побудовано паралелепіпед. Знайти його висоту, опущену на грань, як утворена векторами $\vec{a}$ і $\vec{c}$.

6. Встановити, чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ базис на множині вс векторів, якщо:

а) $\vec{a}=\{2;3;-1\}$, $\vec{b}=\{1;-1;3\}$, $\vec{c}=\{1;9;-11\}$;

б) $\vec{a}=\{3;-2;1\}$, $\vec{b}=\{2;1;2\}$, $\vec{c}=\{3;-1;-2\}$.

7. Доказати, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис і розкласти векто $\vec{d}$ по цьому базису якщо:

а) $\vec{a}=\{0;1;2\}$, $\vec{b}=\{-1;0;3\}$, $\vec{c}=\{1;2;-5\}$, $\vec{d}=\{0;3;0\}$

б) $\vec{a}=\{2;1;-3\}$, $\vec{b}=\{3;-2;1\}$, $\vec{c}=\{-1;0;2\}$, $\vec{d}=\{-2;2;1\}$

2.4.3. Розв'язок типового прикладу завдання 4 РГР

Приклад 2.3. Обчислити об'єм тетраедра $ABCD$ і площу грані ABC, якщо $A(-2,1,-3)$; $B(4,\ 3,\ 2)$; $C(5,\ 4,\ -1)$; $D(10,\ 2,\ 7)$.

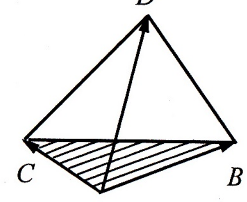


Рис. 2.14

Розв'язок. Зробимо схематичний рисунок (2.14). Об'єм тетраедра, згідно (2.31)

$$V_T=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right|.$$

Знайдемо вектори

$$\overrightarrow{AB}=\{4-(-2);\ 3-1;\ 2-(-3)\}=\{6;\ 2;\ 5\};$$

$$\overrightarrow{AC}=\{5-(-2);\ 4-1;\ -1-(-3)\}=\{7;\ 3;\ 2\};$$

$$\overrightarrow{AD}=\{10-(-2);\ 2-1;\ 7-(-3)\}=\{12;\ 1;\ 10\}.$$

Тоді об'єм тетраедра

$$V_T=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}6&2&5\\7&3&2\\12&1&10\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\,|6\cdot3\cdot10+2\cdot2\cdot12+5\cdot7\cdot1-$$

$$-5\cdot3\cdot12-6\cdot2\cdot1-2\cdot7\cdot10\,|=$$

$$=\frac{1}{6}\,|\,180+48+35-180-12-140\,|=\frac{1}{6}\,|-69\,|=11{,}5 \text{ (куб. од.)}.$$

Площа грані ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Позначимо векторний добуток $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ через $\vec{P}$. Тоді модуль вектора $\vec{P}$ дорівнює площі паралелограма

$$\vec{P}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\6&2&5\\7&3&2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}2&5\\3&2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}6&5\\7&2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}6&2\\7&3\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\,(4-15)-\vec{j}\,(12-35)+\vec{k}\,(18-14)=-11\,\vec{i}+23\,\vec{j}+4\,\vec{k}.$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}P=\frac{1}{2}\sqrt{(-11)^2+23^2+4^2}=\frac{1}{2}\sqrt{121+529+16}=\frac{1}{2}\sqrt{666}=$$

$$=0{,}5\cdot25{,}807\approx12{,}90 \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь: $V_T=11{,}5$ куб. од.; $S_{ABC}\approx12{,}90$ кв. од.

3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

3.1. Довжина і напрям відрізка. Поділ відрізка в заданому відношенні. Площа трикутника і многокутника. Центр мас

1°. Довжина відрізка на площині (рис. 3.1), заданого координатами свого початку $A(x_1, y_1)$ і кінця $B(x_2, y_2)$ дорівнює

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \qquad (3.1)$$

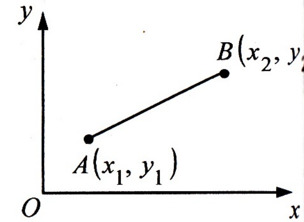


Рис. 3.1

Якщо початок відрізка співпадає з початком координат, то формула (3.1) має вигляд

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \qquad (3.2)$$

2°. Нехай α і β – кути, які утворює відрізок з додатними напрями осей Ox і Oy, тоді напрями відрізка визначаються завданням косинусів їх кутів

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}; \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \qquad (3.3)$$

3°. Координати точки $M(x; y)$, яка ділить відрізок AB в відношенні $\frac{AM}{MB} = \lambda$, знаходяться за формулами

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \qquad y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \qquad (3.4)$$

Якщо точка M ділить відрізок AB пополам, то $\lambda = 1$ і координат точки M дорівнюють

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (3.5)$$

Якщо λ – число від'ємне, то точка M знаходиться на продовжені відрізка AB і поділ називається зовнішнім.

4°. Площа трикутника з вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2}\left| x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \right|. \qquad (3.6)$$

Якщо, слідуючи по контуру трикутника від A до B і до C, площа обходиться проти годинникової стрілки, то число S додатне, інакше – від'ємне. Оскільки площа трикутника – величина додатна, то права частина формули (3.6) береться за абсолютною величиною.

Якщо площа трикутника дорівнює нулю, то з формули (3.6) виходить рівність

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0, \qquad (3.7)$$

яка являється умовою того, що точки A, B і C розташовані на одній прямій.

5°. Площа многокутника з вершинами $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, … $M_n(x_n, y_n)$ визначається за формулою

$$S = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right|. \qquad (3.8)$$

6°. Якщо в точках $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ розміщені маси m_1, m_2, m_3 відповідно, то координати центра мас знаходяться за формулами

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}; \qquad y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}. \qquad (3.9)$$

Звідки координати центра мас плоского однорідного трикутника визначаються за формулами

$$x_c = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \qquad y_c = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}. \qquad (3.10)$$

Координати центра мас системи, яка складається з n матеріальних точок $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, … $M_n(x_n, y_n)$ відповідно з масами m_1, m_2, … m_n визначається за формулами

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}; \qquad y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \qquad (3.11)$$

3.1.1. Розв'язок типових прикладів самостійної роботи по розділу 3.1

1. Задано точки $A(-1;-3)$ і $B(4;2)$. Знайти довжину відрізка його напрямні косинуси.

Розв'язок. Довжину відрізка, заданого координатами свого початку кінця знаходимо за формулою (3.1):

$$d=|AB|=\sqrt{(4-(-1))^2+(2-(-3))^2}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$$

Напрямні косинуси знаходимо за формулами (3.3):

$$\cos\alpha=\frac{4-(-1)}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad \cos\beta=\frac{2-(-3)}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Звідки кут між AB і додатним напрямом осі Ox дорівнює $\alpha=45^{\circ}$ а між AB і віссю Oy – $\beta=45^{\circ}$.

2. Довести, що чотирикутник з вершинами у точках $A(1;5)$ $B(-2;1)$, $C(1;-2)$, $D(4;2)$ є паралелограм.

Розв'язок. Відомо, що чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно рівні, є паралелограмом. Доведемо рівність протилежних сторін AB і CD, (BC і DA). Знайдемо довжини цих сторін:

$$d_{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-2-1)^2+(1-5)^2}=5,$$

$$d_{CD}=\sqrt{(x_D-x_C)^2+(y_D-y_C)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(2-(-2))^2}=5.$$

Отже, $AB=CD$.

Аналогічно,

$$d_{BC}=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(1-(-2))^2+(-2-1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$d_{DA}=\sqrt{(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(2-5)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

значить $BC=DA$.

Оскільки протилежні сторони рівні, то чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом, що і треба було довести.

3. Знайти точку C, яка ділить відрізок між точками $A(-1;8)$ і $B(4;3)$ у відношенні $\lambda=\frac{3}{2}$.

Розв'язок. Для знаходження координат точки, яка ділить відрізок у відношенні $\lambda=\frac{3}{2}$, скористаємося формулою (3.4)

$$x=\frac{-1+\frac{3}{2}\cdot 4}{1+\frac{3}{2}}=2,\qquad y=\frac{8+\frac{3}{2}\cdot 3}{1+\frac{3}{2}}=5.$$

Таким чином, $C(2;5)$.

4. Знайти точку C, яка ділить відрізок між точками $A(-2;0)$ і $B(4;0)$ в відношенні $\lambda=-2$.

Розв'язок. За умовою задачі точки A і B розташовані на осі Ox, тому для відшукання точки C скористаємося першою з формул (3.4):

$$x=\frac{-2+(-2)\cdot 4}{1+(-2)}=\frac{-10}{-1}=10.$$

Координати шуканої точки $C(10;0)$.

5. У трикутнику з вершинами $A(-2;0)$, $B(6;6)$, $C(1;-4)$ визначити довжину медіани AD, бісектриси AE, обчислити площу трикутника і координати центра мас, вважаючи його однорідним.

Розв'язок. Так як медіана AD ділить відрізок BC пополам (рис. 3.2), то $\lambda=1$ і координати точки D знаходимо за формулами (3.4)

$$x_D=\frac{6+1}{2}=\frac{7}{2};\quad y_D=\frac{6-4}{2}=1.$$

Тоді довжина медіани

$$|AD|=\sqrt{\left(\frac{7}{2}+2\right)^2+(1-0)^2}=\frac{5}{2}\sqrt{5}.$$

Бісектриса AE ділить сторону BC на відрізки, пропорційні протилежним сторонам, тобто

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{EC}=\lambda.$$

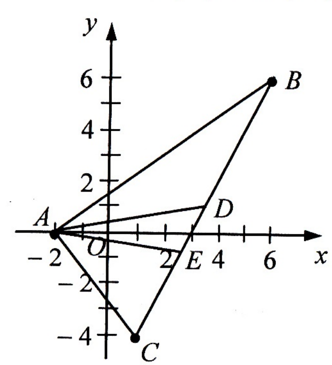


Рис 3.2

Знайдемо довжини відрізків AB і AC

$$|AB| = \sqrt{(6+2)^2 + (6-0)^2} = 10; \quad |AC| = \sqrt{(1+2)^2 + (-4-0)^2} = 5.$$

Звідки $\lambda = \dfrac{10}{5} = 2$ і координати точки E, згідно (3.4)

$$x_E = \frac{6 + 2\cdot 1}{1+2} = \frac{8}{3}; \qquad y_E = \frac{6 + 2\cdot(-4)}{1+2} = -\frac{2}{3}.$$

Довжина бісектриси AE

$$|AE| = \sqrt{\left(\frac{8}{3}+2\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}-0\right)^2} = \frac{10}{3}\sqrt{2}.$$

Площу трикутника знаходимо за формулою (3.6), вважаючи координати точки A за $(x_1,\ y_1)$, точки B за $(x_2,\ y_2)$, C – за $(x_3,\ y_3)$,

$$S = \frac{1}{2}\left| -2\cdot(6+4) + 6\cdot(-4-0) + 1\cdot(0-6)\right| = 25\ 25 \text{(кв. од.)}.$$

Координати центра мас знаходимо за формулами (3.10)

$$x_c = \frac{-2+6+1}{3} = \frac{5}{3}; \qquad y_c = \frac{0+6-4}{3} = \frac{2}{3}.$$

6. Задано три вершини паралелограма $A(1;1)$, $B(2;2)$, $C(3;-1)$. Знайти координати четвертої вершини.

Розв'язок. Діагоналі паралелограма в точці перетину E діляться пополам (рис. 3.3).

Якщо відомі координати точок A і C, знаходимо за формулами (3.5) координати точки E

$$x = \frac{1+3}{2} = 2; \qquad y = \frac{1-1}{2} = 0.$$

Далі, за цими ж формулами знаходимо координати точки D

$$2 = \frac{2+x}{2}; \qquad 0 = \frac{2+y}{2},$$

звідки знаходимо $x = 2$, $y = -2$.

Значить, $D(2;-2)$.

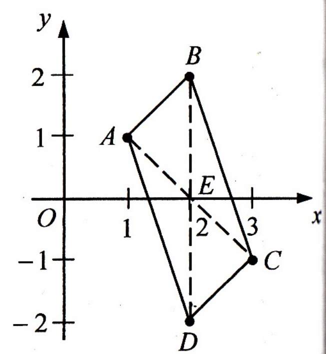


Рис. 3.3

7. У точках $A(2;1)$, $B(-1;3)$, $C(-2;5)$ розміщені відповідно маси 50, 20 і 30 г. Визначити координати центра мас x_c, y_c цієї системи.

Розв'язок. Для знаходження координат центра мас системи, скористаємося формулами (3.9)

$$x_c = \frac{50\cdot 2 + 20\cdot(-1) + 30\cdot(-2)}{50+20+30} = 0{,}2; \qquad y_c = \frac{50\cdot 1 + 20\cdot 3 + 30\cdot 5}{50+20+30} = 2{,}6.$$

8. На кінцях однорідного стержня довжиною 50 см і вагою 100 г закріплені шари вагою 20 і 80 г. Знайти центр мас системи.

Розв'язок. Нехай вісь Ox проходить вздовж стержня, причому початок координат співпадає з центром шара вагою 20 г. Координата центра мас шарів $x_ш$ може бути знайдена за формулою (3.9)

$$x_ш = \frac{20\cdot 0 + 80\cdot 50}{20+80} = 40 \text{ (см)}.$$

Координата центра мас стержня знаходиться посередині стержня на відстані 25 см від початку координат. Вважаючи, що в цій точці $x_1 = 25$ см прикладена вага стержня 100 г, а в точці $x_2 = 40$ см вага шарів, за цією ж формулою знаходимо центр мас системи

$$x_c = \frac{100\cdot 25 + 100\cdot 40}{100+100} = 32{,}5 \text{ (см)}.$$

9. Перевірити, чи лежать точки $A(2;1)$, $B(0;5)$, $C(-1;7)$ на одній прямій.

Розв'язок. Скористаємося формулою (3.7)

$$2\cdot(5-7) + 0\cdot(7-1) + (-1)\cdot(1-5) = -4 + 0 + 4 = 0.$$

Оскільки ліва частина тотожно дорівнює нулю, то точки лежать на одній прямій.

10. Обчислити площу п'ятикутника з вершинами $M_1(2;3)$, $M_2(-2;2)$, $M_3(-4;-1)$, $M_4(-1;-5)$, $M_5(4;-2)$.

Розв'язок. Запишемо формулу (3.8) для п'ятикутника

$$S = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_5 & y_5 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right|,$$

і підставимо в неї координати вершин

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2 & 3\\-2 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2 & 2\\-4 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-4 & -1\\-1 & -5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & -5\\4 & -2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4 & -2\\2 & 3\end{vmatrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|(4+6)+(2+8)+(20-1)+(2+20)+(12+4)\right|=38{,}5 \text{ (кв. од.)}.$$

11. Знайти координати центра мас ферми (рис. 3.4), яка складається з однорідних стержнів.

Розв'язок.

Так як стержні однорідні, то маса кожного стержня пропорційна його довжині l_i, тобто $m_i=\rho l_i$, де ρ – лінійна густина.

Використовуючи дані рис. 3.4, знайдемо масу кожного стержня і його центр мас. Дані занесемо в таблицю.

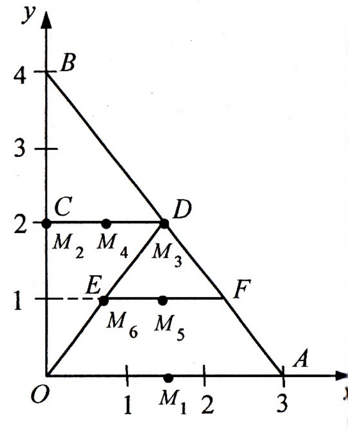


Рис. 3.4

Стержень	Маса	Центр мас
$0A$	$m_1=3\rho$	$M_1(1{,}5;0)$
$0B$	$m_2=4\rho$	$M_2(0;2)$
AB	$m_3=5\rho$	$M_3(1{,}5;2)$
CD	$m_4=1{,}5\rho$	$M_4(0{,}75;2)$
EF	$m_5=1{,}5\rho$	$M_5(1{,}5;1)$
$0D$	$m_6=2{,}5\rho$	$M_6(0{,}75;1)$

Центр мас системи з шести матеріальних точок $M_1, \dots, M_6$ знайдемо за формулами (3.11)

$$x_c=\frac{\rho\,(3\cdot 1{,}5+4\cdot 0+5\cdot 1{,}5+1{,}5\cdot 0{,}75+1{,}5\cdot 1{,}5+2{,}5\cdot 0{,}75)}{\rho(3+4+5+1{,}5+1{,}5+2{,}5)}\approx 0{,}99.$$

$$y_c=\frac{\rho\,(3\cdot 0+4\cdot 2+5\cdot 2+1{,}5\cdot 2+1{,}5\cdot 1+2{,}5\cdot 1)}{\rho(3+4+5+1{,}5+1{,}5+2{,}5)}\approx 1{,}43.$$

3.1.3. Завдання для самостійної роботи по розділу 3.1

1. Знайти відстань AD від точки $A(3;-4)$ до середини відрізка BC, кінці якого $B(1;2)$ і $C(5;4)$.

2. Відрізок на прямій з кінцями в точках $A(3;2)$ і $B(12;8)$ розділено на три рівні частини точками C і D. Визначити координати точок поділу і довжину відрізка AB.

3. Відрізок прямої AB розділено на три рівні частини. Задано точки поділу $C(0;-1)$ і $D(2;-3)$. Знайти координати кінців відрізка AB.

4. Проведено відрізок від точки $A(1;-1)$ до точки $B(-4;5)$. До якої точки C його потрібно продовжити в тому ж напрямі, щоб його довжина стала вдвічі більшою?

5. Проведено відрізок від точки $A(-2;-1)$ до точки $B(1;2)$. До якої точки C його потрібно продовжити в тому ж напрямі, щоб довжина потроїлась?

6. Задано середини сторін трикутника ABC: $M(1;3)$, $P(-2;0)$, $Q(3;2)$. Знайти координати його вершин.

7. Відрізок AB з кінцями в точках $A(-3;2)$ і $B(4;-5)$ ділиться точкою C у відношенні $\lambda=-3$. Знайти координати точки поділу.

8. Визначити координати центра мас однорідного стержня з кінцями в точках $A(3;-5)$ і $B(-1;1)$.

9. В точках $A(2;-3)$ і $B(5;3)$ прикладені паралельні сили, відповідно рівні 20 H і 30 H. На відрізку AB знайти точку, до якої прикладена рівнодіюча.

10. В точках $A(-1;0)$, $B(-2;4)$, $C(4;-5)$ знаходяться грузи відповідно з масами 30, 50 і 70 г. Визначити координати центра мас цієї системи x_c, y_c.

11. Знайти довжину бісектриси AK в трикутнику з вершинами $A(4;0)$, $B(1;3)$, $C(10;0)$.

12. Знайти координати центра мас ферми (рис. 3.5), яка складається з однорідних стержнів.

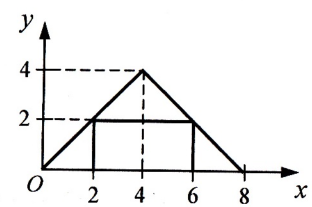


Рис. 3.5

3.2. Пряма лінія на площині

Пряму лінію на площині відносно системи прямокутних декартові координат можна задати різними способами і в результаті отримати різ види рівняння прямої.

1°. ***Загальним рівнянням прямої*** на площині називається рівняння вид

$$Ax + By + C = 0. \qquad (3.12)$$

Розглянемо положення прямої (3.12), коли деякі коефіцієнти дорі нюють нулю.

1. $C = 0$, $Ax + By = 0$. Пряма проходить через початок координа так як точка $O\,(0;\,0)$ задовольняє цьому рівнянню.

2. $B = 0$, $Ax + C = 0$ або $x = -C/A$. Пряма розташована паралельн осі Oy на відстані $-C/A$ від неї.

3. $A = 0$, $By + C = 0$ або $y = -C/B$. Це рівняння визначає прям паралельну осі Ox на відстані $-C/B$ від неї.

4. $C = 0$, $B = 0$ або $Ax = 0$. Пряма співпадає з віссю Oy.

5. $C = 0$, $A = 0$ або $By = 0$. Пряма співпадає с віссю Ox.

2°. Рівняння ***прямої з заданим кутовим коефіцієнтом***

$$y = kx + b, \qquad (3.13)$$

де $k = \operatorname{tg}\varphi$ – кутовий коефіцієнт прямої, φ – кут нахилу прямої до додатного напряму осі Ox, b – величина відрізка, який відтинає пряма на осі Oy (рис.3.6).

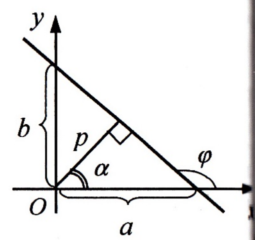


Рис. 3.6

3°. Рівняння ***прямої в відрізках на осях***

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad (3.14)$$

де a, b – відрізки, які відтинає пряма на осях координат (рис. 3.6).

4°. Рівняння ***прямої, яка проходить через дві точки*** $A(x_1,y_1)$ і $B(x_2,y_2$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (3.15)$$

5°. ***Нормальне рівняння прямої***

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \qquad (3.16)$$

де p – довжина перпендикуляра, опущеного на пряму з початку коорд нат, α – кут, який відраховується від додатного напряму осі Ox прот

годинникової стрілки до перпендикуляра p (рис. 3.6).

Щоб привести загальне рівняння прямої (3.12) до нормального виду, потрібно помножити його на нормуючий множник

$$M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \qquad (3.17)$$

взятий із знаком, протилежним знаку вільного члена C. Якщо $C = 0$, то знак може бути довільний.

6°. Геометричний зміст нерівності першої степені.

В загальному випадку нерівність першої степені $Ax + By + C \geq 0$ або $Ax + By + C \leq 0$ визначає півплощину, яка при $C \neq 0$ встановлюється в залежності знака C.

Якщо при $x = 0$ і $y = 0$ знак C співпадає із знаком нерівності, то півплощина, яка відповідає йому, включає початок координат; якщо ж знак C суперечить нерівності, то відповідна йому півплощина не включає початок координат. Якщо $C = 0$, то слід орієнтуватися на довільно вибрану точку.

7°. Основні задачі для прямої лінії

1. Якщо прямі задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то ***кут між цими прямими*** знаходиться за формулою

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}. \qquad (3.18)$$

Якщо прямі задані рівняннями $y = k_1x + b_1$ (L_1) і $y = k_2x + b_2$, (L_2) (рис. 3.7) то формула (3.18) має вигляд

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}, \qquad (3.19)$$

де $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$, φ – кут, який відраховується від прямої L_2 до прямої L_1 за годинниковою стрілкою.

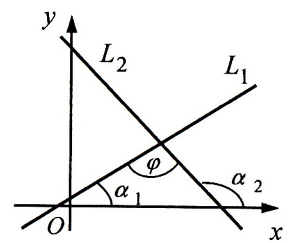


Рис. 3.7

Умова ***паралельності*** прямих

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad \text{або} \quad k_1 = k_2. \qquad (3.20)$$

$$y=-x+5, \quad \text{або} \quad x+y-5=0.$$

Підставляючи в отримане рівняння прямої координати точки заміість поточних координат, отримаємо

$$2+3-5=0, \text{ тобто } \quad 0=0.$$

Так як координати точки A задовольняють рівнянню прямої, пряма проходить через цю точку.

Підставляючи в рівняння координати точки B, отримаємо

$$3+5-5\neq 0, \text{ тобто } \quad 3\neq 0.$$

Координати точки B не задовольняють рівнянню, отже, пряма не проходить через точку B.

Відомо, що положення прямої визначається двома точками, які належать їй. За умовою задачі пряма проходить через точку $C(0;5)$. Також ми встановили, що пряма проходить через точку $A(3;2)$.

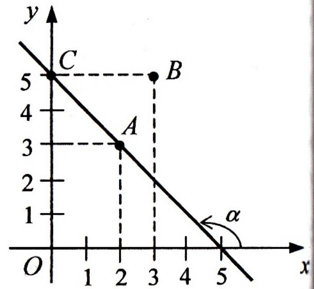


Рис. 3.9

Побудуємо ці точки і проведемо через них пряму.

3. У трикутнику з вершинами $A(-2;0)$, $B(5;3)$, $C(1;-1)$ знай рівняння сторони BC і медіани AD.

Розв'язок. Користуючись рівнянням прямої, яка проходить чер дві точки (3.15), знаходимо рівняння сторони BC

$$\frac{y-3}{-1-3}=\frac{x-5}{1-5} \quad \text{або} \quad x-y-2=0 \ (BC).$$

Медіана ділить протилежну сторону пополам (рис. 3.10), тому, зг но (3.5) координати точки D

$$x_D=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{5+1}{2}=3;$$

$$y_D=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{3+(-1)}{2}=1.$$

Користуючись рівнянням (3.15) знаходимо рівняння медіани AD

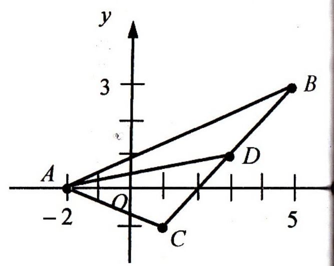


Рис. 3.10

$$\frac{y-0}{1-0}=\frac{x-(-2)}{3-(-2)} \quad \text{або} \quad x-5y+2=0 \ (AD).$$

4. Пряма проходить через точку $M(2;3)$ паралельно прямій $3x-4y+2=0$. Скласти: *а*) рівняння прямої з заданим кутовим коефіцієнтом; *б*) загальне рівняння прямої; *в*) рівняння прямої у відрізках на осях.

Розв'язок. *а*) Знайдемо кутовий коефіцієнт заданої прямої $3x-4y+2=0$:

$$4y=3x+2; \quad y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}; \quad k_1=\frac{3}{4}.$$

Шукана пряма паралельна заданій, тому її кутовий коефіцієнт $k=k_1=\frac{3}{4}$. За формулою (3.23) маємо:

$$y-3=\frac{3}{4}(x-2).$$

б) Перетворимо це рівняння до загального рівняння прямої:

$$4y-12=3x-6 \ \Rightarrow \ 3x-4y+6=0.$$

в) Запишемо рівняння прямої в відрізках на осях:

$$3x-4y+6=0; \quad 3x-4y=-6; \quad -\frac{3x}{6}+\frac{4y}{6}=1 \ \Rightarrow \ \frac{x}{-2}+\frac{y}{3/2}=1,$$

$a=-2$, $b=-3/2$ – відрізки, які відтинає пряма на осях Ox і Oy.

5. Скласти рівняння прямих, які проходять через точку $A(4;2)$ і відтинають від координатного кута трикутник площею $S=2$ кв. од.

Розв'язок. Нехай пряма, яка проходить через точку A, відтинає на координатних осях відрізки $OB=a$ і $OC=b$ (рис. 3.11), тоді рівняння прямої має вигляд

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (1)$$

З другої сторони відомо, що

$$S=\frac{1}{2}|a\cdot b|=2.$$

З рисунка видно, що a і b мають протилежні знаки, тому

$$b=-\frac{4}{a}. \qquad (2)$$

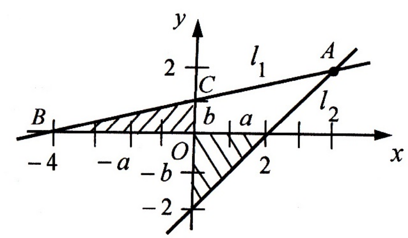


Рис. 3.11

Так як пряма проходить через точку A, то її координати перет
рюють рівняння прямої в тотожність

$$\frac{4}{a}+\frac{2}{b}=1. \qquad (3)$$

Підставляючи в це рівняння $b=-\frac{4}{a}$, отримаємо квадратне рівнян
$a^2+2a-8=0$, з якого знаходимо $a_1=-4$, $a_2=2$. Тоді $b_1=1$, $b_2=-2$.

Підставляючи a_1, b_1 і a_2, b_2 в (1) знаходимо

$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{1}=1 \;\Rightarrow\; x-4y+4=0 \;(l_1);$$

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-2}=1 \;\Rightarrow\; x-y-2=0 \;(l_2).$$

Таким чином існує дві прямі, які задовольняють умові задачі.

6. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1;\sqrt{3}$
віддалена від початку координат на відстань, рівну 2 од.

Розв'язок. Підставивши координати точки A і значення p
в нормальне рівняння прямої (3.16), отримаємо

$$\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha-2=0, \quad \text{або} \quad \frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=1.$$

З останньої рівності знаходимо

$$\sin 30^\circ\cos\alpha+\cos 30^\circ\sin\alpha=\sin(30^\circ+\alpha)=1 \quad\Rightarrow\quad \alpha=60^\circ.$$

Тоді рівняння прямої:

$$x\cos 60^\circ+y\sin 60^\circ-2=0; \quad x\cdot\frac{1}{2}+y\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-2=0, \text{ або } x+\sqrt{3}y-4=$$

7. Знайти півплощини, які задовольняють нерівностям:

а) $x-3y+2<0$; *б*) $2x+y+5>0$; *в*) $4x-3y\geq 0$.

Розв'язок. *а*) Так як вільний член не задовольняє нерівності
$x=0$ і $y=0$, то півплощина, яка визначається нерівністю, не місти
початку координат.

На площині xOy будуємо спочатку пряму $x-3y+2=0$. Для цьо
вважаючи $x=0$, $y=0$, знаходимо точки перетину прямої з осями коор
нат $x=-2$, $y=2/3$ і проводимо через ці точки пряму (рис.3.12).

Відмітимо півплощину штриховкою, яка вказує напрям від пря
в сторону, протилежну початку координат.

б) Оскільки при $x=0$, $y=0$ знак вільного члена відповідає нерівності, то відповідна півплощина від прямої $2x+y+5>0$ містить початок координат. Будуємо пряму. Вважаючи $x=0$, знаходимо $y=-5$, якщо $y=0$, тоді $x=-5/2$ (рис. 3.12).

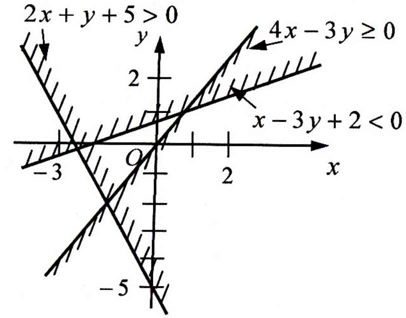


Рис. 3.12

в) Побудуємо пряму $4x-3y=0$ (рис 3.12). Для визначення півплощини візьмемо довільну точку, наприклад, $M(0;1)$. Тоді отримаємо $-3\geq 0$, що суперечить змісту нерівності.

Це означає, що шукана півплощина не включає вибраної точки M, і штриховка від прямої повинна бути направлена в сторону, протилежну точці M. Слід зауважити, що в даному випадку півплощина включає і точки граничної прямої.

8. Знайти область, яка відповідає системі нерівностей

$$\begin{cases} x-2y+3\geq 0, \\ x-2y-3<0. \end{cases}$$

Розв'язок. Побудуємо прямі $x-2y+3=0$ і $x-2y-3=0$, які відповідають заданим нерівностям (рис. 3.13). Прямі паралельні. Вважаючи $x=0$, $y=0$, відмічаємо півплощини по знаку вільного члена. В залежності від співвідношення знаків нерівностей перетин відповідних півплощин існує у вигляді частини площини між двома паралельними прямими, причому пряма $x-2y+3=0$ включається в шукану область.

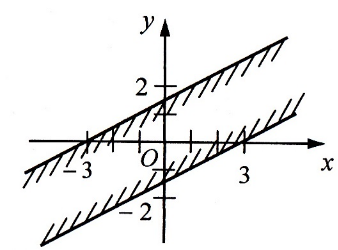


Рис. 3.13

9. Написати рівняння прямих, які проходять через точку $A(-3;4)$ паралельно і перпендикулярно до прямої $2x-y-3=0$.

Розв'язок. Скористаємося рівнянням пучка прямих (3.23) і запишемо рівняння пучка прямих з центром в точці A

$$y-4=k(x+3).$$

Умова ***перпендикулярності*** **прямих**

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \quad \text{або} \quad k_1 = -\frac{1}{k_2}. \qquad (3.21)$$

2. Точка перетину двох прямих, заданих загальними рівняннями

$$x = \frac{C_2B_1 - C_1B_2}{A_1B_2 - A_2B_1}; \qquad y = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}. \qquad (3.22)$$

3. Рівняння пучка прямих.

Пучком прямих, які проходять через задану точку $M(x_0; y_0)$, називають сукупність всіх прямих, які проходять через цю точку

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (3.23)$$

Рівняння пучка прямих, що проходять через точку перетину двох прямих, заданих загальними рівняннями (3.12), має вигляд

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0. \qquad (3.24)$$

Тут параметр λ невизначений.

4. Відстань від заданої точки $M(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (3.25)$$

5. Рівняння бісектрис кутів між прямими, які задані загальними рівняннями (3.12)

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (3.26)$$

Знак « + » ставиться, якщо сторони кута знаходяться з однієї сторони від початку координат, а « – » – якщо сторони кута знаходяться в різні сторони від початку координат (тобто, якщо початок координат знаходиться між сторонами).

6. З рівняння прямої, яка проходить через дві точки витікає умова розташування трьох точок $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_3(x_3; y_3)$ на одній прямій

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (3.27)$$

3.3.1. Розв'язок типових прикладів самостійної роботи по розділу 3.3.

1. Задано точки $O(0;0)$ і $A(4;0)$. На відрізку OA побудовано паралелограм, діагоналі якого перетинаються в точці $E(0;3)$. Написати рівняння сторін і діагоналей паралелограма.

Розв'язок. Оскільки точка E являється точкою перетину діагоналей паралелограма, то, якщо провести з точок O і A прямі через точку E і відкласти від неї відрізки, рівні OE і AE, то отримаємо дві інші вершини паралелограма B і C (рис.3.8).

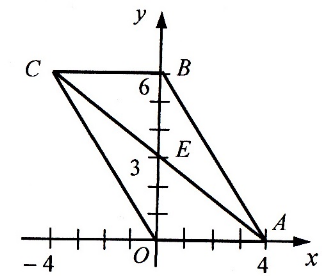


Рис. 3.8

Сторона паралелограма OA співпадає з віссю Ox, а діагональ OB – з віссю Oy. Отже, їх рівняння

$y = 0$ (OA) і $x = 0$ (OB).

Сторона CB паралельна осі Ox і відтинає на осі Oy відрізок, рівний 6 одиницям. Отже, її рівняння буде $y = 6$ (CB).

Діагональ AC і сторона AB відтинають на координатних осях відрізки, рівні $a = 4$, $b = 3$ і $a = 4$, $b = 6$ одиницям, підставляючи які в рівняння прямої в відрізках на осях (3.14), отримаємо

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1; \qquad \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1,$$

або в загальному вигляді $3x + 4y - 12 = 0$ (AC) і $3x + 2y - 12 = 0$ (AB).

Сторона OC проходить через початок координат і має рівняння $y = kx$, де кутовий коефіцієнт

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \angle COB\right) = -\operatorname{ctg}(\angle COB) = -\frac{OB}{CB} = -\frac{3}{2}.$$

З останньої рівності отримуємо $y = -\frac{3}{2}x$ або $3x + 2y = 0$ (OC).

2. Знайти рівняння прямої, яка утворює з віссю Ox кут 135° і перетинає вісь Oy в точці $C(0;5)$. З'ясувати, чи проходить ця пряма через точки $A(3;2)$ і $B(3;5)$. Побудувати пряму.

Розв'язок. З умови задачі випливає, що відрізок, який відтинає пряма на осі ординат $b = 5$, кутовий коефіцієнт $k = \operatorname{tg}135^\circ = -1$. Тоді за формулою (3.13) маємо

Приведемо рівняння прямої $2x-y-3=0$ до рівняння прямої з к… товим коефіцієнтом $y=2x-3$, Звідки кутовий коефіцієнт прямої $k=2$.

Якщо прямі паралельні, то їх кутові коефіцієнти рівні (3.20). Під… тавляючи в рівняння пучка прямих кутовий коефіцієнт $k=2$, знаходи… рівняння прямої, паралельної даній

$$y-4=2\cdot(x+3); \quad y-4=2x+6; \quad 2x-y+10=0.$$

Використовуючи умову перпендикулярності прямих (3.21), зна… димо кутовий коефіцієнт перпендикулярної прямої $k=-\frac{1}{2}$. Підставляю… цей коефіцієнт в рівняння пучка прямих, отримаємо рівняння прям… перпендикулярної даній

$$y-4=-\frac{1}{2}\cdot(x+3); \quad 2y-8=-x-3; \quad x+2y-5=0.$$

10. Написати рівняння прямої, паралельної прямим $2x+y-2=0$, $2x+y-5=0$, розташованої між ними і яка ділить відстань між ними… відношенні $1/5$.

Розв'язок. Візьмемо на першій прямій точку A, абсциса якої рів… наприклад, $x=0$. Тоді ордината точки A з рівняння прямої $y=2$.

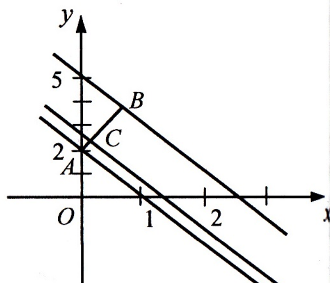


Рис. 3.14

Проведемо з цієї точки перпендикуляр до перетину з другою прямою в точці B (рис. 3.14).

Кутовий коефіцієнт прямих $k=-2$, отже, кутовий коефіцієнт перпендикуляра $k_{AB}=1/2$. Підставляючи його і координати точки A в рівняння пучка прямих (3.23), знаходимо рівняння перпендикуляра

$$y-2=\frac{1}{2}(x-0), \text{ або } \quad x-2y+4=0 \ (AB).$$

Розв'язуючи рівняння перпендикуляра спільно з рівнянням дру… прямої, знаходимо точку їх перетину:

$$\begin{cases} x-2y+4=0, \\ 2x+y-5=0. \end{cases} \qquad B\left(\frac{6}{5};\frac{13}{5}\right).$$

Нехай точка C ділить відрізок AB у відношенні $\lambda=1/5$, тоді, зг… но (3.4), її координати

$$x_C=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{0+\frac{1}{5}\cdot\frac{6}{5}}{1+\frac{1}{5}}=0{,}2; \qquad y_C=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{2+\frac{1}{5}\cdot\frac{13}{5}}{1+\frac{1}{5}}=2{,}1.$$

Підставляючи $k=-2$ (пряма паралельна заданим) і координати точки C в рівняння пучка прямих, знаходимо рівняння шуканої прямої

$$y-2{,}1=-2\cdot(x-0{,}2), \quad \text{або} \quad 4x+2y-5=0.$$

11. Визначити вершини і кути трикутника, сторони якого задані рівняннями $x-3y-3=0$; $7x-y+19=0$; $3x+y+1=0$.

Розв'язок. Координати вершин ΔABC є точками перетину прямих і знаходяться з спільного розв'язку систем рівнянь, які складаються з рівнянь прямих

$$\begin{cases} x-3y-3=0, \\ 7x-y+19=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=-3; \\ y=-2. \end{matrix} \qquad \begin{cases} x-3y-3=0, \\ 3x+y+1=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=0; \\ y=-1. \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 7x-y+19=0, \\ 3x+y+1=0. \end{cases} \quad \begin{matrix} x=-2; \\ y=5. \end{matrix}$$

Нехай розв'язок першої системи – це координати вершини $A(-3;-2)$, другої $B(0;-1)$, третьої $C(-2;5)$. З рис.3.15 видно, що прямій AB відповідає перше рівняння, прямій AC – друге, BC – третє.

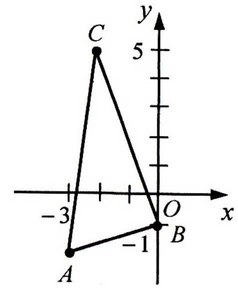


Рис. 3.15

Для визначення $\angle A$ скористаємося формулою (3.18), приймаючи за A_1, B_1 коефіцієнти в рівнянні прямої AB, а за A_2, B_2 – коефіцієнти в рівнянні прямої AC.

$$\operatorname{tg} A=\frac{1\cdot(-1)-7\cdot(-3)}{1\cdot7+(-3)\cdot(-1)}=\frac{20}{10}=2, \qquad \angle A=\operatorname{arctg}2\approx63^{\circ}30'.$$

Аналогічно,

$$\operatorname{tg} B=\frac{3\cdot(-3)-1\cdot1}{1\cdot3+(-3)\cdot1}=\infty, \quad \angle B=90^{\circ}.$$

Так як сума кутів в трикутнику дорівнює 180°, то

$$\angle C=180^{\circ}-63^{\circ}30'-90^{\circ}=26^{\circ}30'.$$

12. Знайти координати точок перетину медіан і висот трикутни вершини якого $A(3;0)$, $B(-1;-2)$, $C(1;2)$. Написати рівняння бісе риси внутрішнього кута B.

Розв'язок. Медіани перетинаються в одній точці, яка ділить їх у відношенні $1/2$ від протилежної сторони, яку вони ділять пополам.

Побудуємо ΔABC і проведемо медіану з точки C (рис.3.16). Координати точки D знайдемо, як координати середини відрізка AB:

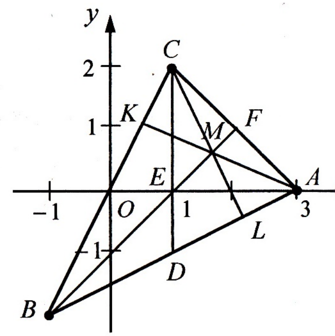


Рис. 3.16

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+(-1)}{2} = 1.$$

$$y_D = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+(-2)}{2} = -1.$$

Нехай всі медіани перетинаються в точці E. Так як відомі коор нати точок C і D, і відношення $\lambda = \dfrac{CE}{ED} = 2$, то можемо знайти коорди ти точки E перетину медіан BF і CD:

$$x_E = \frac{x_C + \lambda x_D}{1+\lambda} = \frac{1+2\cdot 1}{1+2} = 1; \quad y_E = \frac{y_C + \lambda y_D}{1+\lambda} = \frac{2+2\cdot(-1)}{1+2} = 0; \quad E(1;0).$$

Скориставшись рівнянням прямої, яка проходить через дві то (3.15), запишемо рівняння сторін AB і BC:

$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{x-x_A}{x_B-x_A}; \quad \frac{y-0}{-2-0} = \frac{x-3}{-1-3}; \quad \frac{y}{-2} = \frac{x-3}{-4}; \quad y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \ (AB$$

$$\frac{y-y_B}{y_C-y_B} = \frac{x-x_B}{x_C-x_B}; \quad \frac{y-(-2)}{2-(-2)} = \frac{x-(-1)}{1-(-1)}; \quad \frac{y+2}{4} = \frac{x+1}{2}; \quad y = 2x \ (BC$$

Кутові коефіцієнти перпендикулярів до цих сторін знаходимо формулами (3.21)

$$k_{CL} = -2; \quad k_{AK} = -\frac{1}{2}.$$

Підставляючи знайдені значення кутових коефіцієнтів і координ точок C і A в рівняння пучка прямих (3.23), знаходимо рівняння пер дикулярів до прямих AB і BC:

$$y - 2 = -2(x-1); \quad y-2 = -2x+2; \quad 2x + y - 4 = 0 \ (CL).$$

$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x-3); \quad y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}; \quad x + 2y - 3 = 0 \ (AK).$$

Розв'язуючи рівняння висот спільно, знаходимо координати точки M:

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0, \\ x + 2y - 3 = 0. \end{cases} \quad x_M = \frac{5}{3}; \quad y_M = \frac{2}{3}.$$

Запишемо рівняння сторін AB і BC в загальному вигляді:

$$y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}; \quad x - 2y - 3 = 0 \ (AB). \qquad y = 2x; \quad 2x - y = 0 \ (BC).$$

Рівняння бісектриси BF кута $\angle B$ знайдемо за формулою (3.26):

$$\frac{1\cdot x - 2\cdot y - 3}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = -\frac{2\cdot x - 1\cdot y + 0}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}; \quad (x-2y-3)\cdot\sqrt{5} = -(2x-y)\cdot\sqrt{5};$$

$$x - y - 1 = 0 \ (BF).$$

13. Скласти рівняння прямих, паралельних прямій $3x + 4y - 7 = 0$ і віддалених від точки $A(3;-1)$ на три одиниці.

Розв'язок. Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{7}{4}$, $k = -\dfrac{3}{4}$. Скориставшись рівнянням (3.23), проведемо через точку A пряму, паралельну даній прямій

$$y + 1 = -\frac{3}{4}(x-3); \quad 3x + 4y - 5 = 0. \qquad (1)$$

Нехай x, y поточні координати точки на шуканій прямій. Тоді відстань від цієї точки до прямої, яка проходить через точку A, знаходиться за формулою (3.25). Підставляючи в цю формулу значення $d = 3$ і коефіцієнти A, B, C прямої (1), знаходимо

$$d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \qquad 3 = \frac{|3x + 4y - 5|}{5},$$

Звідси, розкриваючи модуль, маємо:

$$15 = 3x + 4y - 5 \Rightarrow 3x + 4y - 20 = 0;$$

$$15 = -(3x + 4y - 5) \Rightarrow 3x + 4y + 10 = 0.$$

Отримано два рівняння прямих, які розташовані по різні сторони від точки A.

3.2.2. Завдання для самостійної роботи по розділу 3.2

1. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2;2$ утворює з віссю Ox кут 60°.

2. Знайти кутовий коефіцієнт прямої і відрізок, який вона відти на осі ординат, якщо відомо, що пряма проходить через точки $A(2;-1$ $B(-1;8)$.

3. Перевірити, чи лежать на одній прямій три дані точки:
а) $A(1;2)$, $B(2;4)$, $C(3;6)$; *б*) $D(2;3)$, $E(-2;1)$, $F(3;4)$.

4. Пряма перетинає вісь Ox в деякій точці C і проходить че точки $A(-2;5)$, $B(3;-3)$. Знайти координати точки C.

5. Побудувати область, координати точок якої задовольняю системі нерівностей
$$\begin{cases} 2x - y + 4 < 0; \\ x + 5 > 0; \\ x/5 + y/3 \le 1. \end{cases}$$

6. Знайти область, яка відповідає системі нерівностей:

а) $\begin{cases} x - 2y + 3 \ge 0, \\ x - 2y - 3 > 0. \end{cases}$ *б*) $\begin{cases} x - 2y + 3 \le 0, \\ x - 2y - 3 > 0. \end{cases}$

7. Знайти кут між прямими:

а) $y=-2x$, $y=3x+5$; *б*) $4x+2y-5=0$, $6x+3y+1=0$.

8. Знайти відстань від точки:

а) $A(-2;-3)$ до прямої $8x+15y+27=0$;

б) $B(2;5)$ до прямої $6x+8y-7$.

9. Дано трикутник з вершинами $A(4;6)$, $B(-3;0)$, $C(2;-$ Знайти рівняння бісектриси AD, висоти CE і точку їх перетину.

10. Пряма проходить через точку $M(2;3)$ паралельно пря $5x-2y+7=0$. Скласти її різні види: *а*) рівняння прямої з заданим ку вим коефіцієнтом; *б*) загальне рівняння прямої; *в*) рівняння прямої в різках на осях.

11. Через точку перетину прямих $2x-y+3=0$ і $x+y-2=0$ п вести пряму, перпендикулярну прямій $3x-4y-7=0$.

12. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку перет прямих $2x-3y+5=0$ і $3x+y-7=0$ і паралельна прямій $y=4x+1$

3.2.3. Розв'язок типового прикладу завдання 5 РГР

5. Задано координати вершин трикутника ABC: $A(-8;-3)$, $B(4;-12)$, $C(8;10)$. Знайти: 1) довжину сторони AB; 2) рівняння сторін AB і BC та їх кутові коефіцієнти; 3) кут B в градусах; 4) рівняння висоти CD і її довжину; 5) рівняння медіани AE і координати точки K, перетину цієї медіани з висотою CD; 6) рівняння прямої KF, яка проходить через точку K паралельно стороні AB.

Розв'язок. 1. Відстань d між точками $A(x_1,y_1)$ і $B(x_2,y_2)$ визначається за формулою (3.1):
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,.$$

У нашому випадку $A(-8;-3)$, $B(4;-12)$ і довжина сторони AB
$$AB=\sqrt{(4-(-8))^2+(-12-(-3))^2}=\sqrt{144+81}=15 \text{ (од. довжини).}$$

2. Запишемо рівняння прямої (3.15), яка проходить через точки $A(-8;-3)$ і $B(4;-12)$:
$$\frac{y-(-3)}{-12-(-3)}=\frac{x-(-8)}{4-(-8)}; \quad \frac{y+3}{-9}=\frac{x+8}{12}; \quad \frac{y+3}{-3}=\frac{x+8}{4};$$
$$4y+12=-3x-24; \quad 3x+4y+36=0. \quad (AB).$$

Розв'язавши останнє рівняння відносно y, знаходимо рівняння сторони AB у вигляді рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:
$$4y=-3x-36; \ y=-\frac{3}{4}x-9, \quad \text{звідки} \quad k_{AB}=-\frac{3}{4}=-0{,}75\,.$$

Підставивши в (3.15) координати точок B і C, отримаємо рівняння прямої BC:
$$\frac{y-(-12)}{10-(-12)}=\frac{x-4}{8-4}; \quad \frac{y+12}{22}=\frac{x-4}{4}; \quad \frac{y+12}{11}=\frac{x-4}{2};$$
$$2y+24=11x-44; \quad 11x-2y-68=0 \quad (BC).$$
$$2y=11x-68; \ y=\frac{11}{2}x-34, \quad \text{звідки} \quad k_{BC}=\frac{11}{2}=5{,}5\,.$$

3. Шуканий $\angle B$ утворюється прямими $3x+4y+36=0\ (AB)$ і $11x-2y-68=0\ (BC)$. Згідно (3.18), відраховуючи кут від L_2 до L_1 за годинниковою стрілкою, маємо: $A_1=11$, $B_1=-2$, $A_2=3$, $B_2=4$. Тоді

знаходимо:

$$\operatorname{tg} \angle B = \frac{11 \cdot 4 - 3 \cdot (-2)}{3 \cdot 11 + 4 \cdot (-2)} = \frac{50}{25} = 2; \quad \angle B \approx 1{,}11 \text{ рад, або } \angle B \approx 63^0 3 \text{[illegible]}$$

4. Висота CD перпендикулярна стороні AB. Щоб знайти її куто[illegible] коефіцієнт, скористаємося умовою перпендикулярності прямих (3.21)

$$k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-3/4} = \frac{4}{3}.$$

Підставивши в рівняння пучка прямих (3.23) координати точки [illegible] знайдений кутовий коефіцієнт, отримаємо рівняння висоти CD:

$$y - 10 = \frac{4}{3}(x - 8); \quad 3y - 30 = 4x - 32; \qquad 4x - 3y - 2 = 0 \quad (CD)\text{[illegible]}$$

Довжину висоти CD знайдемо, як відстань від точки $C(8;10)$ [illegible] прямої AB $3x + 4y + 36 = 0$ за формулою (3.25), де $x_0 = 8$, $y_0 = 10$, A[illegible] $B = 4$, $C = 36$:

$$d = \frac{|3 \cdot 8 + 4 \cdot 10 + 36|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{100}{5} = 20 \text{ (од. довжини).}$$

5. Щоб знайти рівняння медіани AE, визначимо спочатку коорди[illegible] ти точки E, яка є серединою сторони BC. Скориставшись формул[illegible] поділу відрізка на дві рівні частини (3.5), отримаємо

$$x_E = \frac{4+8}{2} = 6; \quad y_E = \frac{-12+10}{2} = -1; \qquad E(6; -1).$$

Підставивши в (3,15) координати точок A і E, знаходимо рівня[illegible] медіани:

$$\frac{y - (-3)}{-1 - (3)} = \frac{x - (-8)}{6 - (-8)}; \qquad \frac{y+3}{2} = \frac{x+8}{14}; \qquad \frac{y+3}{1} = \frac{x+8}{7};$$

$$x - 7y - 13 = 0 \quad (AE).$$

Координати точки K перетину висоти $4x - 3y - 2 = 0$ (CD) і [illegible] діани $x - 7y - 13 = 0$ AE, знайдемо за формулою (3.22), вважаючи, [illegible] в даному випадку $A_1 = 4$, $B_1 = -3$, $C_1 = -2$; $A_2 = 1$, $B_2 = -7$, $C_2 = -$[illegible]

$$x = \frac{-13 \cdot (-3) - (-2) \cdot (-7)}{4 \cdot (-7) - 1 \cdot (-3)} = \frac{25}{-25} = -1; \quad y = \frac{1 \cdot (-2) - 4 \cdot (-13)}{4 \cdot (-7) - 1 \cdot (-3)} = \frac{50}{-25} = \text{[illegible]}$$

тобто $K(-1; -2)$.

[illegible] як, шукана пряма паралельна стороні AB, то її кутовий кое[illegible] [illegible] дорівнює кутовому коефіцієнту прямої AB. Підставивши в (3.23) [illegible] знайденої точки K і кутовий коефіцієнт $k_{AB} = -3/4$, отрима-[illegible]

$$\text{[illegible]} = -\frac{3}{4}(x - (-1)); \quad 4y + 8 = -3x - 3; \quad 3x + 4y + 11 = 0 \quad (KF).$$

[illegible] кутник ABC, висота CD, медіана AE, пряма KF побудовані в [illegible] координат xOy на рис.3.17.

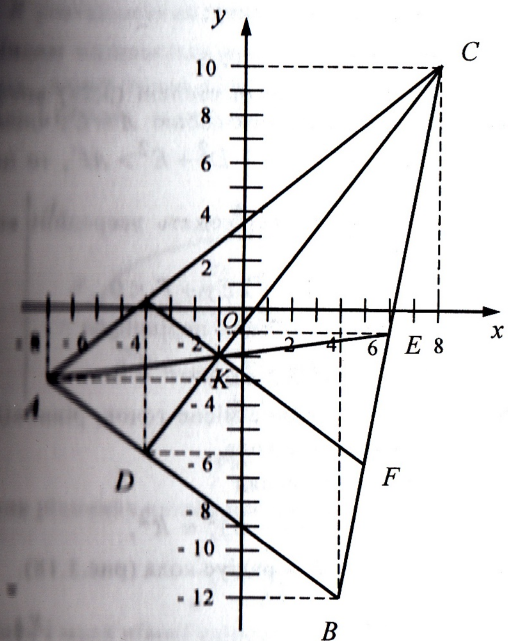


Рис. 3.17

Відповідь: 1) $AB = 15$ од. довжини; 2) $3x + 4y + 36 = 0$ (AB), [illegible] $= 0{,}75$; $11x - 2y - 68 = 0$ (BC), $k_{BC} = 5{,}5$; 3) $\angle B \approx 63^\circ 30'$; [illegible] $4x - 3y - 2 = 0$ (CD), $CD = 20$ од. довжини; 5) $x - 7y - 13 = 0$ (AE); [illegible] $(-1; -2)$; 6) $3x + 4y + 11 = 0$ (KF).

3.3. Криві другого порядку в прямокутній декартовій систе[illegible] координат

Кривими другого порядку називаються криві, рівняння яких в п[illegible]мокутних координатах задаються рівняннями другої степені з дв[illegible] невідомими

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0. \qquad (3.28)$$

Існує три таких типи кривих: якщо

1) $A\cdot C-B^2>0$, крива еліптичного типу;

2) $A\cdot C-B^2<0$ – гіперболічного типу;

3) $A\cdot C-B^2=0$ – параболічного типу.

Якщо в загальному рівнянні другої степені (3.28) коефіцієнти [illegible] квадратах поточних координат рівні між собою $A=C$, член з добутк[illegible] поточних координат відсутній $B=0$ і $D^2+E^2>AF$, то це рівнянн[illegible] рівнянням кола.

Координати точок при $A>0$, які лежать всередині кола визна[illegible]ються нерівністю

$$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F<0, \qquad (3.29)$$

координати точок, які лежать зовні кола, – нерівністю

$$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F>0. \qquad (3.30)$$

1°. ***Колом*** називають геометричне місце точок, рівновіддалених [illegible] даної точки, яка називається центром кола.

Канонічне рівняння кола має вигляд

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2, \qquad (3.31)$$

де $(a;b)$ – координати її центра, R – радіус кола (рис.3.18).

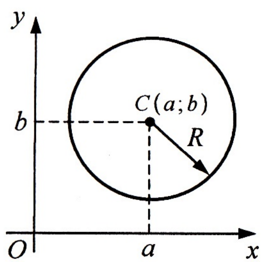


Рис. 3.18

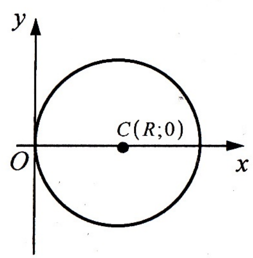


Рис. 3.19

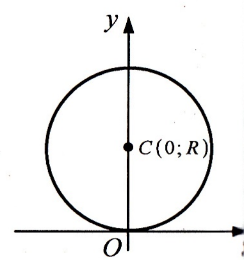


Рис. 3.20.

[illegible] випадки рівняння кола:

[illegible] $b=0$; $a=R$, то $x^2+y^2=2Rx$. Центр кола розташований [illegible] R від початку координат в додатному напряму по осі Ox [illegible]

[illegible] $a=0$; $b=R$, то $x^2+y^2=2Ry$. Центр кола розташований [illegible] R від початку координат в додатному напряму по осі Oy [illegible]

[illegible] $a=b=0$, то $x^2+y^2=R^2$ – канонічне рівняння кола. Центр [illegible] R розташований в початку координат.

[illegible] називається геометричне місце точок, сума відстаней [illegible] двох даних точок цієї площини, які називаються фокусами, є [illegible] стала і більша відстані між фокусами $r_1+r_2=2a$, a – const [illegible]

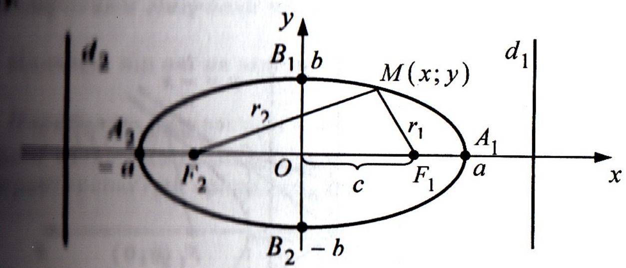


Рис. 3.21

[illegible] рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (3.32)$$

[illegible] a, b – велика і мала півосі еліпса.

[illegible] $a>b$, то фокуси еліпса розташовані на осі Ox, їх координати $F_1(c;0)$; $F_2(-c;0)$ і фокусна відстань зв'язана з півосями еліпса спів[illegible]

$$c^2=a^2-b^2. \qquad (3.33)$$

[illegible] перетинає вісь Ox в точках $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, вісь Oy в [illegible] $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$. Ці точки називаються ***вершинами еліпса.*** [illegible] $A_1A_2=2a$ і $B_1B_2=2b$ називаються відповідно ***великою і*** [illegible] ***осями еліпса.***

Міра відхилення еліпса від кола характеризується величиною ε, [illegible] називається ***ексцентриситетом еліпса*** і дорівнює відношенню йо[illegible] фокусної відстані до довжини великої півосі

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \qquad (3.34)$$

Оскільки у еліпса $c < a$, то ексцентриситет еліпса $\varepsilon < 1$. Чим менше значення ε, тим ближче еліпс за формою до кола.

Директрисами еліпса називаються прямі d_1, d_2, які паралел[illegible] його малій осі і віддалені від неї на відстані $d = \pm \frac{a}{\varepsilon}$.

3°. ***Гіперболою*** називається геометричне місце точок, абсолют[illegible] величина різниці відстаней яких до двох даних точок площини, що на[illegible]ваються фокусами, є величина стала і менша відстані між фокуса[illegible] $r_1 - r_2 = 2a$, a – const (рис. 3.22).

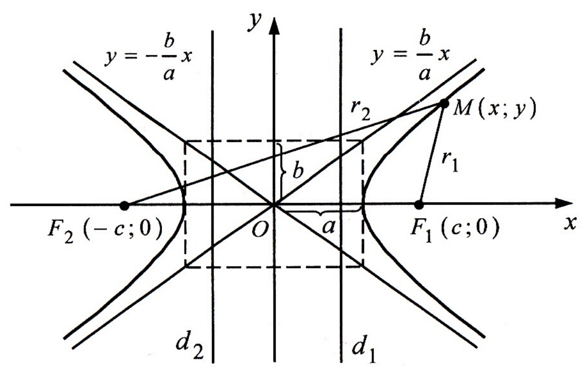


Рис. 3.22

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (3.35)$$

де a – дійсна півось; b – уявна півось гіперболи.

Точка M рухаючись по гіперболі, нескінченно віддаляючись від [illegible]ршини, необмежено наближається до однієї з прямих, які проходять че[illegible] центр симетрії, і називаються ***асимптотами гіперболи.***

Рівняння асимптот гіперболи

$$y = \pm \frac{b}{a}x. \qquad (3.36)$$

[illegible] фокуси гіперболи розташовані на осі Ox, то їх координати [illegible] $F_2(-c;0)$, і фокусна відстань зв'язана з дійсною a і уявною [illegible] співвідношенням

$$c^2 = a^2 + b^2. \qquad (3.37)$$

[illegible] перетинає вісь x в точках $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$. Ці точки [illegible] ***вершинами гіперболи.***

[illegible] ***гіперболи*** ε називається відношення фокусної [illegible] гіперболи до її дійсної півосі

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \qquad (3.38)$$

[illegible] у гіперболи $a < c$, то ексцентриситет гіперболи $\varepsilon > 1$.

[illegible] гіперболи називаються прямі d_1, d_2, паралельні уя[illegible] осі і віддалені від неї на відстані $d = \pm \frac{a}{\varepsilon}$.

4°. ***Параболою*** називається геометричне місце точок, рівновіддале[illegible] від даної точки, яка називається фокусом і від даної прямої, яка нази[illegible] директрисою і не проходить через фокус (рис. 3.23).

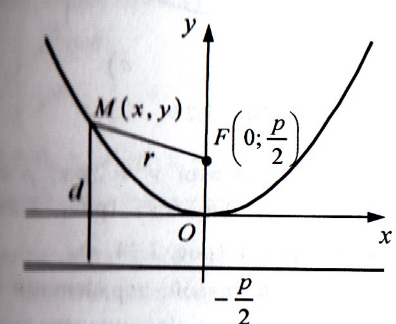


Рис. 3.23.

[illegible] рівняння параболи, віссю симетрії якої є вісь Oy а [illegible] співпадає з початком координат, має вигляд:

$$x^2 = 2py, \qquad (3.39)$$

[illegible] p – параметр параболи, рівній відстані від фокуса до директриси.

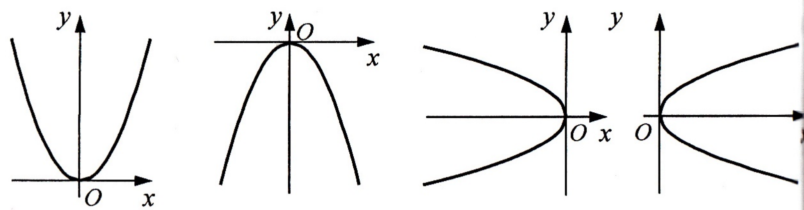
Фокальний радіус довільної точки параболи $M(x;y)$ обчислюєт[ься]
за формулою

$$r = y + \frac{p}{2}. \qquad (3.40)$$

У параболи один фокус $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, отже, і одна директр[иса]
$x = -p/2$.

Ексцентриситет параболи дорівнює відношенню відстані дові[ль]ної її точки до фокуса та до відповідної директриси. На підставі виз[на]чення, ексцентриситет параболи дорівнює одиниці $\varepsilon = 1$.

Рівняння $x^2 = 2py$, $p > 0$, є канонічним рівнянням параболи з в[іт]ками, що направлені вгору (рис. 3.24, *а*), а рівняння $x^2 = -2py$, $p>0$ [є] рівнянням параболи, з вітками, що направлені вниз (рис. 3.24, *б*).



а) *б*) *в*) *г*)

Рис. 3.24

Парабола, канонічне рівняння якої $y^2 = 2px$, $p > 0$, симетрична [відносно осі] Ox і розташована справа від осі Oy, (рис. 3.24, *г*), а параб[ола] $y^2 = -2px$, $p>0$ – зліва від осі Oy (рис. 3.24, *в*).

Якщо парабола симетрична прямій, паралельній осі Oy, а коор[ди]нати вершини параболи $C(x_C;y_C)$, то рівняння має вигляд:

$$(x - x_C)^2 = 2p(y - y_C). \qquad (3.41)$$

Якщо парабола симетрична прямій, паралельній осі Ox, а коор[ди]нати вершини параболи $C(x_C;y_C)$, то рівняння має вигляд:

$$(y - y_C)^2 = 2p(x - x_C). \qquad (3.42)$$

[illegible] Розв'язок типових прикладів самостійної роботи по ро-
[illegible]

[illegible] належать точки $A(0;4)$ і $B(1;-2)$ лінії $y = \frac{3x^2-4}{2x-1}$?

[illegible]. Якщо точка належить даній лінії, то її координати задо[illegible] рівнянню цієї лінії. Підставляємо в рівняння заданої лінії [illegible] координат x, y координати точки A. Отримаємо:

$$4 = \frac{3\cdot 0^2-4}{2\cdot 0-1} = 4.$$

[illegible] виконується, отже точка A належить даній лінії.
[illegible] координати точки B в рівняння лінії, отримуємо:

$$-2 \ne \frac{3\cdot 1^2-4}{2\cdot 1-1} = -1.$$

[illegible], точка B не належить даній лінії.

[illegible] точки перетину парабол $y^2 = 4x$; $y = \frac{1}{4}x^2$.

[illegible]. Так як точка перетину належить обом лініям, то її коор[illegible] кожному з цих рівнянь. Це означає, що координати [illegible] є розв'язком системи

$$\begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = \frac{1}{4}x^2, \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = 4x, \\ y^2 = \frac{1}{16}x^4, \end{cases} \quad 4x = \frac{1}{16}x^4, \quad x\left(1 - \frac{1}{64}x^3\right) = 0,$$

[illegible] $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ і $y_1 = 0$, $y_2 = 4$.

[illegible], задані параболи перетинаються в точках $O(0;0)$ і $A(4;4)$.

[illegible] рівняння двох ліній: $(x-3)^2 + y^2 = 1$ – кола і $x + y = 0$ – [illegible]. Знайти точки їх перетину.

[illegible]. Для знаходження точок перетину даних ліній необхідно [illegible] рівняння спільно. Перетворимо рівняння прямої $y = -x$ і пі[illegible] перше рівняння

$$(x-3)^2 + (-x)^2 = 1; \quad x^2 - 6x + 9 + x^2 = 1; \quad x^2 - 3x + 4 = 0.$$

[illegible] останні рівняння, знаходимо

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 4} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{-7}}{2}.$$

Оскільки $\sqrt{-7}$ є уявне число, то система не має дійсних розв'я[illegible] отже, дані лінії не перетинаються.

4. Знайти рівняння траєкторії точки M, яка в кожний момент ру[illegible] знаходиться вдвічі ближче до точці $A(1;1)$, ніж до точці $B(7;-2)$.

Розв'язок. Позначимо через $(x;y)$ координати точки M. Тоді

$$AM=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\ ;\quad BM=\sqrt{(x-7)^2+(y+2)^2}\ .$$

За умовою задачі $2AM=BM$, тобто:

$$4\left[(x-1)^2+(y-1)^2\right]=(x-7)^2+(y+2)^2.$$

Розкриваючи дужки і спрощуючи, отримаємо

$$(x+1)^2+(y-2)^2=20,$$

тобто траєкторією точки M є коло з центром в точці $O(-1;2)$ і радіу[illegible] $R=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

5. Скласти рівняння кола, яке проходить через три задані то[illegible] $A(1;1)$; $B(0;2)$ і $C(2;-2)$.

Розв'язок. Рівняння шуканого кола має три невідомих параметр[illegible] b і R, які слід визначити. Підставляючи координати точок A, B і [illegible] рівняння кола (3.29), отримаємо систему трьох рівнянь відносно неві[illegible]мих a, b, R:

$$\begin{cases}(1-a)^2+(1-b)^2=R^2;\\(0-a)^2+(2-b)^2=R^2;\\(2-a)^2+(-2-b)^2=R^2.\end{cases}$$

Віднімемо з останнього рівняння спочатку перше, потом – дру[illegible] рівняння. Отримаємо:

$$4-4a+a^2+4+4b+b^2-1+2a-a^2-1+2b-b^2=0;$$

$$-2a+6b+6=0;\quad 2a-6b=6.$$

$$4-4a+a^2+4+4b+b^2-a^2-4+4b-b^2=0;$$

$$-4a+8b+4=0;\quad 4a-8b=4;\quad a-2b=1.$$

Розв'язуючи отримані рівняння, знаходимо $a=-3$, $b=-2$, $R^2=$[illegible]

Отже, рівняння шуканого кола має вигляд:

$$(x+3)^2+(y+2)^2=25\ .$$

[illegible]стані від одного з фокусів еліпса до кінців його великої осі ві-[illegible] рівні $AF_1=8$ і $BF_1=2$. Скласти канонічне рівняння еліпса.

[illegible]в'язок. Оскільки $OA=OB=a$, $OF_1=c$, то дані відстані зв'язані [illegible]ннями:

$$[illegible]OA+OF_1=a+c=8;$$

$$[illegible]OB-OF_1=a-c=2.$$

[illegible] рівностей знаходимо [illegible]. Так як $b^2=a^2-c^2$, [illegible] $=9=16$, отже рів-[illegible] шуканого еліпса

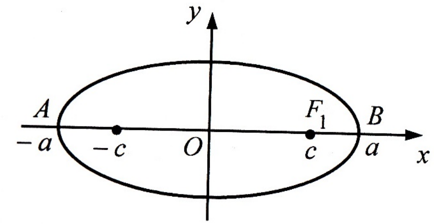


Рис. 3.25

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

[illegible] Гіпербола проходить через точку $M\left(12,3\sqrt{3}\right)$ і має асимптоти [illegible]. Скласти рівняння гіперболи.

[illegible]в'язок. Запишемо рівняння [illegible] гіперболи в загальному виді:

[illegible], тоді $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$.

[illegible] $b=\gamma$ і $a=2\gamma$, [illegible] γ – коефіцієнт пропорційності [illegible]

[illegible] точка M належить [illegible], то підставляючи її коор-[illegible] і значення a і b в канонічне рівняння (3.35), отримаємо

[illegible] $=1$, звідки $\gamma^2=9$, $\gamma=3$, отже, $a=6$, $b=3$.

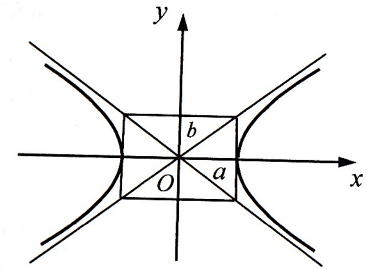


Рис.3.26

[illegible] гіперболи приймає вид:

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1.$$

8. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать у вершинах е

са $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$, а директриси проходять через фокуси цього еліпса.

Розв'язок. За умовою задачі: велика півось еліпса $OF=10$.

Згідно (3.33), $OA^2=100-64=36$, $0A=6$.

Для гіперболи, згідно (3.37) $c^2=a^2+b^2=100$, а згідно (3.38)

$d=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}=\pm 6$, і $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{10}{a}$.

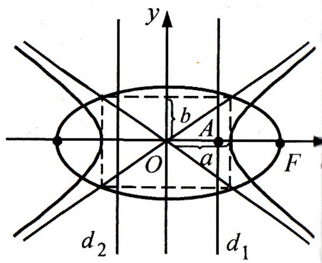


Рис. 3.27

З двох останніх рівностей, знаходимо

$$\frac{a}{\varepsilon}=6 \;\Rightarrow\; a=6\varepsilon; \qquad \varepsilon=\frac{10}{a} \;\Rightarrow\; a=\frac{10}{\varepsilon}.$$

Значить,

$$6\varepsilon=\frac{10}{\varepsilon};\quad 6\varepsilon^2=10;\quad \varepsilon=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}} \;\Rightarrow\; a=6\varepsilon=6\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}}=\sqrt{60};\quad a^2=6$$

Оскільки $a^2+b^2=100$, то $b^2=100-a^2=100-60=40$.

Значить, шукане рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{60}-\frac{y^2}{40}=1.$$

9. Для параболи $x^2=2py$ знайти довжину хорди, яка перпенди лярна до осі Oy і проходить через фокус.

Розв'язок. Фокус параболи має координати $F\left(0;\dfrac{p}{2}\right)$. Нехай то

M має координати $M\left(x;\dfrac{p}{2}\right)$ і належить параболі (рис.3.28). Тоді $x^2=2p\cdot\dfrac{p}{2}$, або $x_M=p \;\Rightarrow\; M\left(p;\dfrac{p}{2}\right)$.

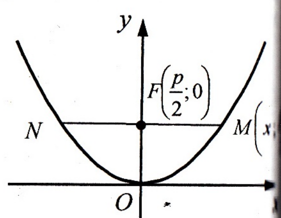


Рис.3.28

Значить, довжина половини шуканої хорди дорівнює p, отже, $MN=2p$.

[illegible] для самостійної роботи по розділу 3.3

[illegible] виконуючи побудови, встановити, як розташовані відносно [illegible] $+8x-4y-29=0$ точки: $A(4;3)$; $B(-1;2)$; $C(4;9)$.

[illegible] рівняння кола, якщо відомо, що кінці одного з її діаметрів [illegible] $A(2;-4)$ і $B(-6;2)$.

[illegible] рівняння кола з центром в точці $C(-2;3)$ і яке торка- [illegible] $-3y+2=0$.

[illegible] рівняння кола, яке проходить через точку $A(7;9)$ і тор- [illegible] в точці $B(4;0)$.

[illegible] канонічне рівняння еліпса, якщо він проходить через точ- [illegible] і $N(-2\sqrt{3};1)$, а його осі симетрії співпадають з осями ко- [illegible]. Знайти координати вершин і фокусів, обчислити ексцентриси- [illegible] рівняння директрис.

6. Визначити, яка крива задана рівнянням $3x^2+4y^2=12$. Знайти [illegible] параметри кривої: координати вершин, фокусів, ексцентриситет і [illegible] директрис.

7. Визначити канонічне рівняння гіперболи, у якої уявна півось [illegible], а ексцентриситет $\varepsilon=5/4$. Написати рівняння асимптот і дирек- [illegible]

8. Написати канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на [illegible] симетрично відносно початку координат, якщо її ексцентриси- [illegible], а відстань між директрисами дорівнює $8/3$.

9. Знайти рівняння параболи, симетричної відносно осі ординат, як- [illegible], що парабола проходить через точки $M(-3;6)$ і $N(2;-4)$.

10. Написати рівняння параболи, якщо відомо, що вісь її симетрії [illegible] з віссю Ox, вершина – з початком координат, і відстань від [illegible] до фокуса дорівнює 5.

3.3.3. Розв'язок типових прикладів завдань 6, 7 РГР

1. Привести до канонічного виду рівняння ко $x^2+y^2+6x-4y+9=0$. Знайти координати його центра і радіус. По дувати коло.

Розв'язок. Приведемо рівняння кола до канонічного виду: додам віднімемо з нього квадрати половин коефіцієнтів при невідомих x і y, тобто $(6/2)^2=9$ і $(-4/2)^2=4$, а потім виділимо повні квадрати

$$(x^2+6x+9)+(y^2-4y+4)-9-4+9=0;$$

$$(x+3)^2+(y-2)^2=4 \quad \Rightarrow$$

$$(x+3)^2+(y-2)^2=2^2,$$

Отже, центр кола знаходиться в точці $C(-3;2)$, а радіус $R=2$.

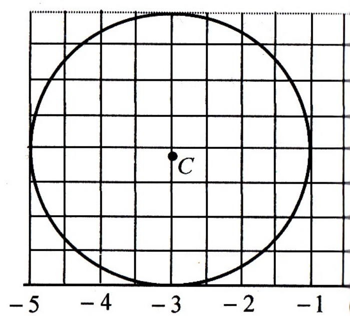


Рис. 3.29

Відповідь: $(x+3)^2+(y-2)^2=4$.

2. Привести до канонічного виду рівняння ко $4x^2+4y^2-8x+4y-11=0$. Знайти координати його центра і раді Побудувати коло.

Розв'язок. Розділимо всі члени заданого рівняння на коефіцієнт при x^2 або y^2 (так як вони однакові). Отримаємо

$$x^2+y^2-2x+y-\frac{11}{4}=0.$$

Потім в лівій частині рівняння додамо і віднімемо квадрати половин коефіцієнтів при x і y:

$$(x^2-2x+1)+(y^2+y+\frac{1}{4})-1-\frac{1}{4}-\frac{11}{4}=0,$$

звідки $(x-1)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=2^2$.

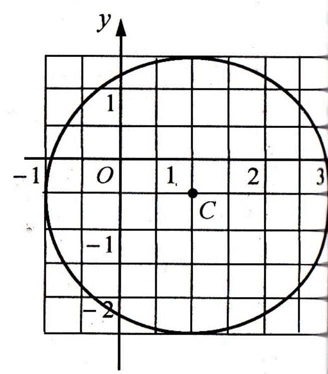


Рис. 3.30

Отже, координати центра кола $C\ (1;-0{,}5)$, а радіус $R=2$.

Відповідь: $(x-1)^2+(y+0{,}5)^2=2^2$.

3. Скласти рівняння геометричного місця точок, відношення відстаней яких до точки $A(3;\ 0)$ та до прямої $x=6$ дорівнює числу $\varepsilon=1/\sqrt{2}$. Отримане рівняння привести до канонічного виду. Знайти півосі a і b, координати фокусів F_1, F_2 і побудувати криву.

Розв'язок. Побудуємо точку $A(3;0)$ і пряму $x=6$. Нехай $M(x;y)$ довільна точка шуканого геометричного місця точок. Опустимо перпендикуляр на прямую $x=6$ і визначимо координати точки B. Так як точка B лежить на вказаній прямій, то її абсциса дорівнює 6, а ордината – ординаті точки M (рис. 3.10). За умовою задачі $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$$MA=\sqrt{(3-x)^2+y^2}; \quad MB=6-x \quad \Rightarrow \quad \frac{MA}{MB}=\frac{\sqrt{(3-x)^2+y^2}}{6-x}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Піднесемо обидві частини останньої рівності в квадрат і виконаємо перетворення:

$$\frac{(3-x)^2+y^2}{(6-x)^2}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2\left(9-6x+x^2+y^2\right)=36-12x+x^2 \quad \Rightarrow$$

$$x^2+2y^2=18 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$$ – канонічне рівняння еліпса.

$$a=\sqrt{18}=4{,}42; \ b=\sqrt{9}=3; \quad c^2=a^2-b^2 \ \Rightarrow \ c=3 \ \Rightarrow \ F_{1,2}=(\pm3;0).$$

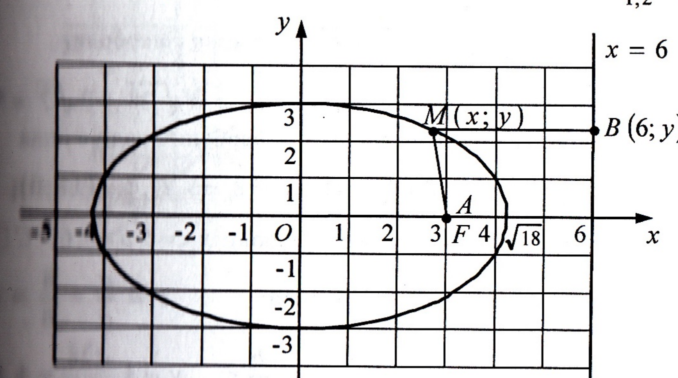


Рис. 3.31

Відповідь: Еліпс $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$; $a=\sqrt{18}\approx4{,}42$, $b=3$; $F_{1,2}=(\pm3;0)$.

4. Скласти канонічне рівняння геометричного місця точок, від[...]
шення відстаней яких до точки $A(8,0)$ та до прямої $x=4,5$ дорів[...]
$\lambda = 4/3$. Знайти координати фокусів F, вершин C; ексцентриситет [...]
рівняння асимптот кривої. Визначити точки перетину кривої з ко[...]
центр якого знаходиться в початку координат, а коло проходить чер[...]
фокуси. Побудувати асимптоти, криву і коло.

Розв'язок. 1) Побудуємо точку $A(8;0)$ і пряму $x=4,5$. Не[...] $M(x;y)$ довільна точка шуканого геометричного місця точок (рис.3.11).

З'єднаємо точки A і M, а потім проведемо перпендикуляр MB [...] прямої $x=4,5$. Так як точка B лежить на вказаній прямій, то її абсц[...] $x_B = 4,5$, а ордината дорівнює ординаті точки M, тобто $y_B = y_M$.

За умовою задачі $AM/MB = 4/3$.

Отримуємо:

$$AM = \sqrt{(8-x)^2 + y^2}; \quad MB = x - 4,5 \;\Rightarrow\; \frac{AM}{MB} = \frac{\sqrt{(8-x)^2+y^2}}{x-4,5} = \ldots$$

Підведемо обидві частини отриманої рівності в квадрат і викона[...] перетворення:

$$\frac{(8-x)^2+y^2}{(x-4,5)^2} = \frac{16}{9} \;\Rightarrow\; 9\left(64 - 16x + x^2 + y^2\right) = 16\left(x^2 - 9x + 20,25\right)$$

$$9x^2 - 144x + 576 + 9y^2 = 16x^2 - 144x + 324 \;\Rightarrow\; 7x^2 - 9y^2 = 252$$

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{28} = 1$$ – канонічне рівняння гіперболи.

Значить, півосі гіперболи: $a = \sqrt{36} = 6$; $b = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \approx 5,29$

Знайдемо координати фокусів $F_{1,2}$ гіперболи і радіус кола

$$c^2 = a^2 + b^2 \;\Rightarrow\; c^2 = 36 + 28 = 64 \;\Rightarrow\; c = 8 \;\Rightarrow\; F_{1,2} = (\pm 8; 0); \quad R = \ldots$$

Визначимо координати вершин гіперболи $x_C = \pm a = \pm 6$; $C(\pm 6; \ldots$

Обчислимо ексцентриситет гіперболи: $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{8}{6} = 1,33$

Знайдемо рівняння асимптот $y = \pm \dfrac{b}{a} x$; $y = \pm \dfrac{\sqrt{28}}{6} = \pm\, 0,88 \ldots$

Запишемо рівняння кола $x^2 + y^2 = 8^2$.

Для знаходження точок перетину кола з гіперболою розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 64; \\ \dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{28} = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 64; \\ 28x^2 - 36y^2 = 1008; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 64; \\ 7x^2 - 9y^2 = 252; \end{cases} \Bigg| {*}(9) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 9x^2 + 9y^2 = 576; \\ 7x^2 - 9y^2 = 252 \end{cases} \Rightarrow 16x^2 = 828 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{828}{16}} = \pm\sqrt{51,75} = \pm 7,2.$$

Підставляючи отримане значення x в рівняння кола, знаходимо:

$$51,75 + y^2 = 64 \;\Rightarrow\; y^2 = 12,25 \;\Rightarrow\; y_{1,2} = \pm\sqrt{12,25} = \pm 3,5.$$

Побудуємо коло і гіперболу

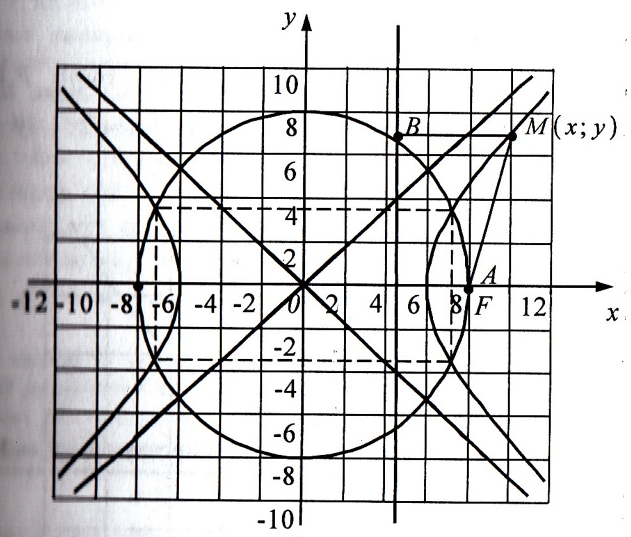


Рис. 3.32

Відповідь: Гіпербола $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{28} = 1$; $a = 6$, $b \approx 5,29$; $F_{1,2} = (\pm 8; 0)$;

$C(\pm 6; 0)$; $\varepsilon = 1,33$; $y = \pm\, 0,88x$; $x_{1,2} = \pm 7,2$, $y_{1,2} = \pm 3,5$.

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad (3.45)$$

Проекції довільного відрізка на координатні осі виражаються через його довжину і полярний кут за формулами:

$$x_2 - x_1 = d\cos\varphi, \qquad y_2 - y_1 = d\sin\varphi. \qquad (3.46)$$

Полярний кут відрізка по координатам його кінця і початку визначаються за формулою:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (3.47)$$

2°. Розглянемо деякі лінії, рівняння яких задані в полярній системі координат.

1. $\rho = R$, $\varphi \in [0; 2\pi]$ – ***коло*** з центром в полюсі і радіусом, рівним R.

2. Криву, що описується точкою M кола з радіусом r, яке котиться без ковзання ззовні по колу рівного радіуса, називають ***кардіоїдою.***

Рівняння кардіоїди в полярній системі координат має вид (рис. 3.35)

$$\rho = 2r(1+\cos\varphi). \qquad (3.48)$$

$\rho = 2r(1+\cos\varphi)$

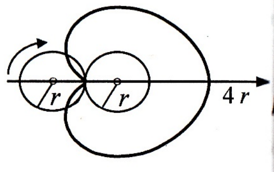


Рис. 3.35

Відмітимо, що назва кривої пов'язана з тим, що її форма нагадує серце.

3. ***Спіраль Архімеда*** – це траєкторія точки, що рівномірно рухається (з швидкістю ϑ) вздовж прямої, яка рівномірно обертається (з кутовою швидкістю ω) навколо заданої точки – полюса.

Її рівняння в полярних координатах (рис. 3.36)

$$\rho = a\varphi, \qquad (3.49)$$

де $a = \vartheta/\omega$ – параметр спіралі.

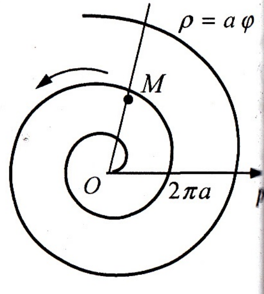


Рис. 3.36

4. ***Чотирьохпелюсткова роза*** утворюється множиною основ перпендикулярів, опущених з вершини O прямого кута на відрізок сталої довжини, кінці якого ковзають по сторонах цього прямого кута (рис. 3.37).

Рівняння цієї кривої в полярних координатах

$$\rho = r\sin 2\varphi, \qquad (3.50)$$

де r – радіус кола, в яке «вписано» розу.

$\rho = r\sin 2\varphi$

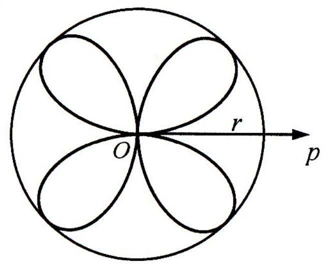


Рис. 3.37

Зауважимо, що рівняння $\rho = r\sin k\varphi$ визначає ***k – пелюсткову розу***, причому роза має k пелюсток, якщо k – непарне число, і $2k$ пелюсток, якщо k – парне. Крім того роза повністю розміщується всередині кола радіуса r.

5. ***Лемніската Бернуллі*** утворюється множиною всіх точок площини, для кожної з яких добуток відстаней до двох заданих точок F_1 і F_2, є величиною сталою і дорівнює квадрату половини відстані між цими точками (рис. 3.38).

Рівняння лемніскати в полярних координатах має вигляд

$$\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi. \qquad (3.51)$$

$\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$

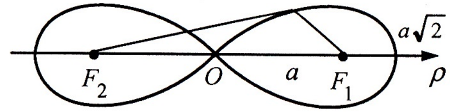


Рис. 3.38

3°. Наведемо приклади деяких ліній, рівняння яких задані параметрично.

Рівняння $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, де t – параметр, називаються параметричними рівняннями кривої. Для того, щоб отримати рівняння кривої в прямокутних координатах, з двох параметричних рівнянь необхідно виключити параметр t.

1. Параметричні рівняння кола

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ t\in[0; 2\pi]. \qquad (3.52)$$

2. Параметричні рівняння еліпса

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ t\in[0; 2\pi]. \qquad (3.53)$$

В параметричних рівняннях еліпса параметр t є кутом, який утворює відрізок OM з віссю абсцис (рис. 3.39).

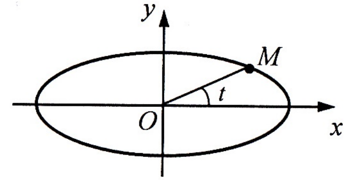


Рис. 3.39

2. Привести рівняння кривої $x^2 - 8x - 4y + 28 = 0$ до канонічн
вигляду. Знайти параметр p кривої, координати вершини C, фокуса
рівняння директриси. Побудувати криву і її директрису.

Розв'язок. Додамо і віднімемо в лівій частині рівняння квад
половини коефіцієнта перед x і перетворимо отримане рівняння

$$\left(x^2 - 8x + 16\right) - 4y - 16 + 28 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-4)^2 = 4y - 12 \quad \Rightarrow$$

$$(x-4)^2 = 4(y-3).$$

Порівнюючи отримане рівняння з канонічним рівнянням параб
(3.41)

$$(x - x_C)^2 = 2p(y - y_C),$$

знаходимо:

$$p = 2; \quad x_C = 4; \quad y_C = 3.$$

Координати фокуса визначаються, як

$$x_F = x_C = 4; \quad y_F = \left(y_C + p/2\right) = 3 + 1 = 4, \quad \text{тобто} \quad F(4;4).$$

Рівняння директриси $y = \left(y_C - p/2\right) = 3 - 1 = 2; \quad y = 2.$

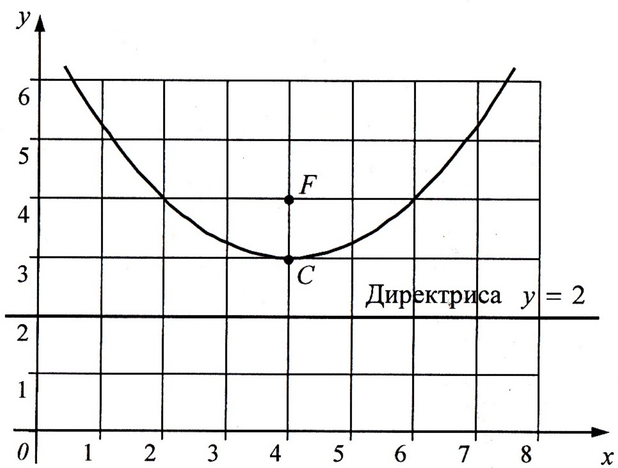


Рис. 3.33

Відповідь: Парабола, $p = 2$; $x_C = 4$, $y_C = 3$; $F(4;4)$;
няння директриси $y = 2$.

3.4. Криві другого порядку в полярній системі координат. Параметричні рівняння плоских кривих

На практиці часто доводиться мати справу з кривими на площині, які не є кривими другого порядку, зокрема з кривими третього, четвертого і вищих порядків. Найчастіше вони описують деякі траєкторії руху точок, які задовольняють певним умовам. У більшості випадків рівняння кривих вищих порядків можна записати в полярних координатах або в параметричному вигляді, що істотно спрощує вид рівнянь і побудову графіків.

Для побудови кривих в полярній системі координат задають певні значення φ і знаходять відповідні значення ρ. Для зручності результати обчислень заносять в таблицю. Побудувавши відповідні точки, і сполучивши їх, отримують графік кривої.

1⁰. Полярна система координат

Якщо на площині зафіксувати точку O (полюс) і промінь Op (полярну вісь), то отримаємо ***полярну систему координат***, в якій положення довільної точки M площини визначається її відстанню $\rho \in [0;\infty)$ від точки O, а також кутом $\varphi \in [0;2\pi)$, який утворює промінь OM з полярною віссю Op.

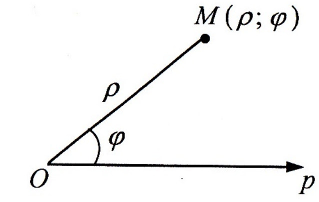


Рис. 3.34

При цьому кут φ отримують поворотом полярній осі проти годинникової стрілки до збігу з променем OM.

Числа ρ і φ називають ***полярними координатами*** точки $M(\rho;\varphi)$ (рис. 3.34).

Якщо полюс O полярної системи координат збігається з початком прямокутної декартової системи координат, а полярна вісь – з додатним напрямом осі абсцис, то прямокутні координати x, y точки M виражаються через полярні координати ρ, φ за формулами

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi. \tag{3.43}$$

Полярні координати виражаються через прямокутні за формулами

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \tag{3.44}$$

Другу з формул (3.44) іноді зручно замінити двома наступними формулами:

3. ***Астроїда*** – це траєкторія фіксованої точки кола радіуса r, яка котиться без ковзання по внутрішній стороні кола радіуса $R = 4r$ (рис. 3.40).

Параметричні рівняння астроїди мають вигляд:

$$x = R\cos^3 t; \quad y = R\sin^3 t,$$

$$0 \le t \le 2\pi. \qquad (3.54)$$

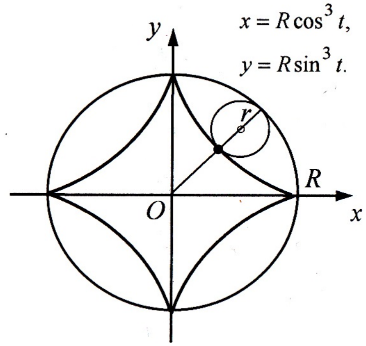


Рис. 3.40

4. ***Циклоїда*** – це траєкторія, фіксованої точки кола радіуса r, яка котиться без ковзання уздовж прямої – осі Ox (рис. 3.41).

Параметричні рівняння циклоїди мають вигляд:

$$x = r(t - \sin t); \quad y = r(1 - \cos t),$$

$$0 \le t \le 2\pi. \qquad (3.55)$$

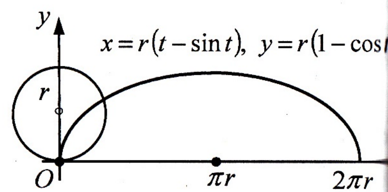


Рис. 3.41

Рівняння згаданих кривих в полярних координатах і параметричному вигляді приведені в таблиці.

Деякі типи кривих на площині, заданих

в полярних координатах:

Коло $\rho = R,\ \varphi \in [0; 2\pi]$;

Кардіоїда $\rho = 2r(1 + \cos\varphi)$;

Спіраль Архімеда $\rho = a\varphi$;

Чотирьохпелюсткова роза $\rho = r\sin 2\varphi$;

Лемніската Бернуллі $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$;

параметрично:

Коло $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$;

Еліпс $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$;

Астроїда $x = R\cos^3 t;\ y = R\sin^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi$;

Циклоїда $x = r(t - \sin t);\ y = r(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$.

3.4.1. Розв'язок типових прикладів самостійної роботи по розділу 3.4

1. Знайти декартові координати точок $A\left(2; \dfrac{2\pi}{3}\right)$, $B\left(3; -\dfrac{\pi}{2}\right)$, заданих в полярних координатах.

Розв'язок. Застосовуючи формули (3.43), знаходимо:

$$x_A = \rho\cos\varphi = 2\cdot\cos\frac{2\pi}{3} = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1;$$

$$y_A = \rho\sin\varphi = 2\cdot\sin\frac{2\pi}{3} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}; \qquad A\left(-1; \sqrt{3}\right).$$

$$x_B = 3\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3\cdot 0 = 0; \quad y_B = 3\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3\cdot(-1) = -3; \quad B(0; -3).$$

2. Знайти полярні координати точок $A(-2; 0)$, $B(1; -1)$, заданих в декартових координатах.

Розв'язок. Застосовуючи формули (3.44), (3.45), знаходимо

$$\rho_A = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2; \quad \sin\varphi_A = \frac{0}{2} = 0; \quad \cos\varphi_A = \frac{-2}{2} = -1.$$

По числовим значенням синуса і косинуса знаходимо, що $\varphi_A = \pi$. Таким чином, в полярній системі координат $A(2; \pi)$.

Полярні координати точки B будуть:

$$\rho_B = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}; \quad \sin\varphi_B = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos\varphi_B = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\varphi_B = -\frac{\pi}{4}; \quad B\left(\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right).$$

3. Крива задана рівнянням $\rho = \dfrac{1}{2 + 2\cos\varphi}$. Необхідно: *а*) побудувати криву по точках, починаючи від $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$, задаючи значення φ через проміжок $\dfrac{\pi}{4}$; *б*) знайти рівняння даної кривої в прямокутній декартовій системі координат, в якій початок співпадає з полюсом, а додатна піввісь абсцис з полярною віссю; *в*) по отриманому рівнянню визначити, яка це лінія.

Розв'язок. *а*) Складемо таблицю і побудуємо лінію по точк (рис. 3.42).

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2
$\cos\varphi$	1	0,707	0	– 0,707	– 1	– 0,707	0	0,707	
$\frac{1}{2+2\cos\varphi}$	0,25	0,29	0,5	1,7	∞	1,7	0,5	0,29	0

б) Між декартовими і полярними координатами існує зв'язок

$x = \rho \sin\varphi, \quad y = \rho\cos\varphi;$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

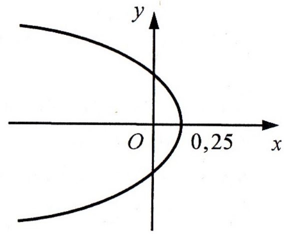


Рис. 3.42

Підставляючи ці значення в дане рівняння, отримаємо

$$2\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}};$$

$$2\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)=1; \quad \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1-2x}{2}; \quad 4x^2+4y^2=1-4x+4x^2$$

$$4x = 1-4y^2; \quad x = \frac{1}{4} - y^2.$$

в) Отримане рівняння є рівнянням параболи.

4. Знайти параметричне рівняння кола $x^2+y^2=2Rx$, якщо поляр вісь співпадає з віссю Ox, а полюс знаходиться в початку координат.

Розв'язок. Між декартовими і полярними координатами існує за жність:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi; \quad x^2+y^2=\rho^2.$$

В якості параметра приймемо полярний кут $\varphi = t$, тоді рівняння ла буде

$$\rho = 2R\cos\varphi = 2R\cos t.$$

Якщо в формули x і y замість ρ і φ підставити отримані вирази через функцію t, то отримаємо:

$$x=\rho(t)\cos t = 2R\cos^2 t = R(1+\cos 2t); \quad y=\rho(t)\sin t = 2R\cos t\sin t = R\sin 2t.$$

Звідки $\begin{cases} x = R(1+\cos 2t), \\ y = R\sin 2t. \end{cases}$

5. Знайти рівняння кривої в прямокутних координатах, якщо вона задана параметрично:

$$\begin{cases} x = -2+t, \\ y = 1+2t. \end{cases}$$

Розв'язок. Знайдемо з першого рівняння параметр t:

$$t = x+2,$$

і виключимо його з другого рівняння. Тоді отримаємо:

$$y = 1+2(x+2); \quad 2x-y+5=0.$$

Це рівняння прямої лінії.

3.4.2. Завдання для самостійної роботи по розділу 3.4

1. Знайти полярні координати вершин квадрата із стороною $a=1$, зображеного на рис. 3.43 (O – полюс).

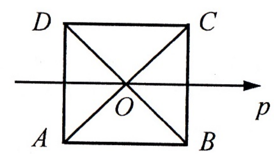


Рис. 3.43

2. Знайти проекції відрізка на координатні осі, якщо відома його довжина $d=6$ і полярний кут $\varphi = 120^\circ$.

3. Знайти полярний кут відрізка, спрямованого з точки $M_1\left(3; 2\sqrt{3}\right)$ в точку $M_2\left(4; \sqrt{3}\right)$.

4. Задані точки $M_1(1;0)$ і $M_2(3;5)$. Знайти проекцію відрізка M_1M_2 на вісь, яка проходить через точки $A(-1;2)$, $B(3;5)$ і направлена від A до B.

5. Знайти рівняння кривих в прямокутних координатах:

а) $x = t^2+2t+4, \ y = t+1$; *б*) $x = 1+2\cos t, \ y = -3+3\sin t$;

в) $x = a\cos t, \ y = b\sin t$; *г*) $x = 2R\cos^2 t, \ y = R\sin 2t$.

4. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ

4.1. Площина

1°. Основні рівняння площини

1. ***Загальне рівняння площини***

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (4.1)$$

де $\vec{N}\{A, B, C\}$ – вектор, перпендикулярний площині (рис. 4.1) (вектор нормалі).

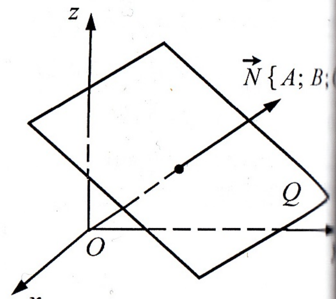


Рис. 4.1

Розглянемо часткові випадки рівняння (4.1).

I. Нехай вільний член $D = 0$, тоді отримаємо рівняння площини,

$$Ax + By + Cz = 0,$$

яка проходить через початок координат.

II. Нехай один із коефіцієнтів A, B, C дорівнює нулю, $D \neq 0$:

а) $A = 0$; $By + Cz + D = 0$ – рівняння площини, яка паралел осі Ox;

б) $B = 0$; $Ax + Cz + D = 0$ – рівняння площини, яка паралел осі Oy;

в) $C = 0$; $Ax + By + D = 0$ – рівняння площини, яка паралел осі Oz.

III. Нехай один із коефіцієнтів A, B, C дорівнює нулю і $D = 0$:

а) $A = D = 0$; $By + Cz = 0$ – рівняння площини, яка проход через вісь Ox;

б) $B = D = 0$; $Ax + Cz = 0$ – рівняння площини, яка проход через вісь Oy;

в) $C = D = 0$; $Ax + By = 0$ – рівняння площини, яка проход через вісь Oz.

IV. Нехай два із коефіцієнтів A, B, C дорівнюють нулю і $D \neq 0$

а) $A = B = 0$; $Cz + D = 0$ – рівняння площини, яка паралельна xO

б) $A = C = 0$; $By + D = 0$ – рівняння площини, яка паралельна xO

в) $B = C = 0$; $Ax + D = 0$ – рівняння площини, яка паралельна yO

V. Нехай:

а) $A = B = D = 0$; $Cz = 0$ – рівняння площини xOy;

б) $A = C = D = 0$; $By = 0$ – рівняння площини xOz;

в) $B = C = D = 0$; $Ax = 0$ – рівняння площини yOz.

2. ***Нормальне рівняння площини***

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \quad (4.2)$$

де p – довжина перпендикуляра, проведеного до площини з початку координат; α, β, γ – кути, які цей перпендикуляр утворює з додатними напрямами координатних осей x, y, z, відповідно (рис.4.2).

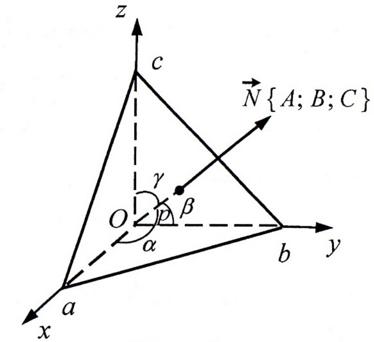


Рис. 4.2

Для приведення загального рівняння площини (4.1) до нормального виду, потрібно помножити його на нормуючий множник

$$M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad (4.3)$$

при цьому знак нормуючого множника повинен бути протилежним знаку D в рівнянні (4.1). Якщо $D = 0$, то знак M може бути довільним.

Знаючи загальне рівняння площини, косинуси напрямних кутів і параметр p в нормальному рівнянні площини знаходяться за формулами

$$\cos\alpha = A \cdot M; \quad \cos\beta = B \cdot M; \quad \cos\gamma = C \cdot M; \quad p = |D \cdot M|. \quad (4.4)$$

3. Рівняння ***площини в відрізках на осях***

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (4.5)$$

де a, b, c – відрізки, які відтинає площина на координатних осях x, y, z відповідно.

4. Рівняння ***площини, яка проходить через дану точку*** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ***і перпендикулярна даному вектору*** $\vec{N}\{A, B, C\}$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (4.6)$$

5. Рівняння ***площини, яка проходить через три точки*** $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.7)$$

6. Параметричні рівняння площини, яка проходить через три точк

$$\begin{cases} x = x_1 + u(x_2 - x_1) + v(x_3 - x_1); \\ y = y_1 + u(y_2 - y_1) + v(y_3 - y_1); \\ z = z_1 + u(z_2 - z_1) + v(z_3 - z_1), \end{cases} \tag{4.8}$$

де u і v – параметри.

2°. Основні задачі на площину

1. Кут ***між двома площинами*** $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ дорівнює куту між їх векторами норм $\overrightarrow{N_1}\{A_1, B_1, C_1\}$, $\overrightarrow{N_2}\{A_2, B_2, C_2\}$:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{N_2}\right|} = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{4.9}$$

Знак « + » відповідає вибору гострого кута, знак « – » – тупого кута.

2. Напрямні косинуси нормалі визначаються за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{4.10}$$

Знак кореня береться протилежним знаку вільного члена D рівня (4.1). Якщо $D = 0$, то знак довільний.

3. Умова ***паралельності*** площин

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{4.11}$$

4. Умова ***перпендикулярності*** площин

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{4.12}$$

3°. Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{4.13}$$

4.1.1. Розв'язок типових прикладів самостійної роботи по розділу 4.1

1. Побудувати площини, задані рівняннями:

а) $3x + 2y + 4z - 12 = 0$; *б*) $2x + 3y - 6 = 0$; *в*) $2z - 3 = 0$;

г) $5x - 2y = 0$; *д*) $2x - y + 3z = 0$.

Розв'язок. *а*) З даного рівняння видно, що площина не проходить через початок координат ($D \neq 0$) і перетинає у різних точках всі три координатні осі. Для знаходження відрізків a, b, c, приведемо рівняння заданої площини до вигляду рівняння площини у відрізках на осях.

$3x + 2y + 4z - 12 = 0$; $3x + 2y + 4z = 12$;

$$\frac{3x}{12} + \frac{2y}{12} + \frac{4z}{12} = 1; \qquad \frac{x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1.$$

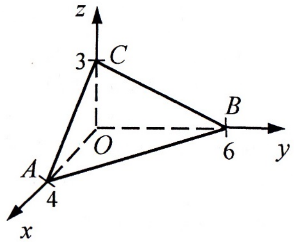


Рис. 4.3

З останнього рівняння знаходимо, що $a = 4$, $b = 6$, $c = 3$.

Площина, яка проходить через знайдені точки $A(4;0;0)$, $B(0;6;0)$, $C(0;0;3)$ і буде шуканою (рис. 4.3).

б) Так як $D = -6 \neq 0$, дане рівняння можна записати в такому вигляді:

$$2x + 3y - 6 = 0; \quad \frac{2x}{6} + \frac{3y}{6} = 1; \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1,$$

звідки $a = 3$, $b = 2$. Відклавши ці відрізки на координатних осях і з'єднавши їх прямою, отримаємо проекцію шуканої площини на площину xOy (рис. 4.4). Так як $C = 0$, площина паралельна осі Oz.

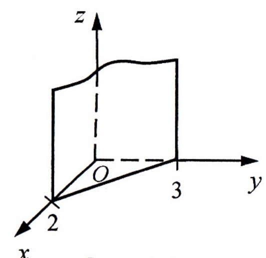


Рис. 4.4

в) Так як $A = B = 0$, то дана площина паралельна координатній площині xOy. Перетворимо дане рівняння

$2z - 3 = 0$; $2z = 3$; $z = 3/2$.

Площина відтинає на осі Oz відрізок $c = 3/2$ (рис. 4.5).

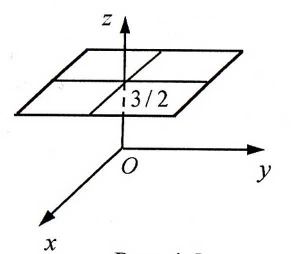


Рис. 4.5

г) $5x-2y=0$; $\quad y=\dfrac{5}{2}x$.

В даному рівнянні $C=D=0$, отже, площина проходить через вісь Oz. Перетином заданої площини з площиною xOy буде пряма, рівняння якої $5x-2y=0$ (рис. 4.6).

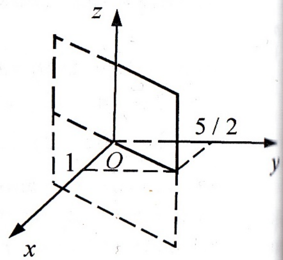


Рис. 4.6

д) Площина проходить через початок координат $(D=0)$, отже $a=b=c=0$. Знайдемо рівняння ліній перетину (сліди) заданої площини з координатними площинами.

Нехай $x=0$, тоді $3z-y=0$ або $z=\dfrac{1}{3}y$; якщо $y=0$, то $2x+3z=0$

$z=-\dfrac{2}{3}x$; якщо $z=0$, то $2x-y=0$ і $y=2x$. Тепер у площинах y $(x=0)$, xOz $(y=0)$, xOy $(z=0)$, потрібно побудувати отримані пр і через них провести задану площину.

2. Задано рівняння площини $4x-2y+4z-12=0$. Привести це рівн ня: *а)* до нормального виду; *б)* до рівняння площини в відрізках на осях

Розв'язок. *а)* Знайдемо нормуючий множник за формулою (4.3):

$$M=\frac{1}{\sqrt{4^2+(-2)^2+4^2}}=\frac{1}{6}.$$

Так як $D<0$, то M беремо зі знаком «+».

Помноживши дане рівняння на M, отримаємо:

$$\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z-2=0,$$

де $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$, $\cos\beta=-\dfrac{1}{3}$, $\cos\gamma=\dfrac{2}{3}$, $p=2$.

б) Перенесемо вільний член в праву частину і розділимо на нь рівняння. Тоді отримаємо:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{3}=1.$$

Відрізки на осях $a=3$; $b=-6$; $c=3$.

3. Написати *а)* загальне рівняння і *б)* параметричні рівняння площини, яка проходить через три точки $A(1;1;0)$, $B(3;2;-1)$ і $C(2;-1;4)$.

Розв'язок. *а)* Загальне рівняння площини, яка проходить через три точки, визначається рівнянням (4.7). Підставляючи координати даних точок, знаходимо:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 3-1 & 2-1 & -1-0 \\ 2-1 & -1-1 & 4-0 \end{vmatrix}=0; \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}=0;$$

$$(x-1)[1\cdot4-(-1)\cdot(-2)]-(y-1)[2\cdot4-(-1)\cdot1]+z[2\cdot(-2)-1\cdot1]=0;$$

$$(x-1)\cdot2-(y-1)\cdot9+z\cdot(-5)=0;$$

$$2x-9y-5z+7=0.$$

б) Для отримання параметричних рівнянь площини, підставимо координати точок у формули (4.8)

$$\begin{cases} x=1+u(3-1)+v(2-1); \\ y=1+u(2-1)+v(-1-1); \\ z=0+u(-1-0)+v(4-0). \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x=1+2u+v; \\ y=1+u-2v; \\ z=-u+4v. \end{cases}$$

4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(2;-1;3)$ і паралельна площині $x-2y+4z-5=0$.

Розв'язок. Рівняння площини, яка проходить через дану точку має вигляд:

$$A(x-2)+B(y+1)+C(z-3)=0.$$

Використовуючи умову паралельності площин (4.11), підставимо замість A, B, C значення коефіцієнтів із заданого рівняння площини:

$$1\cdot(x-2)-2\cdot(y+1)+4(z-3)=0$$

або

$$x-2y+4z-16=0.$$

5. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(1;2;-1)$ і перпендикулярна до вектора $\vec{N}\{3;0;2\}$. Знайти напрямні кути нормалі площини.

Розв'язок. Скориставшись формулою (4.6), отримаємо рівняння шуканої площини:

$$3(x-1)+0(y-2)+2(z+1)=0, \quad \text{або} \quad 3x+2z-1=0.$$

Для визначення кутів, які утворює вектор нормалі $\vec{N}\{3;0;2\}$ шуканої площини з осями координат, використаємо формулу (4.10). Знак кореня береться додатним, протилежним знаку $D=-1$. Обчислимо спочатку корінь:

$$\sqrt{3^2+0^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}.$$

Тоді

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}\approx 0{,}8321,\ \alpha\approx 33^{\circ}48';\qquad \cos\beta=\frac{0}{\sqrt{13}}\approx 0,\ \beta=90^{\circ};$$

$$\cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{13}}\approx 0{,}5547,\quad \gamma\approx 35^{\circ}48'.$$

5. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1;-2;2)$ і $M_2(2;0;1)$ і паралельна вектору $\vec{a}=\{3;-1;4\}$.

Розв'язок. Оскільки площина проходить через точки M_1 і M_2, вона паралельна вектору

$$\vec{b}=\overrightarrow{M_1M_2}=\{(x_2-x_1);(y_2-y_1);(z_2-z_1)\}=\{1;2;-1\}.$$

Окрім цього шукана площина паралельна вектору $\vec{a}=\{3;-1;4\}$.

Вектор $\vec{N}=\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 4.7), тому він перпендикулярний шуканій площині. Вектор $\vec{N}$ знайдемо за формулою (2.23):

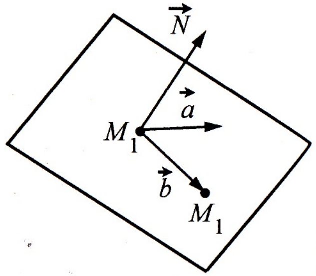


Рис. 4.7

$$\vec{N}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ a_x&a_y&a_z\\ b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

В нашому випадку

$$\vec{N}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 3&-1&4\\ 1&2&-1\end{vmatrix}=\vec{i}\,[(-1)\cdot(-1)-4\cdot 2]-\vec{j}\,[3\cdot(-1)-4\cdot 1]+\vec{k}\,(3\cdot 2-(-1)\cdot 1)=$$

$$=-7\vec{i}+7\vec{j}+7\vec{k},\ \text{тобто}\ \vec{N}\{-7;7;7\}.$$

Рівняння шуканою площини, яка проходить через точку $M_1(1;-2;2)$ з вектором нормалі $\vec{N}\{-7;7;7\}$ має вигляд:

$$-7\cdot(x-1)+7\cdot(y+2)+7\cdot(z-2)=0\ \Rightarrow\ 7x-7y-7z-7=0;\quad x-y-z-1=0.$$

6. **Знайти рівняння площини:** *а*) яка проходить через вісь Ox і точку $(1;2;-3)$; *б*) яка паралельна осі Oz і проходить через точки $(1;0;1)$ і $(-2;1;3)$.

Розв'язок. *а*) Кожна площина, що проходить через вісь Ox визначається рівнянням виду:

$$By+Cz=0.$$

Вимагаємо, щоб площина проходила через точку $(1;2;-3)$. Підставивши координати цієї точки в вищезгадане рівняння, отримаємо:

$$2B-3C=0,\quad\text{або}\quad B=\frac{3C}{2}.$$

Отже, шукане рівняння площини має вигляд:

$$\frac{3C}{2}y+Cz=0;\qquad \frac{3}{2}y+z=0;\qquad 3y+2z=0.$$

б) Кожна площина, яка паралельна осі Oz, визначається рівнянням виду:

$$Ax+By+D=0.$$

Так як шукана площина проходить через точки $(1;0;1)$ і $(-2;1;3)$, то:

$$\begin{cases}A+B\cdot 0+D=0,\\ -2A+B+D=0.\end{cases}$$

Отримуємо $D=-A$; $B=3A$. Отже, шукане рівняння площини

$$Ax+3Ay-A=0,$$

або

$$x+3y-1=0.$$

7. **Встановити**, які з наступних пар площин перетинаються, паралельні або збігаються:

а) $4x-6y+3z+5=0$ і $2x-3y+z-5=0$;
б) $6x+8y-4z-6=0$ і $3x+4y-2z+3=0$;
в) $3x-6y+3z-6=0$ і $-x+2y-z+2=0$;
г) $6x-9z+5=0$ і $2x-3z+1=0$.

Розв'язок. *а*) Перевіримо умову паралельності площин (4.11)

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}; \qquad \frac{4}{2}=\frac{-6}{-3}\neq\frac{3}{1}.$$

Умова паралельності площин не виконується, площини перетин-
ються.

б) Перевіримо умову паралельності площин (4.11)

$$\frac{6}{3}=\frac{8}{4}=\frac{-4}{-2}=(2); \quad \frac{D_1}{D_2}=\frac{-6}{3}=(-2).$$

Умова паралельності площин виконується, площини паралельні.

в) Рівняння рівносильні, оскільки всі коефіцієнти пропорційні, а
ме:

$$\frac{3}{-1}=\frac{-6}{2}=\frac{3}{-1}=(-3); \quad \frac{D_1}{D_2}=\frac{-6}{2}=(-3).$$

Помноживши друге рівняння на коефіцієнт пропорційності $\lambda=-$
отримаємо перше рівняння, отже, площини збігаються.

г) Перевіримо умову паралельності площин (4.11)

$$\frac{6}{2}=\frac{0}{0}=\frac{-9}{-3}=(3); \quad \frac{D_1}{D_2}=\frac{5}{1}=(5).$$

Відмітимо, що перше із співвідношень записано умовно, проте во
справедливе. Відношення $\frac{0}{0}$ лише означає, що площини парале
осі Oy. Отже умова (4.11) виконується, площини паралельні.

8. Встановити, чи перпендикулярні площини:

а) $x+2y-3z+5=0$ і $3x-y+2z+1=0$;

б) $2x+3y-4z+1=0$ і $5x-2y+z+6=0$.

Розв'язок. *а*) Перевіримо умову перпендикулярності площин (4.1

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0; \quad 3\cdot1+2\cdot(-1)+(-3)\cdot2\neq0,$$

отже, площини не перпендикулярні.

б) $$2\cdot5+3\cdot(-2)+(-4)\cdot1=0,$$

отже площини взаємно перпендикулярні.

9. Знайти відстань від точки $M(2;3;-4)$ до площини $3x+6y-3z+15=0$.

Розв'язок. Відстань знайдемо за формулою (4.13)

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2\cdot2+6\cdot3+(-3)\cdot(-4)+15|}{\sqrt{2^2+6^2+(-3)^2}}=\frac{49}{7}=7.$$

10. Знайти відстань між паралельними площинами $4x+2y-4z+12=0$ і $4x+2y-4z+6=0$.

Розв'язок. Шукана відстань дорівнює відстані від будь-якої точки, яка лежить на одній з площин до іншої. Візьмемо на першій площині точку, вважаючи для зручності розрахунку $x=0$; $y=0$. Тоді $z=3$. Відстань від точки $M(0;0;3)$ до другої площини знаходимо за формулою (4.13)

$$d=\frac{|4\cdot0+2\cdot0+(-4)\cdot3+6|}{\sqrt{4^2+2^2+(-4)^2}}=\frac{6}{6}=1.$$

4.1.2. Завдання для самостійної роботи по розділу 4.1

1. Скласти рівняння площини, що відтинає на осі Ox відрізок $OA=3$ і перпендикулярна вектору $\vec{N}\{2;-3;1\}$.

2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1(1;-1;2)$ і перпендикулярна вектору $\vec{N}\{4;3;-1\}$.

3. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M(1;2;0)$, $N(1;-1;2)$, $P(0;1;-1)$ і знайти кути, утворені вектором нормалі з осями координат.

4. Знайти відстань від точки $M(2;-4;1)$ до площини $x-8y+4z=0$.

5. Встановити, які з наступних пар площин перетинаються, паралельні або збігаються:

а) $3x-2y+5z-4=0$ і $-6x+4y+10z-8=0$;

б) $2x+4y-6z-2=0$ і $x+2y-3z+1=0$;

в) $x-6y+3z+1=0$ і $-x+6y+3z+1=0$;

г) $4x+8y-7=0$ і $x+2y-7=0$.

6. Встановити, чи перпендикулярні площини:

а) $2x - y - 4z + 5 = 0$ і $3x + 2y + z - 4 = 0$;

б) $x + 2y - 3z + 4 = 0$ і $6x - 3y - 2z + 1 = 0$.

4.1.3. Розв'язок типового прикладу завдання 8 РГР

1. Задано координати точок $M_1(-3;-6;\ 2)$, $M_2(1;-2;\ 0)$, $M_3(-1;5;-8)$, $M_4(-3;-4;\ 3)$. Потрібно:

1. Написати рівняння площини: *а)* Π_1 – що проходить через точку M_4 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$; *б)* Π_2 – що проходить через точку M_4 паралельно векторам $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_3}$; *в)* Π_3 – що проходить через точки $M_1M_2M_3$.

2. Перевірити, чи виконується умова перпендикулярності площин Π_1, Π_2, і паралельності площин Π_2, Π_3.

3. Знайти відстань d від точки M_4 до площини Π_3.

Розв'язок. 1. *а)* Рівняння площини Π, яка проходить через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}\{A;B;C\}$ має вигляд (4.6):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (1)$$

За вектор нормалі приймемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \{4;\ 4;-2\}$.

Замінивши в рівнянні пучка площин (1) коефіцієнти A, B, C числами 4, 4, -2, і підставивши замість x_0, y_0, z_0 координати точки $M_4(-3;-4;\ 3)$, отримаємо рівняння площини Π_1:

$$4(x-(-3))+4(y-(-4))+(-2)(z-3)=0; \qquad 2x+2y-z+17=0 \quad (\Pi_1)$$

б) Координати вектора $\vec{N_1}$, перпендикулярного векторам $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_3}$ знайдемо з обчислення їх векторного добутку.

Визначимо координати вектора $\overrightarrow{M_1M_3}$:

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3-x_1; y_3-y_1; z_3-z_1\} = \{-1-(-3); 5-(-6); -8-2\} = \{2;11;-10\}.$$

Тоді:

$$\vec{N_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 4 & -2 \\ 2 & 11 & -10 \end{vmatrix} = \vec{i}(4\cdot(-10)-11\cdot(-2)) - \vec{j}(4\cdot(-10)-2\cdot(-2)) + \vec{k}(4\cdot 11-2\cdot 4) = -18\vec{i} + 36\vec{j} + 36\vec{k}. \quad \vec{N_1} = \{-18;\ 36;\ 36\}.$$

Напишемо рівняння площини Π_2:

$$-18(x-(-3))+36(y-(-4))+36(z-3)=0 \Rightarrow x-2y-2z+1=0 \ (\Pi_2).$$

в) Рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, має вигляд (4.7):

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Підставивши в (3) координати точок M_1, M_2, M_3, отримаємо:

$$\begin{vmatrix} x-(-3) & y-(-6) & z-2 \\ 1-(-3) & -2-(-6) & 0-2 \\ -1-(-3) & 5-(-6) & -8-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3 & y+6 & z-2 \\ 4 & 4 & -2 \\ 2 & 11 & -10 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$(x+3)\cdot(-18)-(y+6)\cdot(-36)+(z-2)\cdot 36=0 \Rightarrow -18x+36y+36z+90=0 \Rightarrow$$
$$x-2y-2z-5=0.\ (\Pi_3).$$

2. Запишемо умову перпендикулярності площин Π_1 і Π_2:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \Rightarrow 2\cdot 1+2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-2)=0 \text{ – виконується.}$$

Умова паралельності площин Π_2 і Π_3

$$\frac{A_2}{A_3}=\frac{B_2}{B_3}=\frac{C_2}{C_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1}=\frac{-2}{-2}=\frac{-2}{-2} \text{ – виконується.}$$

3. Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини Π, заданої рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, знайдемо за формулою (4.13):

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (4)$$

Підставляючи в рівняння (4) знайдені значення коефіцієнтів A_3, B_3, C_3, D_3 і координати точки $M_4(-3;-4;\ 3)$ маємо:

$$d = \frac{|1\cdot(-3)+(-2)\cdot(-4)+(-2)\cdot 3+(-5)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2 \text{ (од. довжини.)}$$

Відповідь: 1. *а)* $2x+2y-z+17=0$ (Π_1); *б)* $x-2y-2z+1=0$ (Π_2); *в)* $x-2y-2z-5=0$ (Π_3); 2. Виконується 3. $d=2$ од. довжини.

4.2. Пряма лінія в просторі. Взаємне розташування прямої і площини

1°. Основні рівняння прямої лінії в просторі

1. Пряма лінія в просторі ***в загальному вигляді*** задається перетином двох площин:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0; \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (4.14)$$

2. ***Канонічне рівняння*** прямої

Положення прямої в просторі можна визначити також даною точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що лежить на прямій і напрямним вектором $\vec{s}\{m; n; p\}$ (рис. 4.8). Тоді отримаємо канонічне рівняння прямої

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \qquad (4.15)$$

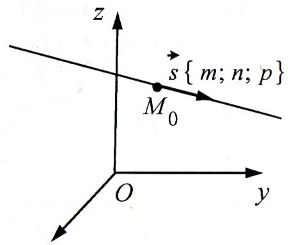


Рис. 4.8

де $m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$; $n = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$; $p = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$,

проекції напрямного вектора $\vec{s}\{m; n; p\}$, який проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Якщо один із коефіцієнтів m, n, або p рівний нулю, (наприклад $m = 0$), то система

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

тотожна системі $x - x_0 = 0$, $\dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$, і в цьому випадку пряма перпендикулярна осі Ox.

Якщо які-небудь два коефіцієнти дорівнюють нулю, (наприклад $m = n = 0$), то система $\dfrac{x - x_0}{0} = \dfrac{y - y_0}{0} = \dfrac{z - z_0}{p}$ тотожна системі $x - x_0 = 0$, $y - y_0 = 0$, $z \in R$ і пряма паралельна осі Oz.

Якщо знаменник (4.15) розділити на $s = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$, то отримаємо:

$$\frac{x - x_0}{\frac{m}{s}} = \frac{y - y_0}{\frac{n}{s}} = \frac{z - z_0}{\frac{p}{s}}, \quad \text{або} \quad \frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma}, \qquad (4.16)$$

де α, β, γ – кути, утворені прямою з осями координат Ox, Oy, Oz відповідно.

Величини $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються ***напрямними косинусами*** прямої і обчислюються за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{m}{s} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}};$$
$$\cos\beta = \frac{n}{s} = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}; \qquad (4.17)$$
$$\cos\gamma = \frac{p}{s} = \frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

3. ***Параметричні рівняння*** прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в напрямі вектора $\vec{s}\{m; n; p\}$ мають вигляд:

$$x = x_0 + t \cdot m; \quad y = y_0 + t \cdot n; \quad z = z_0 + t \cdot p, \qquad (4.18)$$

де t – параметр.

4. Рівняння прямої, ***яка проходить через дві задані точки*** $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (4.19)$$

2°. Основні задачі на пряму лінію

1. ***Кут між двома прямими***, які задані канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_0}{m_1} = \frac{y - y_0}{n_1} = \frac{z - z_0}{p_1} \quad \text{і} \quad \frac{x - x_0}{m_2} = \frac{y - y_0}{n_2} = \frac{z - z_0}{p_2}$$

$$\cos\varphi = \pm\frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}, \qquad (4.20)$$

Знак « + » відповідає вибору гострого кута, знак « – » – тупого кута.

2. Умова ***паралельності*** прямих

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \qquad (4.21)$$

3. Умова ***перпендикулярності*** прямих

$$m_1 m_2+n_1 n_2+p_1 p_2=0. \qquad (4.22)$$

3°. Якщо пряма задана канонічним рівнянням

$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$, а площина загальним рівнянням

$A x+B y+C z+D=0$, то:

1. Координати точки перетину прямої і площини знаходиться за формулами:

$$x=x_0+t\cdot m;\; y=y_0+t\cdot n;\; z=z_0+t\cdot p, \qquad (4.23)$$

де параметр
$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}. \qquad (4.24)$$

2. Кут між прямою і площиною (рис. 4.9)

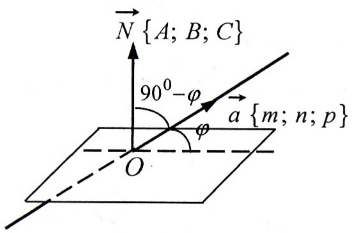


Рис.4.9

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi=\pm\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (4.25)$$

Знак вибирається таким чином, щоб кут був гострим, тобто $\sin\varphi>0$.

3. Рівняння пучка площин, які проходять через пряму їх перетину

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0. \qquad (4.26)$$

4. Умова ***паралельності*** прямої і площини

$$Am+Bn+Cp=0. \qquad (4.27)$$

5. Умова ***перпендикулярності*** прямої і площини

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \qquad (4.28)$$

4.2.1. Розв'язок типових прикладів самостійної роботи по розділу 4.2

1. Побудувати прямі:

а) $\begin{cases}2x-3y-3z+4=0;\\ x+2y+z-5=0.\end{cases}$ *б*) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z}{3}$.

Розв'язок. *а*) Відомо, що положення прямої можна визначити двома точками, що належать їй. Тому ми знайдемо сліди прямої (тобто точки перетину прямої з координатними площинами) на яких-небудь двох координатних площинах, наприклад xOy і xOz, а потім через отримані дві точки проведемо шукану пряму.

Знайдемо точку перетину прямої з координатною площиною xOy. Вважаючи $z=0$, отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}2x-3y+4=0;\\ x+2y-5=0,\end{cases}$$

звідки знаходимо $x=1$, $y=2$. Отже, $M(1;2;0)$ – точка перетину прямої з площиною xOy.

Тепер знайдемо точку перетину прямої з координатною площиною xOz. Поклавши $y=0$, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases}2x-3z+4=0;\\ x+z-5=0,\end{cases}$$

звідки $x=2{,}2$, $z=2{,}8$. Отже $N(2{,}2;0;2{,}8)$ – точка перетину з координатною площиною xOz.

Через точки M і N проведемо шукану пряму (рис. 4.10).

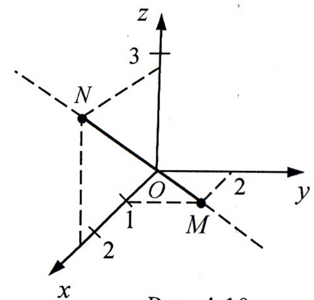


Рис. 4.10

б) Аналогічно, якщо $z=0$, то $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-4}=0$, звідки $\dfrac{x-2}{2}=0$, $\dfrac{y}{-4}=0$, тобто $x=2$, $y=0$. Отже, $E(2;0;0)$ – точка перетину з координатною площиною xOy.

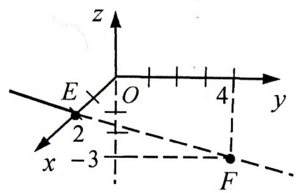


Рис. 4.11

Нехай $x=0$, тоді $\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z}{3}=-1$, звідки $y=4$, $z=-3$. Отже, $F(0;4;-3)$ –

точка перетину з координатною площиною yOz.

Через точки E і F проводимо шукану пряму (рис. 4.11).

2. Скласти канонічне рівняння прямої лінії

$$\begin{cases} 8x - 4y - z + 6 = 0; \\ 5x + y - 3z + 5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Нехай $x_0 = 0$, тоді

$$\begin{cases} -4y - z + 6 = 0; \\ y - 3z + 5 = 0, \end{cases}$$

звідки $y_0 = 1$; $z_0 = 2$.

Скориставшись тепер формулою (4.15)

$$m = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 13; \quad n = -\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 19; \quad p = \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 28,$$

отримаємо $$\frac{x}{13} = \frac{y-1}{19} = \frac{z-2}{28}.$$

3. Написати рівняння прямої, яка проходить через точки перетину площини $x+2y-3z-2$ з прямими $\frac{x-5}{-5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ і $\frac{x-7}{5} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{1}$.

Розв'язок. Запишемо рівняння першої прямої в параметричному вигляді

$$\frac{x-5}{-5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2} = t \quad \Rightarrow \quad x = 5 - 5t; \quad y = 3 + t; \quad z = 2t.$$

Для знаходження точки перетину прямої з площиною, підставимо ці рівняння в рівняння площини і знайдемо параметр t.

$$5 - 5t + 2(3+t) - 3 \cdot 2t - 2 = 0; \quad -9t = -9; \quad t = 1.$$

Звідки координати точки перетину M_1 першої прямої з площиною

$$x = 5 - 5 \cdot 1 = 0; \quad y = 3 + 1 = 4; \quad z = 2 \cdot 1 = 2. \qquad M_1(0; 4; 2).$$

Параметричні рівняння другої прямої будуть

$$\frac{x-7}{5} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{1} = t \quad \Rightarrow \quad x = 7 + 5t; \quad y = 1 + 4t; \quad z = -1 + t.$$

Підставляючи їх в рівняння площини $7 + 5t + 2(1+4t) - 3(-1+t) - 2 = 0$, знаходимо, що $t = -1$, і координати точки перетину M_2 другої прямої з площиною

$$x = 7 + 5 \cdot (-1) = 2; \quad y = 1 + 4 \cdot (-1) = -3; \quad z = -1 + (-1) = -2. \quad M_2(2; -3; -2).$$

Використовуючи рівняння прямої (4.19), яка проходить через дві точки, отримаємо:

$$\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-4}{-3-4} = \frac{z-2}{-2-2}; \qquad \frac{x}{2} = \frac{y-4}{-7} = \frac{z-2}{-4}.$$

4. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1; 0; -3)$ паралельно лінії перетину площин $x + 2y - z + 3 = 0$ і $3x - y - 4z + 2 = 0$.

Розв'язок. Перемножуючи векторно вектори нормалі заданих площин, знаходимо вектор, паралельний лінії їх перетину:

$$\vec{s} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= (-8-1)\vec{i} - (-4+3)\vec{j} + (-1-6)\vec{k} = -9\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}.$$

Рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1; 0; -3)$ паралельно вектору $\vec{s}$, має вигляд

$$\frac{x-1}{-9} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{-7}.$$

5. Знайти кут, який утворюють прямі

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{6} = \frac{z}{9}; \qquad \frac{x+1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{6}.$$

Розв'язок. Кут між прямими знаходимо за формулою (4.20)

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 9 \cdot 6}{\sqrt{2^2+6^2+9^2} \cdot \sqrt{3^2+2^2+6^2}} = \frac{72}{\sqrt{121} \cdot \sqrt{49}} = \frac{72}{77} = 0{,}936; \quad \varphi \approx 20^\circ 30'.$$

6. Скласти рівняння траєкторії руху точки M, яка, маючи початкове положення $M_0(1; 2; 1)$, рухається прямолінійно і рівномірно в напряму вектора $\vec{a} = \{4; 4; 2\}$ зі швидкістю $\vartheta = 18$ м/с.

Розв'язок. Порівнюючи модуль вектора $\vec{a}$, який дорівнює

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = 6$$

і заданою швидкістю ϑ=18 м/с бачимо, що в якості напрямного вектора $\vec{s}$ слід взяти вектор в три рази більший, ніж $\vec{a}$, тобто $\vec{s} = 3\vec{a} = \{12; 12; 6\}$.

Згідно формули (4.15), рівняння траєкторії руху буде мати вигляд:

$$\frac{x-1}{12}=\frac{y-2}{12}=\frac{z-1}{6}.$$

7. Знайти точку перетину M прямої $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{3}$ і площини $2x+y-z-7=0$.

Розв'язок. Запишемо рівняння прямої в параметричному вигляді:

$$\frac{x}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{3}=t;\quad x=2t,\quad y=t+2,\quad z=3t-1.$$

Підставляючи отримані вирази x, y, z в рівняння площини, знаходимо відповідне значення параметра t:

$$2\cdot 2t+t+2-(3t-1)-7=0;\quad 2t-4=0;\quad t=2.$$

Отже, координати точки M будуть

$$x=4,\ y=4,\ z=5;\qquad M(4;4;5).$$

8. Написати рівняння площини, яка проходить через лінію перетину площин $x+2y-3z-1=0$ і $2x+y-3z-4=0$ і точку $M(2;-1;3)$.

Розв'язок. Скориставшись рівнянням пучка площин (4.26), запишемо:

$$x+2y-3z-1+\lambda(2x+y-3z-4)=0.$$

Підставляючи координати точки M в рівняння пучка, знаходимо відповідне значення параметра λ

$$2+2\cdot(-1)-3\cdot 3-1+\lambda(2\cdot 2+(-1)-3\cdot 3-4)=0;\quad \lambda=-1.$$

Підставляючи значення λ в рівняння пучка площин, отримаємо шукане рівняння

$$x+2y-3z-1+(-1)\cdot(2x+y-3z-4)=0;\qquad x-y-3=0.$$

9. Написати рівняння площини, яка паралельна осі Ox і проходить через точки $M_1(2;-1;4)$ і $M_2(5;2;-3)$.

Розв'язок. Рівняння площини, яка проходить через точку M_1 буде

$$A(x-2)+B(y+1)+C(z-4)=0. \qquad (1)$$

Так як шукана площина паралельна осі Ox, то проекція нормального до площини вектора на цю вісь дорівнює нулю, тобто $A=0$. (2)

Оскільки площина проходить ще і через точку M_2, то маємо:

$$A(5-2)+B(2+1)+C(-3-4)=0;\quad 3A+3B-7C=0. \quad (3)$$

Система рівнянь (1-3) має розв'язок, якщо визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -7 \end{vmatrix}=0,$$

або

$$(x-2)\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}-(y+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}+(z-4)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=0;\qquad 7y+3z-5=0.$$

10. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;2;-1)$ і паралельна прямим $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-2}$ і $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+3}{3}$.

Розв'язок. Рівняння площини, яка проходить через точку M_0, буде

$$A(x-3)+B(y-2)+C(z+1)=0. \qquad (1)$$

Оскільки площина паралельна заданим прямим, то із умови (4.27) маємо:

$$2A+3B-2C=0\quad (2)\qquad \text{і}\qquad 4A+B+3C=0. \qquad (3)$$

Система рівнянь (1-3) має розв'язок, якщо визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z+1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0;\quad (x-3)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}+(z+1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=0;$$

$$(x-3)(9+2)-(y-2)(6+8)+(z+1)(2-12)=0;\quad 11x-14y-10z-15=0.$$

11. Визначити кут між прямою, яка проходить через точки $M_1(0;2;6)$ і $M_2(3;6;-6)$, і площиною $2x-y-2z-1=0$.

Розв'язок. Рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 і M_2, згідно (4.19), має вигляд:

$$\frac{x-0}{3-0}=\frac{y-2}{6-2}=\frac{z-6}{-6-6};\qquad \frac{x}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-6}{-12}.$$

Кут між прямою і площиною знаходимо за формулою (4.25):

$$\sin\varphi=\frac{2\cdot 3-1\cdot 4+(-2)\cdot(-12)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2+(-12)^2}}=\frac{26}{3\cdot 13}=\frac{2}{3};\qquad \varphi\approx 62^{\circ}.$$

12. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму
$$\begin{cases} 8x + 2y + 3z + 6 = 0, \\ 3x + 4y + z + 1 = 0, \end{cases} \quad \text{паралельно прямій} \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-1}{-2}.$$

Розв'язок. Запишемо рівняння пучка площин (4.26)
$$8x + 2y + 3z + 6 + \lambda(3x + 4y + z + 1) = 0.$$

Виберемо з цього пучка площину, яка паралельна другій прямій і знайдемо значення λ. Запишемо рівняння пучка площин в вигляді
$$(8+3\lambda)x + (2+4\lambda)y + (3+\lambda)z + 6 + \lambda = 0.$$

Використовуючи умову паралельності прямої і площини (4.27), маємо:
$$2(8+3\lambda) + 3(2+4\lambda) - 2(3+\lambda) = 0, \text{ звідки } \lambda = -1.$$

Підставляючи значення λ в рівняння пучка площин, отримаємо шукане рівняння площини:
$$8x + 2y + 3z + 6 + (-1)(3x + 4y + z + 1) = 0; \qquad 5x - 2y + 2z + 5 = 0.$$

13. Знайти відстань від точки $M(2;\,3;\,1)$ до прямої L
$$\frac{x+5}{1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{-2}.$$

Розв'язок. Через задану точку M проведемо площину P, перпендикулярну до даної прямої. Потім знайдемо точку перетину N цієї площини з прямою L. Відрізок MN є перпендикуляром, проведеним з точки M до даної прямої, основою якого буде точка N. Найкоротшою відстанню від точки M до даної прямої буде довжина перпендикуляра MN, проведеного з точки M на пряму L.

Напишемо рівняння площини, яка проходить через точку M:
$$A(x-2) + B(y-3) + C(x-1) = 0. \qquad (1)$$

Визначимо коефіцієнти A, B, C так, щоб площина (1) була перпендикулярна до прямої L. Скористаємося умовою перпендикулярності прямої і площини (4.28)
$$\frac{A}{1} = \frac{B}{-3} = \frac{C}{-2}.$$

Вважаючи, що $A = 1$, $B = -3$, $C = -2$ і підставляючи ці значення в рівняння (1), отримаємо рівняння площини P:
$$x - 2 - 3\cdot(y-3) - 2(z-1) = 0; \qquad x - 3y - 2z + 9 = 0. \qquad (2)$$

Тепер знайдемо точку перетину цієї площини з даною прямою. Напишемо рівняння прямої L в параметричній формі:
$$\frac{x+5}{1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{-2} = t \quad \Rightarrow \quad x = t-5,\ \ y = -3t+4,\ \ z = -2t+3.$$

Підставляючи ці значення в рівняння площини (2), отримаємо:
$$t - 5 - 3\cdot(4-3t) - 2(3-2t) + 9 = 0; \quad 14t - 14 = 0; \quad t = 1.$$

Отже, точка перетину площини (2) з прямою L матиме координати
$$x = 1 - 5 = -4; \quad y = -3 + 4 = 1; \quad z = -2 + 3 = 1.$$

Тепер знайдемо відстань між двома точками $M(2;\,3;\,1)$ і $N(-4;\,1;\,1)$:
$$|MN| = \sqrt{(2+4)^2 + (3-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

4.2.2. Завдання для самостійної роботи по розділу 4.2

1. Отримати параметричне рівняння прямої
$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = z.$$

2. Написати рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(2;1;-1)$ і $M_2(4;-3;2)$.

3. Знайти проекцію M точки $M_0(1;2;3)$ на площину $x - 2y + z - 6 = 0$.

4. Пряма L проходить через точку $(2;1;-1)$ і точку перетину прямої $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{1}$ з площиною $P:\ \ x - y + z - 1 = 0$.

Знайти кут, який утворює пряма L з площиною Q $x + 2y - z + 3 = 0$.

5. Знайти проекцію прямої
$$\begin{cases} x - 3y - z + 4 = 0, \\ 2x - 4y + 3z - 2 = 0, \end{cases} \quad \text{на площину} \quad 3x + 2y + z - 7 = 0.$$

6. Знайти відстань d від точки $M(1;2;-1)$ до прямої
$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{2}.$$

4.2.3. Розв'язок типових прикладів завдань 9, 10 РГР

1. Задано пряму і координати точок. 1. Написати канонічні рівняння: *а*) прямої, яка задана перетином двох площин, *б*) прямої, що проходить через задані точки. 2. Знайти гострий кут між цими прямими.

$$\begin{cases} 4x + 3y - 2z + 7 = 0, \\ 2x - 3y + 6z + 9 = 0, \end{cases} \quad M_1(3; 1; -2), \ M_2(4; 5; 8).$$

Розв'язок. 1. *а*) Знайдемо яку-небудь точку на даній прямій. Для цього вважаємо в обох рівняннях $x = 0$ і розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 3y - 2z = -7, \\ -3y + 6z = -9, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = -5; \ z = -4.$$

Таким чином, точка $M_0(0; -5; -4)$ належить даній прямій.

Напрямний вектор $\vec{s}$ знайдемо за формулою

$$\vec{s} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}(3 \cdot 6 - (-2) \cdot (-3)) - \vec{j}(4 \cdot 6 - (-2) \cdot 2) + \vec{k}(4 \cdot (-3) - 3 \cdot 2) = 12\vec{i} - 28\vec{j} - 18\vec{k}$$

тобто він має координати $\vec{s}\{12; -28; -18\}$, або, скоротивши на спільний множник (2), отримаємо $\vec{s}\{6; -14; -9\}$.

Тоді запишемо канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку M_0 в напрямі вектора $\vec{s}$

$$\frac{x}{6} = \frac{y+5}{-14} = \frac{z+4}{-9}.$$

б) Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ має вигляд (4.19). За умовою задачі $M_1(3; 1; -2)$, $M_2(4; 5; 8)$, тому шукане рівняння

$$\frac{x-3}{4-3} = \frac{y-1}{5-1} = \frac{z-(-2)}{8-(-2)}, \quad \text{або} \quad \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+2}{10}.$$

2. Кут між двома прямими знайдемо за формулою (4.20)

$$\cos\varphi = \pm\frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

В нашому випадку $m_1 = 6$, $n_1 = -14$, $p_1 = -9$; $m_2 = 1$, $n_2 = 4$, $p_2 = 10$. Косинус гострого кута додатній, тому

$$\cos\varphi = -\frac{6 \cdot 1 + (-14) \cdot 4 + (-9) \cdot 10}{\sqrt{6^2 + (-14)^2 + (-9)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 4^2 + 10^2}} = -\frac{-140}{\sqrt{313} \cdot \sqrt{117}} = 0{,}7314.$$

$$\varphi = \arccos 0{,}7314; \quad \varphi = 0{,}7502 \text{ рад}; \quad \varphi \approx 43^\circ.$$

Відповідь: 1. *а*) $\frac{x}{6} = \frac{y+5}{-14} = \frac{z+4}{-9}$, *б*) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+2}{10}$. 2. $\varphi \approx 43^\circ$.

2. Задані пряма в просторі $\frac{x+4}{-3} = \frac{y-3}{6} = \frac{z+2}{-7}$ і площина $2x - y - 4z - 13 = 0$.

Знайти: 1) точку перетину прямої і площини; 2) гострий кут між прямою і площиною.

Розв'язок. 1) Точку перетину прямої і площини знайдемо за формулою (4.23). Для цього визначимо параметр t за формулою (4.24).

В нашому випадку

$$t = -\frac{2 \cdot (-4) + (-1) \cdot 3 + (-4) \cdot (-2) - 13}{2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 6 + (-4) \cdot (-7)} = -\frac{-16}{16} = 1.$$

Тепер знайдемо координати точки перетину прямої і площини

$$x = -4 + 1 \cdot (-3) = -7; \quad y = 3 + 1 \cdot 6 = 9; \quad z = -2 + 1 \cdot (-7) = -9.$$

2) Гострий кут між прямою і площиною визначимо за формулою (4.25)

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Підставляючи числові значення, знаходимо:

$$\sin\varphi = \frac{|2 \cdot (-3) + (-1) \cdot (6) + (-4) \cdot (-7)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-7)^2}} = \frac{16}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{94}} \approx 0{,}3601.$$

$$\varphi \approx 0{,}3684 \text{ рад}; \quad \varphi \approx 21^\circ 7'.$$

Відповідь: 1) $x = -7$; $y = 9$; $z = -9$. 2) $\varphi \approx 21^\circ 7'$.

4.3. Поверхні другого порядку

Загальне рівняння поверхні другого порядку має вигляд:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2\left(a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz\right) +$$
$$+ 2\left(a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z\right) + a_{44} = 0. \qquad (4.29)$$

Множина точок $(x; y; z)$, які задовольняють рівнянню (4.29) може бути: сферою, еліпсоїдом, гіперболоїдом, параболоїдом або конусом.

1°. ***Сфера.*** Це поверхня, яка утворена обертанням кола (або півкола) навколо його діаметру.

Рівняння сфери з центром в точці $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ і радіусом $R > 0$ має вигляд

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 + \left(z - z_0\right)^2 = R^2. \qquad (4.30)$$

Якщо сфера має центр в початку координат, то її рівняння

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \qquad (4.31)$$

називають ***канонічним***.

2°. ***Еліпсоїд.*** Канонічне рівняння еліпсоїда має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (4.32)$$

де $a, b, c > 0$ – півосі еліпсоїда (рис. 4.12). Зокрема, якщо $a = b$, то маємо ***еліпсоїд*** обертання

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (4.33)$$

який утворюється обертанням еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, навколо осі Oz.

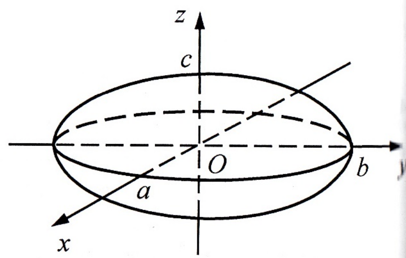


Рис. 4.12

3°. ***Однопорожнинний гіперболоїд.*** Однопорожнинний гіперболоїд, насаджений на вісь Oz, – це множина точок $(x; y; z)$, які задовольняють канонічному рівнянню (рис. 4.13)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (4.34)$$

де a, b, $c > 0$ – півосі однопорожнинного гіперболоїда.

Зокрема, якщо $a = b$, то маємо однопорожнинний гіперболоїд обертання, який утворюється обертанням гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, що лежить у площині xOz навколо осі Oz (уявної осі гіперболи).

Переріз однопорожнинного гіперболоїда (4.34) площиною $z = q$ є еліпсом, а перерізи його площинами $x = h$ і $y = p$ – гіперболами.

Перерізи однопорожнинного гіперболоїда координатними площинами називають ***головними***. З їх допомогою зручно зображувати даний гіперболоїд (рис.4.13).

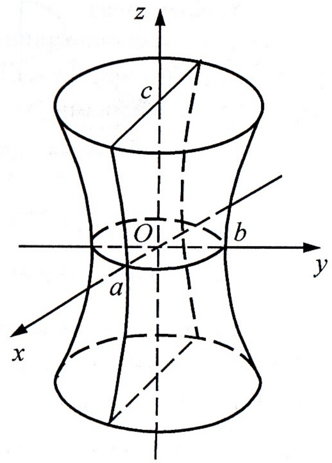


Рис. 4.13

Канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда може також мати вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{або} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Тоді відповідний гіперболоїд є насадженим на вісь Oy або Ox.

4°. ***Двопорожнинний гіперболоїд.*** Двопорожнинний гіперболоїд, насаджений на вісь Oz, – це множина точок $(x; y; z)$, які задовольняють канонічному рівнянню (рис. 4.14)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \qquad (4.35)$$

де a, b, $c > 0$ – задані параметри.

Зокрема, якщо $a = b$, то маємо двопорожнинний гіперболоїд обертання, який утворюється обертан-

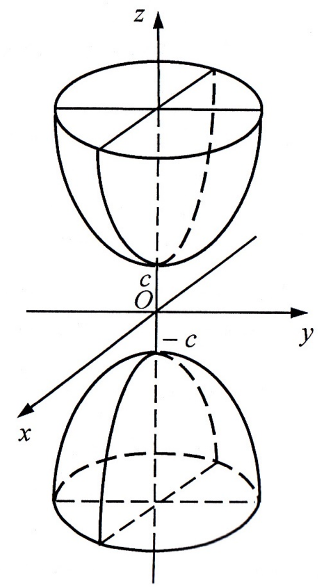


Рис. 4.14

ням гіперболи $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$, що лежить у площині xOz, навколо осі Oz (дійсної осі гіперболи).

Переріз двопорожнинного гіперболоїда (4.35) площиною $z=q$ є порожньою множиною $(q<c)$, або точкою $(q=c)$, або еліпсом $(q>c)$, а перерізи його площинами $x=h$ і $y=p$ – гіперболами.

Канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїда може, також, мати вигляд $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ або $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$.

Тоді відповідний гіперболоїд є насадженим на вісь Oy або Ox.

5°. ***Еліптичний параболоїд.***

Еліптичний параболоїд, насаджений на вісь Oz, – це множина точок $(x;y;z)$, які задовольняють канонічному рівнянню (рис. 4.15)

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}, \qquad (4.36)$$

де a, $b>0$ – задані параметри.

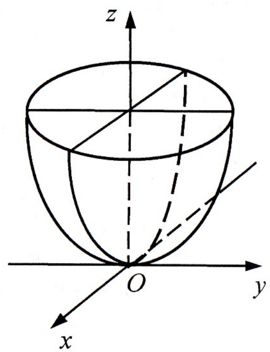


Рис. 4.15

Зокрема, якщо $a=b$, то маємо параболоїд обертання, який утворюється обертанням навколо осі Oz параболи $z=\frac{x^2}{a^2}$, що лежить у площині xOz.

Переріз еліптичного параболоїда (4.36) площиною $z=\gamma$ є або порожньою множиною $(\gamma<0)$, або точкою $(\gamma=0)$, або еліпсом $(\gamma>0)$, а його перерізи площинами $x=0$ і $y=0$ – відповідно, параболами $z=\frac{y^2}{b^2}$ і $z=\frac{x^2}{a^2}$.

Канонічне рівняння еліптичного параболоїда може також мати вигляд $x=\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}$ або $y=\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}$.

Тоді відповідний параболоїд є насадженим на вісь Ox або Oy.

6°. ***Гіперболічний параболоїд***

Гіперболічний параболоїд, насаджений на вісь Oz, – це множина точок $(x;y;z)$, які задовольняють канонічному рівнянню (рис. 4.16)

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}, \qquad (4.37)$$

де a, $b>0$ – задані параметри.

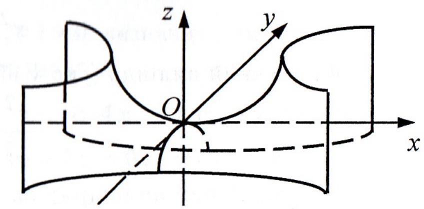


Рис. 4.16

Перерізи цієї поверхні площинами $x=h$ і $y=p$ є параболами, площиною $z=0$ – парою прямих, а площиною $z=q\neq 0$ – гіперболами.

Канонічне рівняння гіперболічного параболоїда може також мати вигляд

$$x=\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2} \quad \text{або} \quad y=\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}.$$

Тоді відповідний параболоїд є насадженим на вісь Ox або Oy.

6°. ***Циліндр.*** Циліндром, або циліндричною поверхнею називають поверхню, утворену прямою (твірною циліндра), що рухається вздовж заданої кривої (напрямної циліндра), яка перпендикулярна заданій площині (наприклад, $z=0$) і, рухаючись, залишається паралельною даній осі (наприклад, осі Oz).

Якщо твірна циліндра перпендикулярна площині xOy, то рівняння циліндра збігається з рівнянням її напрямної.

Деякі типи таких циліндрів приведені на рис. 4.17 – 4.19.

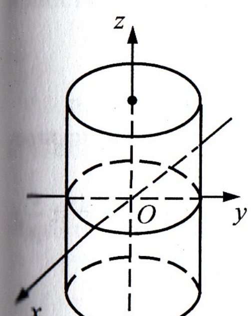


Рис. 4.17

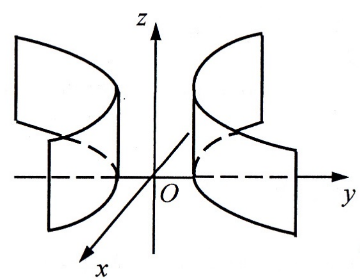


Рис. 4.18

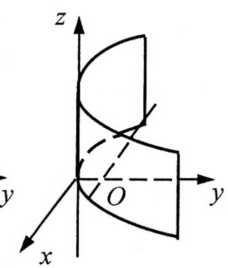


Рис. 4.19

Круговий циліндр має канонічне рівняння:

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (4.38)$$

Еліптичний циліндр (рис.4.17) має канонічне рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (4.39)$$

Гіперболічний циліндр (рис. 4.18) має канонічне рівняння:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1. \qquad (4.40)$$

Параболічний циліндр (рис. 4.19) має канонічне рівняння:

$$x^2=2py. \qquad (4.41)$$

7°. ***Конусом*** або ***конічною поверхнею*** називають поверхню, утворену рухом прямої (твірної конуса), що проходить через задану точку (вершину конуса), і перетинає задану плоску криву (напрямну конуса).

Канонічне рівняння еліптичного конуса (рис. 4.20) має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \qquad (4.42)$$

де a, b, $c>0$ – параметри конуса.

Переріз конуса площиною $z=q$

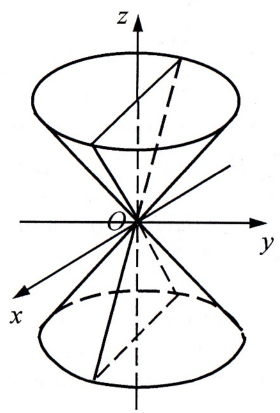


Рис. 4.20

є еліпсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{q^2}{c^2}$, який лежить у цій площині та вважається напрямною конуса.

Зокрема, якщо ця напрямна є колом, тобто $a=b$, то конус називають ***круговим.***

Переріз конуса площинами $x=0$ і $y=0$ є парами прямих $z=\pm\frac{c}{b}y$ і $z=\pm\frac{c}{a}x$, що лежать відповідно у площинах yOz і xOz.

4.3.1. Розв'язок типових прикладів самостійної роботи по розділу 4.3

1. По заданому рівнянню $f(x;y;z)=0$ визначити вид поверхні і зазначити її розташування в системі координат:

а) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0$; *б)* $4x^2+4y^2+5z^2-20=0$; *в)* $5x^2+5y^2-4z^2-20=0$; *г)* $4x^2+y^2-2z=0$; *д)* $x^2+z^2-y=0$; *е)* $y^2-4z-5=0$; *ж)* $y^2-8x+3=0$.

Розв'язок. *а)* Доповнимо до повних квадратів многочлен в лівій частині

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0;$$
$$x^2-2x+1+y^2+4y+4+z^2-6z+9-1-4-9+5=0;$$
$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=3^2.$$

Заміняючи $x'=x-1$; $y'=y+2$; $z'=z-3$, отримуємо, що в системі координат x', y', z', яка зміщена відносно системи x, y, z паралельним переносом в точку з координатами $x_0=1$; $y_0=-2$; $z_0=3$, дана поверхня має більш просте рівняння вигляду

$$(x')^2+(y')^2+(z')^2=3^2.$$

Таким чином, дане рівняння визначає сферу з центром в точці $O'(1;-2;3)$ і радіусом $R=3$.

б) Перенесемо вільний член в праву частину і поділимо на нього рівність. Тоді будемо мати:

$$4x^2+4y^2+5z^2=20; \qquad \frac{x^2+y^2}{5}+\frac{z^2}{4}=1.$$

Дане рівняння визначає еліпсоїд обертання (4.33) навколо осі Oz з півосями $a=b=\sqrt{5}$; $c=2$.

в) Перенесемо вільний член в праву частину и поділимо на нього рівність. Тоді отримаємо:

$$5x^2+5y^2-4z^2=20; \qquad \frac{x^2+y^2}{4}-\frac{z^2}{5}=1.$$

Дане рівняння визначає однопорожнинний гіперболоїд обертання (4.34) навколо осі Oz з півосями $a=b=2$; $c=\sqrt{5}$.

г) Перетворимо вираз відносно z, тоді матимемо:

$$4x^2+y^2-2z=0; \qquad z=\frac{x^2}{1/2}+\frac{y^2}{2}.$$

Дане рівняння представляє еліптичний параболоїд (4.36).

д) Перетворимо вираз відносно y, тоді матимемо

$$x^2+z^2-y=0; \qquad y=x^2+z^2.$$

Неважко помітити, що це рівняння представляє параболоїд обертання з віссю обертання Oy (рис.4.21).

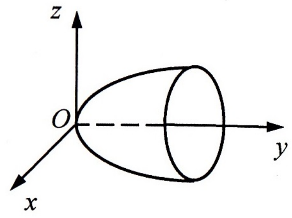


Рис. 4.21

е) Оскільки змінна x відсутня, то рівняння

$$y^2-4z-5=0; \quad z=\frac{1}{4}y^2-\frac{5}{4}$$

представляє параболічний циліндр з твірною, паралельною осі Ox (рис.4.22).

Переріз параболічного циліндра площиною yOz утворює параболу, вершина якої знаходиться в точці з координатою $z=-\dfrac{5}{4}$.

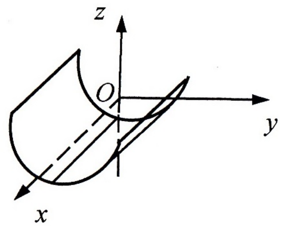


Рис. 4.22

ж) Оскільки змінна z відсутня, то вираз

$$y^2-8x+3; \qquad x=\frac{1}{8}y^2+\frac{3}{8},$$

представляє параболічний циліндр з твірною, паралельною осі Oz (рис. 4.23).

Переріз параболічного циліндра площиною xOy утворює параболу, вершина якої знаходиться в точці з координатою $x=3/8$.

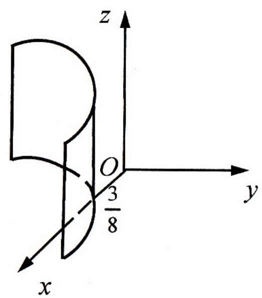


Рис. 4.23

2. Встановити поверхню, яка визначається рівняннями:

а) $4x^2+9y^2+16z^2-16x+36y+32z+59=0$;

б) $x^2-4y^2+4z^2+2x+8y-7=0$;

в) $x^2-16y^2-4z^2-10x-64y+24z-75=0$;

г) $5x^2+2y+3z^2-9=0$.

Розв'язок. *а*) Оскільки рівняння не містить добутків координат, то приведення його до простого вигляду здійснюється за допомогою паралельного переносу. Виділимо повні квадрати:

$$4x^2+9y^2+16z^2-16x+36y+32z+59=$$
$$=4\left(x^2-4x+4\right)+9\left(y^2+4y+4\right)+16\left(z^2+2z+1\right)-16-36-16+59=0;$$
$$4(x-2)^2+9(y+2)^2+16(z+1)^2=9.$$

Вважаючи $x'=x-2$; $y'=y+2$; $z'=z+1$, знаходимо, що в системі координат x',y',z', зміщеній відносно системи $x,y,\ z$ паралельним переносом в точку з координатами $x_0=2$; $y_0=-2$; $z_0=-1$, задана поверхня має більш просте рівняння:

$$4\left(x'\right)^2+9\left(y'\right)^2+16\left(x'\right)^2=9, \quad \text{або} \quad \frac{\left(x'\right)^2}{(3/2)^2}+\frac{\left(y'\right)^2}{1^2}+\frac{\left(z'\right)^2}{(3/4)^2}=1.$$

Таким чином, дане рівняння є еліпсоїдом (4.32) з центром в точці $O'(2;-2;-1)$ і півосями $a=3/2$, $b=1$, $c=3/4$.

б) Рівняння не містить добутків координат. Виділимо повні квадрати:

$$x^2-4y^2+4z^2+2x+8y-7=x^2+2x+1-4\left(y^2-2y+1\right)+4z^2-1+4-7=0;$$
$$(x+1)^2-4(y-1)^2+4z^2=4.$$

Вважаючи $x'=x+1$; $y'=y-1$; $z'=z$, отримаємо рівняння поверхні в системі координат $x',\ y',\ z'$, зміщеній відносно системи $x,\ y,\ z$ паралельним переносом в точку з координатами $O'(-1;1;0)$.

$$\left(x'\right)^2-4\left(y'\right)^2+4\left(z'\right)^2=4; \qquad \frac{\left(x'\right)^2}{2^2}-\left(y'\right)^2+\left(z'\right)^2=1.$$

Оскільки в цьому рівнянні коефіцієнти при $(x^{/})^2$ і $(z^{/})^2$ додатні, а при $(y^{/})^2$ – від'ємний, то дане рівняння визначає однопорожнинний гіперболоїд (4.34), розташований вздовж осі $O^{/}y^{/}$.

в) Виділимо в лівій частині повні квадрати:

$$x^2-16y^2-4z^2-10x-64y+24z-75=$$

$$x^2-10x+25-16\left(y^2+4y+4\right)-4\left(z^2-6z+9\right)-25+64+36-75=0;$$

$$(x-5)^2-16(y+2)^2-4(z-3)^2=0.$$

Вважаючи $x^{/}=x-5;\ y^{/}=y+2;\ z^{/}=z-3,$ отримаємо рівняння поверхні в системі координат $x^{/},\ y^{/},\ z^{/}$, зміщеній відносно системи x, y, z паралельним переносом в точку $O^{/}(5;-2;3)$.

Поділивши рівняння (1) на (-16) отримаємо:

$$\frac{(y^{/})^2}{1}+\frac{(z^{/})^2}{4}-\frac{(x^{/})^2}{16}=0.$$

Це рівняння еліптичного конуса (4.42) з вершиною в точці $O^{/}(5;-2;3)$ і напрямною, яка перпендикулярна осі Ox.

г) Дане рівняння містить дві координати в другій степені і одну в першій степені, отже, рівняння визначає еліптичний параболоїд (4.36). Перепишемо його в вигляді

$$5x^2+2y+3z^2-9=0; \qquad 5x^2+3z^2=-2\left(y-\frac{9}{2}\right).$$

Помічаємо, що вершина параболоїда розташована в точці з координатами $O^{/}\left(0;\frac{9}{2};0\right)$ і його порожнина обернена в сторону від'ємних значень y. Якщо позначити $x^{/}=x;\ y^{/}=y-\dfrac{9}{2};\ z^{/}=z$, то отримаємо канонічне рівняння параболоїда

$$\frac{(x^{/})^2}{2/5}+\frac{(z^{/})^2}{2/3}=-y^{/}.$$

4.3.2. Завдання для самостійної роботи по розділу 4.3

1. По заданому рівнянню $f(x;y;z)=0$ визначити вид поверхні і зазначити її розташування в системі координат. Визначити перерізи цих кривих площинами xOy, xOz, yOz:

а) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$; *б*) $36x^2+9y^2+4z^2-36=0$;
в) $9x^2+4y^2-36z^2-36=0$; *г*) $4x^2+9y^2-36z^2+36=0$;
д) $4x^2+y^2-4z=0$; *е*) $4x^2-9y^2-36z^2=0$.

2. Встановити, яку поверхню визначають наступні рівняння:

а) $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{8}+\dfrac{z^2}{6}=1$; *б*) $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{12}=-1$; *в*) $2x^2+y^2=z$; *г*) $y^2-9=0$.

3. Рівняння поверхні $3x^2+4y^2-8z^2-18x+8y+32z+23=0$ звести до канонічного виду і визначити, яку поверхню воно задає. Знайти головні перерізи цієї поверхні.

4. Записати рівняння поверхні, утвореної при обертанні навколо осі Oz (уявної осі) гіперболи, яка лежить в площині xOz, має центр в початку координат, уявну піввісь $a=4$, ексцентриситет $3/2$. Визначити тип поверхні.

ЗАВДАННЯ ДО РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

Завдання 1

Розв'язати систему алгебраїчних рівнянь: *а*) за формулами Крамера; *б*) матричним способом; *в*) методом Гауса.

1.1. $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

1.2. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

1.3. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 10, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$$

1.4. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 13, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 14. \end{cases}$$

1.5. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases}$$

1.6. $$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = -5, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

1.7. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$$

1.8. $$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$$

1.9. $$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 11. \end{cases}$$

1.10. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

1.11. $$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 13, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 6. \end{cases}$$

1.12. $$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -2, \\ -x_1 + 2x_3 = -3, \\ -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$

1.13. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

1.14. $$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 4. \end{cases}$$

1.15. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

1.16. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ -x_1 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$$

1.17. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

1.18. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

1.19. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

1.20. $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

1.21. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$$

1.22. $$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

1.23. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$$

1.24. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$$

1.25. $$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 2. \end{cases}$$

1.26. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = -4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -9. \end{cases}$$

1.27. $$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$$

1.28. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

1.29. $$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

1.30. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -6, \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 = -10, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$$

Завдання 2

Знайти внутрішні кути $\angle A$, $\angle B$ і $\angle C$ трикутника, заданого вершинами A, B, C і переконатися, що їх сума дорівнює $180°$.

2.1.	$A(1;\ 2;\ -3)$,	$B(0;\ -1;\ 2)$,	$C(3;\ 4;\ 5)$.
2.2.	$A(4;\ -3;\ 2)$,	$B(1;\ 3;\ 2)$,	$C(6;\ 5;\ 4)$.
2.3.	$A(2;\ -1;\ -2)$,	$B(3;\ -4;\ -2)$,	$C(4;\ 1;\ 2)$.
2.4.	$A(-1;\ 2;\ -3)$,	$B(3;\ 4;\ -6)$,	$C(1;\ 1;\ -1)$.
2.5.	$A(-4;\ -2;\ 0)$,	$B(-1;\ -2;\ 4)$,	$C(3;\ 2;\ 1)$.
2.6.	$A(5;\ 3;\ -1)$,	$B(5;\ 2;\ 0)$,	$C(6;\ 4;\ 3)$.
2.7.	$A(1;\ -5;\ 4)$,	$B(0;\ 1;\ -2)$,	$C(2;\ -3;\ 1)$.
2.8.	$A(1;\ -4;\ 5)$,	$B(2;\ 1;\ 4)$,	$C(6;\ 2;\ 3)$.
2.9.	$A(1;\ 2;\ -3)$,	$B(3;\ -1;\ 4)$,	$C(-4;\ 2;\ 1)$.
2.10.	$A(2;\ 3;\ -1)$,	$B(1;\ 5;\ -2)$,	$C(4;\ 1;\ 2)$.
2.11.	$A(2;\ 1;\ -3)$,	$B(-1;\ 1;\ 4)$,	$C(4;\ 2;\ 1)$.
2.12.	$A(-1;\ -2;\ 1)$,	$B(-4;\ -2;\ 5)$,	$C(-8;\ -2;\ 2)$.
2.13.	$A(2;\ -1;\ 1)$,	$B(3;\ 2;\ -2)$,	$C(5;\ -1;\ 2)$.
2.14.	$A(1;\ 2;\ 4)$,	$B(-3;\ -2;\ 5)$,	$C(-2;\ 1;\ 3)$.
2.15.	$A(2;\ -8;\ -1)$,	$B(4;\ -6;\ 0)$,	$C(1;\ -5;\ -1)$.
2.16.	$A(2;\ -6;\ 5)$,	$B(-1;\ 2;\ 1)$,	$C(2;\ -5;\ -1)$.
2.17.	$A(-1;\ 2;\ 3)$,	$B(0;\ -3;\ 4)$,	$C(3;\ 2;\ 5)$.
2.18.	$A(3;\ -6;\ 2)$,	$B(1;\ -1;\ 6)$,	$C(-2;\ 2;\ 3)$.
2.19.	$A(2;\ 3;\ -1)$,	$B(5;\ 1;\ -2)$,	$C(4;\ -1;\ 1)$.
2.20.	$A(1;\ -1;\ 3)$,	$B(-2;\ 4;\ 2)$,	$C(4;\ 2;\ -1)$.
2.21.	$A(-1;\ 2;\ 2)$,	$B(1;\ -3;\ -2)$,	$C(4;\ 3;\ 1)$.
2.22.	$A(1;\ 4;\ 2)$,	$B(-2;\ 1;\ -3)$,	$C(2;\ -1;\ -1)$.
2.23.	$A(1;\ 5;\ -1)$,	$B(3;\ -2;\ 4)$,	$C(2;\ -3;\ 1)$.
2.24.	$A(5;\ -3;\ 1)$,	$B(4;\ 3;\ 2)$,	$C(-1;\ 6;\ 1)$.
2.25.	$A(2;\ 1;\ 4)$,	$B(-1;\ 2;\ 3)$,	$C(5;\ 2;\ -4)$.
2.26.	$A(4;\ -1;\ 2)$,	$B(3;\ 2;\ -1)$,	$C(-1;\ 2;\ -3)$.
2.27.	$A(3;\ 1;\ -1)$,	$B(2;\ 5;\ -2)$,	$C(1;\ -3;\ -2)$.
2.28.	$A(-1;\ 2;\ 3)$,	$B(-2;\ -1;\ 2)$,	$C(5;\ 4;\ 1)$.
2.29.	$A(1;\ -3;\ 2)$,	$B(4;\ 2;\ -1)$,	$C(6;\ 1;\ -4)$.
2.30.	$A(-2;\ 3;\ 1)$,	$B(5;\ 2;\ -1)$,	$C(3;\ 1;\ -3)$.

Завдання 3

Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

3.1. а) $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}$; $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$; $|\vec{p}| = 1$; $|\vec{q}| = 2$; $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

б) $\vec{a} = \{1, 2, 3\}$; $\vec{b} = \{-1, 4, 1\}$.

3.2. а) $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$; $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$; $|\vec{p}| = 4$; $|\vec{q}| = 1$; $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

б) $\vec{a} = \{2, -3, 1\}$; $\vec{b} = \{-1, 2, -3\}$.

3.3. а) $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$; $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}$; $|\vec{p}| = 2$; $|\vec{q}| = 3$; $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$.

б) $\vec{a} = \{-4, 2, 1\}$; $\vec{b} = \{1, -2, -4\}$.

3.4. а) $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}$; $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$; $|\vec{p}| = 3$; $|\vec{q}| = 2$; $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

б) $\vec{a} = \{1, 3, -2\}$; $\vec{b} = \{2, -1, 3\}$.

3.5. а) $\vec{a} = 4\vec{p} + \vec{q}$; $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$; $|\vec{p}| = 5$; $|\vec{q}| = 2$; $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

б) $\vec{a} = \{4, -2, -3\}$; $\vec{b} = \{1, -3, -2\}$.

3.6. а) $\vec{a} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$; $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$; $|\vec{p}| = 1$; $|\vec{q}| = 3$; $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.

б) $\vec{a} = \{5, 4, 6\}$; $\vec{b} = \{1, 2, 3\}$.

3.7. а) $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$; $\vec{b} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$; $|\vec{p}| = 2$; $|\vec{q}| = 5$; $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

б) $\vec{a} = \{6, 7, 8\}$; $\vec{b} = \{4, 5, 6\}$.

3.8. а) $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}$; $\vec{b} = 3\vec{p} + 4\vec{q}$; $|\vec{p}| = 2$; $|\vec{q}| = 3$; $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{\pi}{3}$.

б) $\vec{a} = \{2, -1, -3\}$; $\vec{b} = \{-4, 2, 5\}$.

3.9. а) $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$; $\vec{b} = 4\vec{p} - 5\vec{q}$; $|\vec{p}| = 2$; $|\vec{q}| = 1$; $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{\pi}{2}$.

б) $\vec{a} = \{3, -2, 1\}$; $\vec{b} = \{5, -1, 4\}$.

3.10. а) $\vec{a} = 4\vec{p} - 5\vec{q}$; $\vec{b} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$; $|\vec{p}| = 4$; $|\vec{q}| = 6$; $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{\pi}{4}$.

б) $\vec{a} = \{5, 6, 7\}$; $\vec{b} = \{7, 8, 9\}$.

3.11. а) $\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}$; $\vec{b} = \vec{p} - 4\vec{q}$; $|\vec{p}| = 3$; $|\vec{q}| = 2$; $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{2\pi}{3}$.

б) $\vec{a} = \{1, -2, -5\}$; $\vec{b} = \{-3, 2, 6\}$.

3.12. а) $\vec{a} = 4\vec{p} - 5\vec{q}$; $\vec{b} = 6\vec{p} - 7\vec{q}$; $|\vec{p}| = 4$; $|\vec{q}| = 1$; $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{3\pi}{4}$.

б) $\vec{a} = \{3, 1, -5\}$; $\vec{b} = \{-4, -2, 7\}$.

3.13. а) $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$; $\vec{b} = 5\vec{p} + 6\vec{q}$; $|\vec{p}| = 3$; $|\vec{q}| = 2$; $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{5\pi}{6}$.

б) $\vec{a} = \{4, -2, 6\}$; $\vec{b} = \{-5, 3, -8\}$.

3.14. а) $\vec{a} = 5\vec{p} + 4\vec{q}$; $\vec{b} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$; $|\vec{p}| = 4$; $|\vec{q}| = 1$; $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{2\pi}{3}$.

б) $\vec{a} = \{5, -3, -4\}$; $\vec{b} = \{-6, 4, 7\}$.

3.15. а) $\vec{a} = 6\vec{p} - 7\vec{q}$; $\vec{b} = 5\vec{p} - 4\vec{q}$; $|\vec{p}| = 2$; $|\vec{q}| = 3$; $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{3\pi}{4}$.

б) $\vec{a} = \{6, 7, -4\}$; $\vec{b} = \{-7, -8, 5\}$.

3.16. а) $\vec{a} = 4\vec{p} + 2\vec{q}$; $\vec{b} = 3\vec{p} + 7\vec{q}$; $|\vec{p}| = 3$; $|\vec{q}| = 2$; $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{5\pi}{6}$.

б) $\vec{a} = \{3, -2, 4\}$; $\vec{b} = \{-7, 8, -6\}$.

3.17. а) $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$; $\vec{b} = 5\vec{p} - 6\vec{q}$; $|\vec{p}| = 2$; $|\vec{q}| = 5$; $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{\pi}{3}$.

б) $\vec{a} = \{7, 6, 5\}$; $\vec{b} = \{6, 7, 4\}$.

3.18. а) $\vec{a} = 2\vec{p} + 5\vec{q}$; $\vec{b} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$; $|\vec{p}| = 3$; $|\vec{q}| = 2$; $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{5\pi}{6}$.

б) $\vec{a} = \{3, -2, 1\}$; $\vec{b} = \{-5, 4, -4\}$.

3.19. а) $\vec{a} = 8\vec{p} - 2\vec{q}$; $\vec{b} = 4\vec{p} - 6\vec{q}$; $|\vec{p}| = 1$; $|\vec{q}| = 2$; $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{2\pi}{3}$.

б) $\vec{a} = \{-2, -1, 3\}$; $\vec{b} = \{4, 5, -6\}$.

3.20. а) $\vec{a} = 7\vec{p} - 5\vec{q}$; $\vec{b} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$; $|\vec{p}| = 2$; $|\vec{q}| = 3$; $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{\pi}{6}$.

б) $\vec{a} = \{7, -9, 3\}$; $\vec{b} = \{-8, 10, -4\}$.

3.21. а) $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$; $\vec{b} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$; $|\vec{p}| = \frac{1}{2}$; $|\vec{q}| = 2$; $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{\pi}{2}$.

б) $\vec{a} = \{2, 3, 4\}$; $\vec{b} = \{-1, -5, 6\}$.

3.22. а) $\vec{a} = 3\vec{p} + 4\vec{q}$; $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$; $|\vec{p}| = 2$; $|\vec{q}| = 3$; $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{\pi}{4}$.

б) $\vec{a} = \{3, -2, 1\}$; $\vec{b} = \{-1, 2, -3\}$.

3.23. а) $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$; $\vec{b} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$; $|\vec{p}| = 1$; $|\vec{q}| = 2$; $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{3\pi}{4}$.

б) $\vec{a} = \{1, -3, 2\}$; $\vec{b} = \{5, -2, 4\}$.

3.24. *а)* $\vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q}$; $\vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$; $|\vec{p}| = 1$; $|\vec{q}| = 2$; $\left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

б) $\vec{a} = \{2, -3, 1\}$; $\vec{b} = \{4, 3, -5\}$.

3.25. *а)* $\vec{a} = 5\vec{p} - 2\vec{q}$; $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}$; $|\vec{p}| = 3$; $|\vec{q}| = 4$; $\left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

б) $\vec{a} = \{3, 1, -4\}$; $\vec{b} = \{2, -3, 5\}$.

3.26. *а)* $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$; $\vec{b} = 4\vec{p} - \vec{q}$; $|\vec{p}| = 2$; $|\vec{q}| = 3$; $\left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

б) $\vec{a} = \{1, -2, 4\}$; $\vec{b} = \{-5, 6, 3\}$.

3.27. *а)* $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$; $\vec{b} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$; $|\vec{p}| = 2$; $|\vec{q}| = 5$; $\left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

б) $\vec{a} = \{7, 1, 3\}$; $\vec{b} = \{6, 4, 2\}$.

3.28. *а)* $\vec{a} = 4\vec{p} + \vec{q}$; $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$; $|\vec{p}| = 3$; $|\vec{q}| = 2$; $\left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

б) $\vec{a} = \{9, 7, 5\}$; $\vec{b} = \{3, -4, 1\}$.

3.29. *а)* $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}$; $\vec{b} = 3\vec{p} + 4\vec{q}$; $|\vec{p}| = 5$; $|\vec{q}| = 3$; $\left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

б) $\vec{a} = \{1, 3, -2\}$; $\vec{b} = \{4, -5, 6\}$.

3.30. *а)* $\vec{a} = 5\vec{p} - 3\vec{q}$; $\vec{b} = 4\vec{p} - 2\vec{q}$; $|\vec{p}| = 1$; $|\vec{q}| = 2$; $\left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

б) $\vec{a} = \{7, 5, -1\}$; $\vec{b} = \{6, 3, 4\}$.

Завдання 4

Обчислити об'єм тетраедра V_T з вершинами A, B, C, D і площу S_{ABC} його грані ABC, якщо:

4.1. $A(1;\ 3;\ 5)$, $B(5;\ 2;\ 8)$, $C(-1;\ 0;\ 1)$, $D(4;\ 7;\ -3)$.
4.2. $A(-4;\ 2;\ 5)$, $B(2;\ -3;\ 0)$, $C(-9;\ 5;\ 8)$, $D(5;\ 2;\ -4)$.
4.3. $A(7;\ 2;\ 4)$, $B(6;\ -1;\ -2)$, $C(3;\ 5;\ 1)$, $D(4;\ 9;\ -3)$.
4.4. $A(2;\ 1;\ 3)$, $B(-1;\ 5;\ -2)$, $C(7;\ -3;\ 2)$, $D(-6;\ 3;\ 6)$.
4.5. $A(-1;\ -5;\ 2)$, $B(-6;\ 0;\ -3)$, $C(3;\ 2;\ -1)$, $D(4;\ 6;\ -7)$.
4.6. $A(0;\ -1;\ -2)$, $B(-2;\ 3;\ 5)$, $C(1;\ -5;\ -8)$, $D(4;\ -6;\ 3)$.
4.7. $A(5;\ 2;\ 3)$, $B(2;\ 5;\ 1)$, $C(1;\ 7;\ -4)$, $D(-3;\ 4;\ 9)$.
4.8. $A(-2;\ 0;\ 4)$, $B(-1;\ 7;\ 1)$, $C(4;\ 8;\ 3)$, $D(1;\ -4;\ 6)$.
4.9. $A(2;\ -1;\ 3)$, $B(1;\ 2;\ -1)$, $C(3;\ -7;\ 1)$, $D(-4;\ 2;\ 5)$.
4.10. $A(4;\ 1;\ 9)$, $B(-1;\ 5;\ 3)$, $C(2;\ -2;\ 4)$, $D(-1;\ 0;\ 7)$.
4.11. $A(7;\ -2;\ 1)$, $B(3;\ 0;\ -3)$, $C(5;\ 2;\ 6)$, $D(9;\ 4;\ -8)$.
4.12. $A(2;\ 3;\ 1)$, $B(4;\ 1;\ -2)$, $C(6;\ 3;\ -7)$, $D(7;\ 5;\ -3)$.
4.13. $A(9;\ 4;\ -1)$, $B(2;\ 3;\ 1)$, $C(3;\ 2;\ -4)$, $D(5;\ -2;\ 7)$.
4.14. $A(1;\ 5;\ -7)$, $B(-3;\ 6;\ 4)$, $C(-2;\ 9;\ 3)$, $D(-4;\ 8;\ 5)$.
4.15. $A(-3;\ 4;\ 7)$, $B(1;\ -6;\ 2)$, $C(3;\ -2;\ 0)$, $D(2;\ 5;\ 8)$.
4.16. $A(4;\ -1;\ 3)$, $B(-2;\ 1;\ 5)$, $C(0;\ -7;\ -1)$, $D(1;\ 2;\ 9)$.
4.17. $A(-1;\ 3;\ 2)$, $B(1;\ 4;\ -1)$, $C(6;\ -2;\ 1)$, $D(3;\ 1;\ 8)$.
4.18. $A(3;\ 5;\ 1)$, $B(-2;\ 3;\ -4)$, $C(7;\ 0;\ -3)$, $D(1;\ -1;\ 4)$.
4.19. $A(1;\ -3;\ 5)$, $B(-4;\ 1;\ 2)$, $C(2;\ -1;\ 7)$, $D(6;\ 3;\ -2)$.
4.20. $A(2;\ 4;\ 6)$, $B(4;\ -1;\ 3)$, $C(3;\ 1;\ 5)$, $D(-4;\ 7;\ 8)$.
4.21. $A(4;\ 1;\ 7)$, $B(3;\ 5;\ 2)$, $C(5;\ -2;\ 6)$, $D(2;\ -1;\ 3)$.
4.22. $A(-3;\ 2;\ 5)$, $B(1;\ -4;\ 6)$, $C(4;\ 7;\ -2)$, $D(3;\ 6;\ 2)$.
4.23. $A(5;\ -1;\ 3)$, $B(4;\ 1;\ -2)$, $C(2;\ 3;\ 7)$, $D(6;\ -1;\ 8)$.

4.24. $A(4;\ 2;\ 3)$, $B(7;\ -1;\ 6)$, $C(5;\ -3;\ 1)$, $D(3;\ 8;\ -2)$.

4.25. $A(3;\ -5;\ 1)$, $B(4;\ -2;\ 3)$, $C(-1;\ 6;\ 2)$, $D(8;\ -7;\ 5)$.

4.26. $A(2;\ -1;\ 4)$, $B(-5;\ 1;\ 6)$, $C(-8;\ 3;\ -4)$, $D(1;\ -2;\ 7)$.

4.27. $A(1;\ 3;\ 5)$, $B(7;\ -2;\ 8)$, $C(-1;\ 6;\ 9)$, $D(3;\ 7;\ 2)$.

4.28. $A(5;\ -2;\ 4)$, $B(-3;\ 1;\ 6)$, $C(2;\ 3;\ 4)$, $D(6;\ -2;\ -7)$.

4.29. $A(6;\ 1;\ 3)$, $B(2;\ 4;\ -1)$, $C(7;\ -9;\ 2)$, $D(-3;\ 5;\ 8)$.

4.30. $A(7;\ 2;\ 5)$, $B(3;\ 1;\ -4)$, $C(9;\ -2;\ 6)$, $D(-5;\ 3;\ -1)$.

Завдання 5

Задано координати вершин трикутника A, B, C.

Знайти: 1) довжину сторони AB; 2) рівняння сторін AB, BC і їх кутові коефіцієнти; 3) кут B в градусах; 4) рівняння висоти CD і її довжину; 5) рівняння медіани AE і координати точки K перетину цієї медіани з висотою CD; 6) рівняння прямої KF, яка проходить через точку K паралельно стороні AB. Зробити рисунок.

5.1. $A(-10;3)$, $B(8;-6)$, $C(0;8)$.

5.2. $A(-9;8)$, $B(6;-7)$, $C(4;9)$.

5.3. $A(-7;10)$, $B(2;-8)$, $C(4;8)$.

5.4. $A(-8;8)$, $B(7;-7)$, $C(5;9)$.

5.5. $A(-9;7)$, $B(3;-5)$, $C(9;9)$.

5.6. $A(-8;5)$, $B(10;-4)$, $C(2;10)$.

5.7. $A(-9;6)$, $B(6;-9)$, $C(4;7)$.

5.8. $A(-9;10)$, $B(0;-8)$, $C(2;8)$.

5.9. $A(-8;5)$, $B(7;-10)$, $C(5;6)$.

5.10. $A(-9;3)$, $B(3;-9)$, $C(9;5)$.

5.11. $A(-10;1)$, $B(8;-8)$, $C(0;6)$.

5.12. $A(-7;5)$, $B(8;-10)$, $C(6;6)$.

5.13. $A(-9;8)$, $B(0;-10)$, $C(2;6)$.

5.14. $A(-6;8)$, $B(9;-7)$, $C(7;9)$.

5.15. $A(-8;6)$, $B(4;-6)$, $C(10;8)$.

5.16. $A(-8;3)$, $B(10;-6)$, $C(2;8)$.

5.17. $A(-7;9)$, $B(8;-6)$, $C(6;10)$.

5.18. $A(-5;10)$, $B(4;-8)$, $C(6;8)$.

5.19. $A(-10;5)$, $B(5;-10)$, $C(3;6)$.

5.20. $A(-8;4)$, $B(4;-8)$, $C(10;6)$.

5.21. $A(-10;-1)$, $B(8;-10)$, $C(0;4)$.

5.22. $A(-7;7)$, $B(8;-8)$, $C(6;8)$.

5.23. $A(-7;8)$, $B(2;-10)$, $C(4;6)$.

5.24. $A(-10;8)$, $B(5;-7)$, $C(3;9)$.

5.25. $A(-9;5)$, $B(3;-7)$, $C(9;7)$.

5.26. $A(-8;1)$, $B(10;-8)$, $C(2;6)$.

5.27. $A(-9;5)$, $B(6;-10)$, $C(4;6)$.

5.28. $A(-5;8)$, $B(4;-10)$, $C(6;6)$.

5.29. $A(-6;5)$, $B(9;-10)$, $C(7;6)$.

5.30. $A(-8;8)$, $B(4;-4)$, $C(10;10)$.

Завдання 6

1. Привести до канонічного виду рівняння кривої. Знайти координати її центра, радіус і побудувати криву.

2. Скласти рівняння геометричного місця точок, відношення відстаней яких до точки $A(x;0)$ та до прямої $x = c$ дорівнює числу ε. Отримане рівняння привести до канонічного виду, знайти півосі a і b, координати фокусів F_1, F_2 і побудувати криву.

6.1. 1. $4x^2+4y^2-12x+32y+57=0$. 2. $A(1;\ 0)$, $x=2$, $\varepsilon=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

6.2. 1. $16x^2+16y^2+64x-8y+1=0$. 2. $A(\sqrt{2};\ 0)$, $x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

6.3. 1. $4x^2+4y^2-8x+4y-31=0$. 2. $A(1;\ 0)$, $x=3$, $\varepsilon=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

6.4. 1. $9x^2+9y^2+6x+54y+46=0$. 2. $A(\sqrt{3};\ 0)$, $x=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

6.5. 1. $4x^2+4y^2+24x+12y+9=0$. 2. $A(\sqrt{2};\,0)$, $x=\dfrac{4}{\sqrt{2}}$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

6.6. 1. $16x^2+16y^2-8x+64y-79=0$. 2. $A(1;\,0)$, $x=4$, $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$.

6.7. 1. $9x^2+9y^2-36x+6y-44=0$. 2. $A(\sqrt{3};\,0)$, $x=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

6.8. 1. $4x^2+4y^2-4x-24y+21=0$. 2. $A(\sqrt{2};\,0)$, $x=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

6.9. 1. $x^2+y^2+6x+4y-3=0$. 2. $A(2;\,0)$, $x=3$, $\varepsilon=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$.

6.10. 1. $16x^2+16y^2+48x-16y-24=0$. 2. $A(\sqrt{3};\,0)$, $x=\dfrac{6}{\sqrt{3}}$, $\varepsilon=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

6.11. 1. $4x^2+4y^2+24x+4y+21=0$. 2. $A(\sqrt{2};\,0)$, $x=\dfrac{6}{\sqrt{2}}$, $\varepsilon=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

6.12. 1. $9x^2+9y^2-6x+36y-44=0$. 2. $A(2;\,0)$, $x=\dfrac{7}{2}$, $\varepsilon=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

6.13. 1. $81x^2+81y^2+54x+54y-63=0$. 2. $A(\sqrt{3};\,0)$, $x=\dfrac{7}{\sqrt{3}}$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

6.14. 1. $x^2+y^2+8x-10y+32=0$. 2. $A(\sqrt{2};\,0)$, $x=\dfrac{7}{\sqrt{2}}$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$.

6.15. 1. $9x^2+9y^2+54x-6y+1=0$. 2. $A(\sqrt{5};\,0)$, $x=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}$.

6.16. 1. $4x^2+4y^2+4x-40y+85=0$. 2. $A(2;\,0)$, $x=2$, $\varepsilon=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

6.17. 1. $16x^2+16y^2-96x-8y+1=0$. 2. $A(\sqrt{3};\,0)$, $x=\dfrac{8}{\sqrt{3}}$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$.

6.18. 1. $4x^2+4y^2+40x-4y+1=0$. 2. $A(\sqrt{2};\,0)$, $x=\dfrac{8}{\sqrt{2}}$, $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$.

6.19. 1. $64x^2+64y^2-32x+64y-44=0$. 2. $A(\sqrt{6};\,0)$, $x=\dfrac{9}{\sqrt{6}}$, $\varepsilon=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$.

6.20. 1. $25x^2+25y^2+10x+50y-74=0$. 2. $A(\sqrt{5};\,0)$, $x=\dfrac{9}{\sqrt{5}}$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

6.21. 1. $16x^2+16y^2+8x-64y+1=0$. 2. $A(2;\,0)$, $x=\dfrac{9}{2}$, $\varepsilon=\dfrac{2}{3}$.

6.22. 1. $x^2+y^2+4x-2y+1=0$. 2. $A(\sqrt{3};\,0)$, $x=\dfrac{9}{\sqrt{3}}$, $\varepsilon=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

6.23. 1. $4x^2+4y^2+12x-16y-11=0$. 2. $A(\sqrt{2};\,0)$, $x=\dfrac{9}{\sqrt{2}}$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

6.24. 1. $4x^2+4y^2+8x-12y-3=0$. 2. $A(\sqrt{6};\,0)$, $x=\dfrac{10}{\sqrt{6}}$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

6.25. 1. $4x^2+4y^2-32x+20y+53=0$. 2. $A(\sqrt{5};\,0)$, $x=\dfrac{10}{\sqrt{5}}$, $\varepsilon=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

6.26. 1. $4x^2+4y^2+20x-8y+13=0$. 2. $A(2;\,0)$, $x=5$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

6.27. 1. $4x^2+4y^2+16x-12y+9=0$. 2. $A(\sqrt{3};\,0)$, $x=\dfrac{10}{\sqrt{3}}$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$.

6.28. 1. $16x^2+16y^2-48x+16y-24=0$. 2. $A(\sqrt{6};\,0)$, $x=\dfrac{11}{\sqrt{6}}$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}}$.

6.29. 1. $4x^2+4y^2-32x-20y+73=0$. 2. $A(\sqrt{5};\,0)$, $x=\dfrac{11}{\sqrt{5}}$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$.

6.30. 1. $4x^2+4y^2+20x+16y+25=0$. 2. $A(2;\,0)$, $x=\dfrac{11}{2}$, $\varepsilon=\dfrac{2}{\sqrt{11}}$.

Завдання 7

1. Скласти канонічне рівняння геометричного місця точок, відношення відстаней яких до точки $A(x_A, 0)$ та до прямої $x = b$ дорівнює λ. Знайти координати фокусів F, вершини C, ексцентриситет ε, і рівняння асимптот кривої. Визначити координати точок B перетину кривої з колом, центр якого знаходиться в початку координат, а коло проходить через її фокуси. Побудувати асимптоти, криву і коло.

2. Привести рівняння кривої до канонічного виду. Знайти параметр p кривої, координати вершини C, фокуса F і рівняння директриси. Побудувати криву та її директрису.

7.1. 1. $A(2,\ 0)$, $x = 0{,}5$, $\lambda = 2$. 2. $x^2 - 4x - 4y + 12 = 0$.

7.2. 1. $A(2,\ 0)$, $x = 1$, $\lambda = \sqrt{2}$. 2. $x^2 - 2x + 4y - 11 = 0$.

7.3. 1. $A(2,\ 0)$, $x = 1{,}5$, $\lambda = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. 2. $x^2 + 8x - 8y + 8 = 0$.

7.4. 1. $A(3,\ 0)$, $x = 1$, $\lambda = \sqrt{3}$. 2. $x^2 + 6x - 8y - 15 = 0$.

7.5. 1. $A(3,\ 0)$, $x = 2$, $\lambda = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. 2. $x^2 + 6x - 4y + 13 = 0$.

7.6. 1. $A(4,\ 0)$, $x = 1$, $\lambda = 2$. 2. $x^2 + 2x - 4y + 9 = 0$.

7.7. 1. $A(4,\ 0)$, $x = 1{,}5$, $\lambda = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. 2. $x^2 + 4x + 8y - 4 = 0$.

7.8. 1. $A(4,\ 0)$, $x = 2$, $\lambda = \sqrt{2}$. 2. $x^2 - 2x + 8y + 9 = 0$.

7.9. 1. $A(4,\ 0)$, $x = 2{,}5$, $\lambda = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$. 2. $x^2 - 4x + 4y + 12 = 0$.

7.10. 1. $A(4,\ 0)$, $x = 3$, $\lambda = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. 2. $x^2 - 6x - 8y - 15 = 0$.

7.11. 1. $A(5,\ 0)$, $x = 1$, $\lambda = \sqrt{5}$. 2. $x^2 - 2x - 4y + 5 = 0$.

7.12. 1. $A(5,\ 0)$, $x = 2$, $\lambda = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$. 2. $x^2 - 4x + 8y + 12 = 0$.

7.13. 1. $A(5,\ 0)$, $x = 3$, $\lambda = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$. 2. $x^2 - 6x + 4y + 17 = 0$.

7.14. 1. $A(5,\ 0)$, $x = 4$, $\lambda = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. 2. $x^2 + 2x - 8y - 23 = 0$.

7.15. 1. $A(6,\ 0)$, $x = 1$, $\lambda = \sqrt{6}$. 2. $x^2 - 4x - 4y + 8 = 0$.

7.16. 1. $A(6,\ 0)$, $x = 1{,}5$, $\lambda = 2$. 2. $x^2 - 6x + 8y + 1 = 0$.

7.17. 1. $A(6,\ 0)$, $x = 2$, $\lambda = \sqrt{3}$. 2. $x^2 + 2x + 4y + 9 = 0$.

7.18. 1. $A(6,\ 0)$, $x = 3$, $\lambda = \sqrt{2}$. 2. $x^2 + 4x - 8y - 20 = 0$.

7.19. 1. $A(6,\ 0)$, $x = 3{,}5$, $\lambda = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. 2. $x^2 - 6x - 4y + 13 = 0$.

7.20. 1. $A(6,\ 0)$, $x = 4$, $\lambda = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. 2. $x^2 + 2x + 4y + 5 = 0$.

7.21. 1. $A(6,\ 0)$, $x = 5$, $\lambda = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. 2. $x^2 + 4x + 4y + 12 = 0$.

7.22. 1. $A(7,\ 0)$, $x = 1$, $\lambda = \sqrt{7}$. 2. $x^2 + 6x - 8y - 15 = 0$.

7.23. 1. $A(7,\ 0)$, $x = 2$, $\lambda = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$. 2. $x^2 + 2x - 4y + 5 = 0$.

7.24. 1. $A(7,\ 0)$, $x = 3$, $\lambda = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$. 2. $x^2 + 4x + 8y + 20 = 0$.

7.25. 1. $A(7,\ 0)$, $x = 4$, $\lambda = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$. 2. $x^2 + 6x + 4y + 17 = 0$.

7.26. 1. $A(8,\ 0)$, $x = 2$, $\lambda = 2$. 2. $x^2 - 2x - 8y - 23 = 0$.

7.27. 1. $A(8,\ 0)$, $x = 3$, $\lambda = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. 2. $x^2 + 4x - 4y + 8 = 0$.

7.28. 1. $A(8,\ 0)$, $x = 4$, $\lambda = \sqrt{2}$. 2. $x^2 + 6x + 8y + 25 = 0$.

7.29. 1. $A(8,\ 0)$, $x = 5$, $\lambda = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$. 2. $x^2 - 2x + 4y + 9 = 0$.

7.30. 1. $A(8,\ 0)$, $x = 5$, $\lambda = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. 2. $x^2 - 4x - 8y - 20 = 0$.

Завдання 8

Задано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4. Необхідно:

1. Написати рівняння площини: *а*) Π_1 – яка проходить через точку M_4 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$; *б*) Π_2 – яка проходить через точку M_4 паралельно векторам $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_3}$ *в*) Π_3 – яка проходить через точки $M_1M_2M_3$.

2. Перевірити, чи виконується умова перпендикулярності площин Π_1, Π_2 і паралельності площин Π_2, Π_3.

3. Найти відстань d від точки M_4 до площини Π_3.

8.1. $M_1(2;\ 1;\ 5)$, $M_2(6;\ -1;\ 7)$, $M_3(3;\ 1;\ 4)$, $M_4(-8;\ 2;\ -9)$.

8.2. $M_1(5;\ -1;\ -4)$, $M_2(9;\ 3;\ -6)$, $M_3(7;\ 4;\ -8)$, $M_4(5;\ 1;\ 3)$.

8.3. $M_1(1;\ -4;\ 3)$, $M_2(6;\ 1;\ -2)$, $M_3(3;\ 2;\ 4)$, $M_4(-5;\ 1;\ -3)$.

8.4. $M_1(2;\ 3;\ 5)$, $M_2(1;\ 4;\ -3)$, $M_3(4;\ 5;\ 1)$, $M_4(6;\ -7;\ 3)$.

8.5. $M_1(-1;\ 1;\ -5)$, $M_2(3;\ 5;\ -7)$, $M_3(1;\ 6;\ -3)$, $M_4(7;\ 2;\ 4)$.

8.6. $M_1(-4;\ 2;\ -1)$, $M_2(1;\ 6;\ -2)$, $M_3(-3;\ 5;\ 1)$, $M_4(-7;\ -9;\ 6)$.

8.7. $M_1(2;\ -4;\ 3)$, $M_2(1;\ 5;\ -2)$, $M_3(4;\ 2;\ 1)$, $M_4(9;\ -1;\ -5)$.

8.8. $M_1(-3;\ 4;\ -5)$, $M_2(1;\ -2;\ 3)$, $M_3(2;\ -1;\ 5)$, $M_4(9;\ 2;\ -4)$.

8.9. $M_1(2;\ -1;\ 4)$, $M_2(2;\ 4;\ -1)$, $M_3(4;\ 7;\ -2)$, $M_4(5;\ -1;\ 8)$.

8.10. $M_1(1;\ -3;\ 4)$, $M_2(2;\ 1;\ 6)$, $M_3(-1;\ -4;\ 3)$, $M_4(7;\ -2;\ -5)$.

8.11. $M_1(1;\ -4;\ 3)$, $M_2(2;\ 3;\ -2)$, $M_3(3;\ 2;\ -1)$, $M_4(6;\ -7;\ -5)$.

8.12. $M_1(3;\ 2;\ -1)$, $M_2(5;\ 6;\ -2)$, $M_3(1;\ 2;\ -3)$, $M_4(-7;\ -1;\ 5)$.

8.13. $M_1(5;\ -2;\ 3)$, $M_2(1;\ 5;\ 2)$, $M_3(3;\ -2;\ -1)$, $M_4(-5;\ -7;\ 1)$.

8.14. $M_1(-2;\ 1;\ 4)$, $M_2(3;\ 2;\ 1)$, $M_3(1;\ -4;\ 3)$, $M_4(-8;\ 7;\ -5)$.

8.15. $M_1(4;\ -1;\ 3)$, $M_2(3;\ -4;\ 2)$, $M_3(2;\ -3;\ 4)$, $M_4(-7;\ 3;\ -2)$.

8.16. $M_1(-3;\ 1;\ 2)$, $M_2(2;\ 5;\ -4)$, $M_3(1;\ 3;\ -2)$, $M_4(-3;\ 9;\ 8)$.

8.17. $M_1(1;\ 3;\ 4)$, $M_2(-2;\ 6;\ 2)$, $M_3(2;\ 4;\ 3)$, $M_4(-1;\ 7;\ 9)$.

8.18. $M_1(2;\ -4;\ 3)$, $M_2(-1;\ 3;\ -5)$, $M_3(-2;\ 2;\ -1)$, $M_4(6;\ 5;\ 7)$.

8.19. $M_1(3;\ -2;\ 1)$, $M_2(2;\ 4;\ -3)$, $M_3(-1;\ 3;\ 4)$, $M_4(8;\ -1;\ 9)$.

8.20. $M_1(-4;\ 1;\ 3)$, $M_2(1;\ 3;\ -6)$, $M_3(-2;\ 5;\ 1)$, $M_4(3;\ -1;\ 7)$.

8.21. $M_1(4;\ -1;\ 3)$, $M_2(8;\ 3;\ 1)$, $M_3(2;\ 6;\ -2)$, $M_4(9;\ -5;\ -4)$.

8.22. $M_1(4;\ 3;\ 2)$, $M_2(5;\ 1;\ 4)$, $M_3(2;\ 3;\ 6)$, $M_4(1;\ -7;\ -5)$.

8.23. $M_1(3;\ 4;\ 1)$, $M_2(2;\ 3;\ -2)$, $M_3(5;\ 4;\ 2)$, $M_4(1;\ -6;\ 5)$.

8.24. $M_1(4;\ -1;\ 3)$, $M_2(8;\ 3;\ -1)$, $M_3(5;\ 6;\ 4)$, $M_4(-6;\ 7;\ 2)$.

8.25. $M_1(-2;\ 4;\ 1)$, $M_2(2;\ 8;\ -1)$, $M_3(3;\ 9;\ -9)$, $M_4(7;\ 2;\ 6)$.

8.26. $M_1(4;\ 3;\ 1)$, $M_2(5;\ 7;\ -1)$, $M_3(3;\ 4;\ -2)$, $M_4(9;\ -6;\ 3)$.

8.27. $M_1(-2;\ 5;\ -4)$, $M_2(2;\ 1;\ 4)$, $M_3(3;\ 2;\ 4)$, $M_4(6;\ -1;\ -7)$.

8.28. $M_1(1;\ -3;\ 4)$, $M_2(2;\ 6;\ -1)$, $M_3(5;\ 3;\ 4)$, $M_4(8;\ -7;\ 1)$.

8.29. $M_1(2;\ -5;\ 4)$, $M_2(3;\ 4;\ -5)$, $M_3(4;\ 3;\ 6)$, $M_4(9;\ -7;\ 4)$.

8.30. $M_1(2;\ -2;\ 3)$, $M_2(3;\ 2;\ 8)$, $M_3(1;\ -3;\ 2)$, $M_4(5;\ 9;\ 1)$.

Завдання 9

Задана пряма загальними рівняннями і координати двох точок. Необхідно: 1. Написати канонічні рівняння: *а*) прямої, яка задана перетином двох площин, *б*) прямої, що проходить через задані точки. 2. Знайти гострий кут між цими прямими.

9.1. $\begin{cases} -2x + y - z - 3 = 0, \\ x - y - 3z - 5 = 0. \end{cases}$ $M_1(-4; 2; -3)$, $M_2(-1; -3; 5)$.

9.2. $\begin{cases} x + 2y + z - 9 = 0, \\ x - y + 3z + 1 = 0. \end{cases}$ $M_1(2; 4; -9)$, $M_2(-1; 3; -1)$.

9.3. $\begin{cases} 4x - y + 3z + 6 = 0, \\ 3x + y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$ $M_1(-2; 3; 4)$, $M_2(-1; 2; -3)$.

9.4. $\begin{cases} x - y + 2z - 4 = 0, \\ -2x + 3y - 2z + 8 = 0. \end{cases}$ $M_1(-2; 2; 1)$, $M_2(-3; -2; 2)$.

9.5. $\begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0, \\ 3x + y - z + 5 = 0. \end{cases}$ $M_1(4; -2; 1)$, $M_2(-3; -1; -5)$.

9.6. $\begin{cases} x - 2y + z - 7 = 0, \\ 3x + y + 2z + 6 = 0. \end{cases}$ $M_1(2; -4; -7)$, $M_2(-3; 2; -6)$.

9.7. $\begin{cases} 2x - 3y - 2z - 3 = 0, \\ x + 3y + z = 0. \end{cases}$ $M_1(4; -6; -3)$, $M_2(-1; 1; 0)$.

9.8. $\begin{cases} x + 2y - 3z + 12 = 0, \\ 2x + y - z + 5 = 0. \end{cases}$ $M_1(4; -6; 1)$, $M_2(-1; -1; -2)$.

9.9. $\begin{cases} 3x - y + 2z + 8 = 0, \\ 2x + y - z - 5 = 0. \end{cases}$

$M_1(-2; 2; 3)$, $M_2(-1; -1; -2)$.

9.10. $\begin{cases} -2x + 3y + z + 2 = 0, \\ x + 3y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$

$M_1(6; 1; -2)$, $M_2(-3; 2; -1)$.

9.11. $\begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0, \\ 3x + y + 5z - 2 = 0. \end{cases}$

$M_1(-2; 1; 2)$, $M_2(-1; 5; -3)$.

9.12. $\begin{cases} x + y - z - 3 = 0, \\ 4x + 3y + 5z - 1 = 0. \end{cases}$

$M_1(2; -1; 1)$, $M_2(-3; 5; -4)$.

9.13. $\begin{cases} 3x + 2y + z - 8 = 0, \\ -2x + y + 2z - 7 = 0. \end{cases}$

$M_1(4; 1; 3)$, $M_2(-1; 2; 2)$.

9.14. $\begin{cases} -2x + y - z + 2 = 0, \\ x + 4y - 2z + 6 = 0. \end{cases}$

$M_1(2; -1; -2)$, $M_2(-4; -2; -1)$.

9.15. $\begin{cases} 2x - 3y + z - 6 = 0, \\ x - y - 2z + 5 = 0. \end{cases}$

$M_1(-6; 1; 2)$, $M_2(1; -2; -1)$.

9.16. $\begin{cases} 3x - 2y + z - 1 = 0, \\ -x + y + 2z - 7 = 0. \end{cases}$

$M_1(-4; 1; 3)$, $M_2(-1; 2; 1)$.

9.17. $\begin{cases} x - 2y - z - 7 = 0, \\ 2x + y - 3z + 7 = 0. \end{cases}$

$M_1(-4; -1; 1)$, $M_2(-1; -3; -2)$.

9.18. $\begin{cases} x + 2y - 3z - 1 = 0, \\ 2x + 2y + z - 5 = 0. \end{cases}$

$M_1(4; -3; 1)$, $M_2(-2; 1; -2)$.

9.19. $\begin{cases} x - 2y - z + 1 = 0, \\ -3x + y + 2z - 5 = 0. \end{cases}$

$M_1(-4; -1; 1)$, $M_2(-1; 2; 3)$.

9.20. $\begin{cases} x - 2y + z - 8 = 0, \\ -3x + y - 4z + 11 = 0. \end{cases}$

$M_1(-4; 1; 1)$, $M_2(-1; -4; 3)$.

9.21. $\begin{cases} 2x - y - z - 1 = 0, \\ 3x + 2y + z = 0. \end{cases}$

$M_1(4; -2; -1)$, $M_2(-3; 1; 0)$.

9.22. $\begin{cases} 3x + 2y - z - 7 = 0, \\ x - y + 2z + 2 = 0. \end{cases}$

$M_1(6; 4; -7)$, $M_2(-1; 2; -2)$.

9.23. $\begin{cases} x - 2y + 2z - 2 = 0, \\ -x + 3y - z - 3 = 0. \end{cases}$

$M_1(2; -4; -2)$, $M_2(1; -1; 3)$.

9.24. $\begin{cases} 2x + y - z - 4 = 0, \\ x - y + 2z + 3 = 0. \end{cases}$

$M_1(2; -2; 2)$, $M_2(1; 2; -1)$.

9.25. $\begin{cases} 2x + y - z + 5 = 0, \\ -5x + y - 2z + 9 = 0. \end{cases}$

$M_1(2; -1; 2)$, $M_2(-1; -2; 5)$.

9.26. $\begin{cases} -3x + y - z - 1 = 0, \\ 2x - y + 3z - 1 = 0. \end{cases}$

$M_1(2; -1; -3)$, $M_2(1; 3; -2)$.

9.27. $\begin{cases} 2x + y - z - 5 = 0, \\ -x + 3y + z - 3 = 0. \end{cases}$

$M_1(4; 2; -5)$, $M_2(1; 1; 3)$.

9.28. $\begin{cases} 3x - y + 2z - 1 = 0, \\ 2x - 3y + z + 7 = 0. \end{cases}$

$M_1(-2; 4; 3)$, $M_2(3; 1; -2)$.

9.29. $\begin{cases} x - y + 3z + 5 = 0, \\ -x + 2y + z - 3 = 0. \end{cases}$

$M_1(2; -2; 5)$, $M_2(1; 1; 3)$.

9.30. $\begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0, \\ -x + y + 3z - 9 = 0. \end{cases}$

$M_1(4; -2; 1)$, $M_2(1; 3; 9)$.

Завдання 10

Задано пряму в просторі і площину. Знайти: *а*) точку перетину прямої і площини; *б*) кут між прямою і площиною.

10.1. $\dfrac{x+4}{-3} = \dfrac{y-3}{6} = \dfrac{z+2}{-7}$, $2x - y - 4z - 13 = 0$.

10.2. $\dfrac{x+7}{4} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-8}{-3}$, $2x + 3y - z - 9 = 0$.

10.3. $\dfrac{x-7}{-2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+6}{4}$, $x + 3y - 2z - 1 = 0$.

10.4. $\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y+6}{-2} = \dfrac{z-2}{1}$, $-x - 2y + 4z - 10 = 0$.

10.5. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-6}{2} = \dfrac{z+7}{-5}$, $3x + y - 2z + 7 = 0$.

10.6. $\dfrac{x+5}{-1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-8}{1}$, $-2x + 4y - z - 11 = 0$.

10.7. $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-6}{-4}$, $3x - y + 6z - 13 = 0$.

10.8. $\dfrac{x+8}{5} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+7}{3}$, $x + 3y + 7z - 10 = 0$.

10.9. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-8}{-3} = \dfrac{z-4}{-1}$, $3x - y + 2z - 18 = 0$.

10.10. $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-7}{6} = \dfrac{z-1}{2}$, $2x + y + 3z - 4 = 0$.

10.11. $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{-3}$, $x + 2y - 2z + 11 = 0$.

10.12. $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+4}{3}$, $3x + 2y + 4z - 7 = 0$.

10.13. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z+5}{2}$,

$x + 2y - 5z + 15 = 0$.

10.15. $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-3}{1}$,

$4x - 2y + z - 8 = 0$.

10.17. $\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+4}{-2}$,

$7x + 3y - 2z - 4 = 0$.

10.19. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-3}$,

$x + 5y - 2z - 11 = 0$.

10.21. $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-4}{3}$,

$x + 3y + 5z - 1 = 0$.

10.23. $\dfrac{x+5}{-3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$,

$2x + 4y + 7z + 1 = 0$.

10.25. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+7}{-3}=\dfrac{z-5}{1}$,

$x - 2y + 4z - 12 = 0$.

10.27. $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-6}{2}$,

$4x + y + 6z - 11 = 0$.

10.29. $\dfrac{x-9}{5}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z-7}{1}$,

$-x + 5y - 2z - 6 = 0$.

10.14. $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z-1}{3}$,

$3x - y + 4z + 12 = 0$.

10.16. $\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+3}{5}$,

$x - 2y + 5z - 11 = 0$.

10.18. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-4}{3}$,

$7x + 4y + z - 2 = 0$.

10.20. $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+5}{3}$,

$-6x + 2y + 3z - 16 = 0$.

10.22. $\dfrac{x+4}{-1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-1}{6}$,

$3x - 2y + 4z - 1 = 0$.

10.24. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z+3}{2}$,

$3x + y + 6z - 9 = 0$.

10.26. $\dfrac{x-5}{-1}=\dfrac{y+6}{4}=\dfrac{z+2}{3}$,

$7x - 3y - 5z + 5 = 0$.

10.28. $\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y+3}{-6}=\dfrac{z-2}{-1}$,

$3x - 4y + 8z + 1 = 0$.

10.30. $\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+2}{4}$,

$4x - y + 2z + 5 = 0$.

ФОРМУЛИ З ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

1. Степені і корні

Якщо $a>0,\ b>0$, то:

$$a^m a^n = a^{m+n};\quad a^m : a^n = a^{m-n};\quad \left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n};\quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}},\ n\neq 0;\quad a^0 = 1;$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ n\neq 0;\quad \sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b},\ n\in N;\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ n\in N.$$

Формули скороченого множення

1) $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ – квадрат суми або різниці;
2) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ – різниця квадратів;
3) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – куб суми;
4) $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$ – сума кубів;
5) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ – куб різниці;
6) $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$ – різниця кубів.

3. Квадратне рівняння

Якщо x_1 і x_2 - корні квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\qquad ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2).$$

4. Логарифми

Якщо $y>0,\ z>0,\ a>1,\ a\neq 1$, то:

1) $\log_a y = x \ \Leftrightarrow\ a^x = y$ – визначення логарифма;
2) $a^{\log_a y} = y$ – основна логарифмічна тотожність;
3) $\log_a(y\cdot z) = \log_a y + \log_a z$ – логарифм добутку;
4) $\log_a\left(\dfrac{y}{z}\right) = \log_a y - \log_a z$ – логарифм частки;
5) $\log_a\left(y^k\right) = k\log_a y$ – логарифм степені;
6) $\log_a y = \dfrac{\log_c y}{\log_c a}$ $(c>0, c\neq 1)$ – формула переходу;
7) $\log_a y = \dfrac{1}{\log_y a}$, $y\neq 1$; 8) $\log_a a = 1$; 9) $\log_a 1 = 0$.

5. Основні тригонометричні тотожності

1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; 2) $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; 3) $\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

4) $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; 5) $1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$; 6) $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1$.

6. Значення функцій деяких аргументів

α, град	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
α, рад	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0
$\mathrm{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	1	$-\sqrt{3}/3$	-1	$-\sqrt{3}$	–

7. Подвійні аргументи

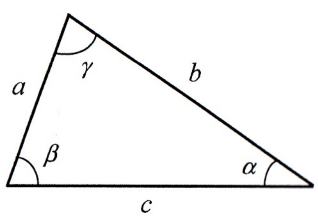
1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$;

3) $\sin 2\alpha=\dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$; 4) $\sin 2\alpha=\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$; 5) $\mathrm{tg}\,2\alpha=\dfrac{2\,\mathrm{tg}\alpha}{1\text{-}\,\mathrm{tg}^2\alpha}$

8. Формули зниження степені

1) $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$; 2) $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

9. Відношення в довільному трикутнику



Теорема синусів

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

Теорема косинусів

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

Додаток 2

Таблиця тригонометричних функцій $\sin x$, $\cos x$.

Кут, град.	$\sin x$	$\cos x$	Кут, град.	$\sin x$	$\cos x$	Кут, град.	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1,0000						
1	0,0175	0,9998	31	0,5150	0,8572	61	0,8746	0,4848
2	0,0349	0,9994	32	0,5299	0,8480	62	0,8829	0,4695
3	0,0523	0,9986	33	0,5446	0,8387	63	0,8910	0,4540
4	0,0698	0,9976	34	0,5592	0,8290	64	0,8988	0,4384
5	0,0872	0,9962	35	0,5736	0,8192	65	0,9063	0,4226
6	0,1045	0,9945	36	0,5878	0,8090	66	0,9135	0,4067
7	0,1219	0,9925	37	0,6018	0,7986	67	0,9205	0,3907
8	0,1392	0,9903	38	0,6157	0,7880	68	0,9272	0,3746
9	0,1564	0,9877	39	0,6293	0,7771	69	0,9336	0,3584
10	0,1736	0,9848	40	0,6428	0,7660	70	0,9397	0,3420
11	0,1908	0,9816	41	0,6561	0,7547	71	0,9455	0,3256
12	0,2079	0,9781	42	0,6691	0,7431	72	0,9511	0,3090
13	0,2250	0,9744	43	0,6820	0,7314	73	0,9563	0,2924
14	0,2419	0,9703	44	0,6947	0,7193	74	0,9613	0,2756
15	0,2588	0,9659	45	0,7071	0,7071	75	0,9659	0,2588
16	0,2756	0,9613	46	0,7193	0,6947	76	0,9703	0,2419
17	0,2924	0,9563	47	0,7314	0,6820	77	0,9744	0,2250
18	0,309	0,9511	48	0,7431	0,6691	78	0,9781	0,2079
19	0,3256	0,9455	49	0,7547	0,6561	79	0,9816	0,1908
20	0,3420	0,9397	50	0,7660	0,6428	80	0,9848	0,1736
21	0,3584	0,9336	51	0,7771	0,6293	81	0,9877	0,1564
22	0,3746	0,9272	52	0,7880	0,6157	82	0,9903	0,1392
23	0,3907	0,9205	53	0,7986	0,6018	83	0,9925	0,1219
24	0,4067	0,9135	54	0,8090	0,5878	84	0,9945	0,1045
25	0,4226	0,9063	55	0,8192	0,5736	85	0,9962	0,0872
26	0,4384	0,8988	56	0,8290	0,5592	86	0,9976	0,0698
27	0,4540	0,8910	57	0,8387	0,5446	87	0,9986	0,0523
28	0,4695	0,8829	58	0,8480	0,5299	88	0,9994	0,0349
29	0,4848	0,8746	59	0,8572	0,5150	89	0,9998	0,0175
30	0,5000	0,8660	60	0,8660	0,5000	90	1	0,0000

Додаток 3

Таблиця тригонометричної функції $\mathrm{tg}\, x$.

Кут, град.	Кут, рад.	$\mathrm{tg}\, x$	Кут, град.	Кут, рад.	$\mathrm{tg}\, x$	Кут, град.	Кут, рад.	$\mathrm{tg}\, x$
0	0	0						
1	0,02	0,0175	31	0,54	0,6009	61	1,06	1,8040
2	0,03	0,0349	32	0,56	0,6249	62	1,08	1,8807
3	0,05	0,0524	33	0,58	0,6494	63	1,10	1,9626
4	0,07	0,0699	34	0,59	0,6745	64	1,12	2,0503
5	0,09	0,0875	35	0,61	0,7002	65	1,13	2,1445
6	0,10	0,1051	36	0,63	0,7265	66	1,15	2,2460
7	0,12	0,1228	37	0,65	0,7536	67	1,17	2,3559
8	0,14	0,1405	38	0,66	0,7813	68	1,19	2,4751
9	0,16	0,1584	39	0,68	0,8098	69	1,20	2,6051
10	0,17	0,1763	40	0,70	0,8391	70	1,22	2,7475
11	0,19	0,1944	41	0,72	0,8693	71	1,24	2,9042
12	0,21	0,2126	42	0,73	0,9004	72	1,26	3,0777
13	0,23	0,2309	43	0,75	0,9325	73	1,27	3,2709
14	0,24	0,2493	44	0,77	0,9657	74	1,29	3,4874
15	0,26	0,2679	45	0,79	1,0000	75	1,31	3,7321
16	0,28	0,2867	46	0,80	1,0355	76	1,33	4,0108
17	0,30	0,3057	47	0,82	1,0724	77	1,34	4,3315
18	0,31	0,3249	48	0,84	1,1106	78	1,36	4,7046
19	0,33	0,3443	49	0,86	1,1504	79	1,38	5,1446
20	0,35	0,3640	50	0,87	1,1918	80	1,40	5,6713
21	0,37	0,3839	51	0,89	1,2349	81	1,41	6,3138
22	0,38	0,4040	52	0,91	1,2799	82	1,43	7,1154
23	0,40	0,4245	53	0,93	1,3270	83	1,45	8,1443
24	0,42	0,4452	54	0,94	1,3764	84	1,47	9,5144
25	0,44	0,4663	55	0,96	1,4281	85	1,48	11,430
26	0,45	0,4877	56	0,98	1,4826	86	1,50	14,301
27	0,47	0,5095	57	0,99	1,5399	87	1,52	19,081
28	0,49	0,5317	58	1,01	1,6003	88	1,54	28,636
29	0,51	0,5543	59	1,03	1,6643	89	1,55	57,290
30	0,52	0,5774	60	1,05	1,7321	90	1,57	

Додаток 4

Номери для індивідуальних завдань

Дві останні цифри номера залікової книжки

↓ Номери для індивідуальних завдань

01	1.1	2.1	3.1	4.1	5.1	6.1	7.1	8.1	9.1	10.1
02	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2	9.2	10.2
03	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3	7.3	8.3	9.3	10.3
04	1.4	2.4	3.4	4.4	5.4	6.4	7.4	8.4	9.4	10.4
05	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5	10.5
06	1.6	2.6	3.6	4.6	5.6	6.6	7.6	8.6	9.6	10.6
07	1.7	2.7	3.7	4.7	5.7	6.7	7.7	8.7	9.7	10.7
08	1.8	2.8	3.8	4.8	5.8	6.8	7.8	8.8	9.8	10.8
09	1.9	2.9	3.9	4.9	5.9	6.9	7.9	8.9	9.9	10.9
10	1.10	2.10	3.10	4.10	5.10	6.10	7.10	8.10	9.10	10.10
11	1.11	2.11	3.11	4.11	5.11	6.11	7.11	8.11	9.11	10.11
12	1.12	2.12	3.12	4.12	5.12	6.12	7.12	8.12	9.12	10.12
13	1.13	2.13	3.13	4.13	5.13	6.13	7.13	8.13	9.13	10.13
14	1.14	2.14	3.14	4.14	5.14	6.14	7.14	8.14	9.14	10.14
55	1.15	2.15	3.15	4.15	5.15	6.15	7.15	8.15	9.15	10.15
16	1.16	2.16	3.16	4.16	5.16	6.16	7.16	8.16	9.16	10.16
17	1.17	2.17	3.17	4.17	5.17	6.17	7.17	8.17	9.17	10.17
18	1.18	2.18	3.18	4.18	5.18	6.18	7.18	8.18	9.18	10.18
19	1.19	2.19	3.19	4.19	5.19	6.19	7.19	8.19	9.19	10.19
20	1.20	2.20	3.20	4.20	5.20	6.20	7.20	8.20	9.20	10.20
21	1.21	2.21	3.21	4.21	5.21	6.21	7.21	8.21	9.21	10.21
22	1.22	2.22	3.22	4.22	5.22	6.22	7.22	8.22	9.22	10.22
23	1.23	2.23	3.23	4.23	5.23	6.23	7.23	8.23	9.23	10.23
24	1.24	2.24	3.24	4.24	5.24	6.24	7.24	8.24	9.24	10.24
25	1.25	2.25	3.25	4.25	5.25	6.25	7.25	8.25	9.25	10.25
26	1.26	2.26	3.26	4.26	5.26	6.26	7.26	8.26	9.26	10.26
27	1.27	2.27	3.27	4.27	5.27	6.27	7.27	8.27	9.27	10.27
28	1.28	2.28	3.28	4.28	5.28	6.28	7.28	8.28	9.28	10.28
29	1.29	2.29	3.29	4.29	5.29	6.29	7.29	8.29	9.29	10.29
30	1.30	2.30	3.30	4.30	5.30	6.30	7.30	8.30	9.30	10.30
31	1.1	2.2	3.3	4.4	5.5	6.6	7.7	8.8	9.9	10.10
32	1.2	2.3	3.4	4.5	5.6	6.7	7.8	8.9	9.10	10.11
33	1.3	2.4	3.5	4.6	5.7	6.8	7.9	8.10	9.11	10.12
34	1.4	2.5	3.6	4.7	5.8	6.9	7.10	8.11	9.12	10.13
35	1.5	2.6	3.7	4.8	5.9	6.10	7.11	8.12	9.13	10.14
36	1.6	2.7	3.8	4.9	5.10	6.11	7.12	8.13	9.14	10.15
37	1.7	2.8	3.9	4.10	5.11	6.12	7.13	8.14	9.15	10.16
38	1.8	2.9	3.10	4.11	5.12	6.13	7.14	8.15	9.16	10.17
39	1.9	2.10	3.11	4.12	5.13	6.14	7.15	8.16	9.17	10.18
40	1.10	2.11	3.12	4.13	5.14	6.15	7.16	8.17	9.18	10.19

Дві останні цифри номера залікової книжки

Номери для індивідуальних завдань

41	1.11	2.12	3.13	4.14	5.15	6.16	7.17	8.18	9.19	10.20
42	1.12	2.13	3.14	4.15	5.16	6.17	7.18	8.19	9.20	10.21
43	1.13	2.14	3.15	4.16	5.17	6.18	7.19	8.20	9.21	10.22
44	1.14	2.15	3.16	4.17	5.18	6.19	7.20	8.21	9.22	10.23
45	1.15	2.16	3.17	4.18	5.19	6.20	7.21	8.22	9.23	10.24
46	1.16	2.17	3.18	4.19	5.20	6.21	7.22	8.23	9.24	10.25
47	1.17	2.18	3.19	4.20	5.21	6.22	7.23	8.24	9.25	10.26
48	1.18	2.19	3.20	4.21	5.22	6.23	7.24	8.25	9.26	10.27
49	1.19	2.20	3.21	4.22	5.23	6.24	7.25	8.26	9.27	10.28
50	1.20	2.21	3.22	4.23	5.24	6.25	7.26	8.27	9.28	10.29
51	1.21	2.22	3.23	4.24	5.25	6.26	7.27	8.28	9.29	10.30
52	1.22	2.23	3.24	4.25	5.26	6.27	7.28	8.29	9.30	10.1
53	1.23	2.24	3.25	4.26	5.27	6.28	7.29	8.30	9.1	10.2
54	1.24	2.25	3.26	4.27	5.28	6.29	7.30	8.1	9.2	10.3
55	1.25	2.26	3.27	4.28	5.29	6.30	7.1	8.2	9.3	10.4
56	1.26	2.27	3.28	4.29	5.30	6.1	7.2	8.3	9.4	10.5
57	1.27	2.28	3.29	4.30	5.1	6.2	7.3	8.4	9.5	10.6
58	1.28	2.29	3.30	4.1	5.2	6.3	7.4	8.5	9.6	10.7
59	1.29	2.30	3.1	4.2	5.3	6.4	7.5	8.6	9.7	10.8
60	1.30	2.1	3.2	4.3	5.4	6.5	7.6	8.7	9.8	10.9
61	1.1	2.3	3.5	4.7	5.9	6.11	7.13	8.15	9.17	10.19
62	1.2	2.4	3.6	4.8	5.10	6.12	7.14	8.16	9.18	10.20
63	1.3	2.5	3.7	4.9	5.11	6.13	7.15	8.17	9.19	10.21
64	1.4	2.6	3.8	4.10	5.12	6.14	7.16	8.18	9.20	10.22
65	1.5	2.7	3.9	4.11	5.13	6.15	7.17	8.19	9.21	10.23
66	1.6	2.8	3.10	4.12	5.14	6.16	7.18	8.20	9.22	10.24
67	1.7	2.9	3.11	4.13	5.15	6.17	7.19	8.21	9.23	10.25
68	1.8	2.10	3.12	4.14	5.16	6.18	7.20	8.22	9.24	10.26
69	1.9	2.11	3.13	4.15	5.17	6.19	7.21	8.23	9.25	10.27
70	1.10	2.12	3.14	4.16	5.18	6.20	7.22	8.24	9.26	10.28
71	1.11	2.13	3.15	4.17	5.19	6.21	7.23	8.25	9.27	10.29
72	1.12	2.14	3.16	4.18	5.20	6.22	7.24	8.26	9.28	10.30
73	1.13	2.15	3.17	4.19	5.21	6.23	7.25	8.27	9.29	10.1
74	1.14	2.16	3.18	4.20	5.22	6.24	7.26	8.28	9.30	10.2
75	1.15	2.17	3.19	4.21	5.23	6.25	7.27	8.29	9.1	10.3
76	1.16	2.18	3.20	4.22	5.24	6.26	7.28	8.30	9.2	10.4
77	1.17	2.19	3.21	4.23	5.25	6.27	7.29	8.1	9.3	10.5
78	1.18	2.20	3.22	4.24	5.26	6.28	7.30	8.2	9.4	10.6
79	1.19	2.21	3.23	4.25	5.27	6.29	7.1	8.3	9.5	10.7
80	1.20	2.22	3.24	4.26	5.28	6.30	7.2	8.4	9.6	10.8

Дві останні цифри номера залікової книжки

Номери для індивідуальних завдань

81	1.21	2.23	3.25	4.27	5.29	6.1	7.3	8.5	9.7	10.9
82	1.22	2.24	3.26	4.28	5.30	6.2	7.4	8.6	9.8	10.10
83	1.23	2.25	3.27	4.29	5.1	6.3	7.5	8.7	9.9	10.11
84	1.24	2.26	3.28	1.30	5.2	6.4	7.6	8.8	9.10	10.12
85	1.25	2.27	3.29	7.1	5.3	6.5	7.7	8.9	9.11	10.13
86	1.26	2.28	3.30	4.2	5.4	6.6	7.8	8.10	9.12	10.14
87	1.27	2.29	3.1	4.3	5.5	6.7	7.9	8.11	9.13	10.15
88	1.28	2.30	3.2	4.4	5.6	6.8	7.10	8.12	9.14	10.16
89	1.29	2.1	3.3	4.5	5.7	6.9	7.11	8.13	9.15	10.17
90	1.30	2.2	3.4	4.6	5.8	6.10	7.12	8.14	9.16	10.18
91	1.1	2.4	3.7	4.10	5.13	6.16	7.19	8.22	9.25	10.28
92	1.2	2.5	3.8	4.11	5.14	6.17	7.20	8.23	9.26	10.29
93	1.3	2.6	3.9	4.12	5.15	6.18	7.21	8.24	9.27	10.30
94	1.4	2.7	3.10	4.13	5.16	6.19	7.22	8.25	9.28	10.1
95	1.5	2.8	3.11	4.14	5.17	6.20	7.23	8.26	9.29	10.2
96	1.6	2.9	3.12	4.15	5.18	6.21	7.24	8.27	9.30	10.3
97	1.7	2.10	3.13	4.16	5.19	6.22	7.25	8.28	9.1	10.4
98	1.8	2.11	3.14	4.17	5.20	6.23	7.26	8.29	9.2	10.5
99	1.9	2.12	3.15	4.18	5.21	6.24	7.27	8.30	9.3	10.6
00	1.10	2.13	3.16	4.19	5.22	6.25	7.28	8.1	9.4	10.7

Відповіді до завдань для самостійної роботи

Розділ 1

1. *а*) $\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 7 & 3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$; *б*) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 9 & -1 & 7 \end{pmatrix}$. 2. *а*) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & -2 & 9 \end{pmatrix}$; *б*) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 14 & 4 & 12 & -2 \\ 10 & 2 & -6 & 6 \\ -12 & 8 & -4 & 16 \end{pmatrix}$.

4. *а*) $\begin{pmatrix} -6 & -4 & -8 \\ 18 & 12 & 24 \\ 15 & 10 & 20 \end{pmatrix}$; *б*) $(-5 \quad 9)$; *в*) $(37 \quad 35 \quad 46)$; *г*) $\begin{pmatrix} 30 & -14 \\ 59 & -33 \end{pmatrix}$; *д*) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 49 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 53 & 42 \\ 30 & 36 \end{pmatrix}$. 5. *а*) $A^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} -1 & -11 & 26 \\ 5 & 11 & -20 \\ -1 & 11 & -18 \end{pmatrix}$; *б*) $A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -7 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; *в*) матриця вироджена і не має A^{-1}. 6. *а*) $x=1,\ y=2$; *б*) система несумісна, розв'язків не має; *в*) система невизначена. 7. 200 од. суцільної і 300 од. порожнистої цегли.

Розділ 2.1

1. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right| = 13$. 2. $(AB)_x = -2,\ (AB)_y = 3,\ (AB)_z = 5$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{38}$; $\cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{38}}$; $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{38}}$; $\cos\gamma = \frac{5}{\sqrt{38}}$. 3. $\vec{a}-\vec{b} = -2\vec{i}+7\vec{j}-6\vec{k}$. 4. $\vec{c} = \vec{i} - 8\vec{j}$.

5. $\left|\vec{R}\right| = 25$; $\cos\alpha = \frac{12}{25}$; $\cos\beta = \frac{9}{25}$; $\cos\gamma = \frac{4}{5}$. 6. $\left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{70}$; $\cos\alpha = -\frac{5}{\sqrt{70}}$; $\cos\beta = \frac{6}{\sqrt{70}}$; $\cos\gamma = -\frac{3}{\sqrt{70}}$. 7. $\left|\vec{Q}\right| = \left|\vec{P}\right|$; $\left|\vec{T}\right| = \sqrt{2}\left|\vec{P}\right|$. 8. $|R| = 15$ Н. 9. $\left|\vec{F}_H\right| = 172{,}8$ кг.

Розділ 2.2

1. *а*) Не колінеарні, *б*) не колінеарні, *в*) рівнонаправлені, *г*) протилежно направлені, *д*) не колінеарні, *е*) рівнонаправлені. 2. *а*) перпендикулярні, *б*) перпендикулярні, *в*) не перпендикулярні, *г*) не перпендикулярні. 4. $\cos\varphi = -\frac{20}{\sqrt{418}}$. 5. $\varphi = 60^{0}$.

6. $\vec{a} = \pm\frac{13}{5}\left(4\vec{i}+3\vec{j}\right)$. 7. $\vec{d} = -3\vec{i}+\vec{k}$. 8. $\vec{d} = 4\vec{i}+11\vec{j}+8\vec{k}$. 9. $A = 1$ од. роботи.

Розділ 2.3

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \pm 30$. 2. $\left|\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\right| = 60$. 3. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2 = 3$. 4. $\vec{a}\times\vec{b} = \{-3; 5; 7\}$.

5. $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \{6; -4; -6\}$. 6. $h = \left|\overrightarrow{BD}\right| = 5$. 7. $\vec{M} = \{-4; 3; 4\}$. 8. $\left|\vec{M}\right| = 28$; $\cos\alpha = \frac{3}{7}$, $\cos\beta = \frac{6}{7}$, $\cos\gamma = -\frac{2}{7}$. 9. $\left|\vec{M}\right| = 15$; $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = -\frac{2}{15}$; $\cos\gamma = \frac{11}{15}$. 10. *а*) $\sin\varphi = \frac{5\sqrt{17}}{21}$, *б*) $\sin\varphi = \frac{\sqrt{65}}{9}$. 11. $\vec{c} = -1{,}5\vec{i} + -6\vec{j} + 2\vec{k}$.

Розділ 2.4

1. *а*) 1, *б*) -1, *в*) -20, *г*) 18. 2. *а*) ліву, *б*) праву. 3. *а*) не компланарні, *б*) компланарні. 4. *а*) $V = 51$ куб. од.; *б*) $V = 13$ куб. од. 5. $h = \frac{17\sqrt{2}}{5}$. 6. *а*) не утворюють, *б*) утворюють. 7. *а*) $\vec{d} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, *б*) $\vec{d} = -\vec{b}-\vec{c}$.

Розділ 3.1

1. $|AD| = 7$. 2. $C(6;4)$, $D(9;6)$, $|AB| \approx 10{,}82$. 3. $A(-2;1)$, $B(4;-5)$. 4. $C(-9;11)$. 5. $C(7;8)$. 6. $A(-4;1)$, $B(6;5)$, $C(0;-1)$. 7. $C(7{,}5;-8{,}5)$. 8. $C(1;-2)$. 9. $C(3{,}8;0{,}6)$. 10. $C(1;-1)$. 11. $|AK| = 4$. 12. $Q\ (4;1{,}79)$.

Розділ 3.2

1. $y - \sqrt{3}x + 2\left(1-\sqrt{3}\right) = 0$. 2. $k = -3$; $b = 5$. 3. *а*) лежать; *б*) не лежать. 4. $C\,(9/8;0)$. 7. *а*) $\varphi = 135^{o}$; *б*) $\varphi = 0^{o}$. 8. *а*) $d = 2$; *б*) $d = 4{,}5$. 9. $5x-3y-2=0$ (AD), $7x+6y+4=0$ (CE), $F(0;-2/3)$. 10. *а*) $y-3=\frac{5}{2}(x-2)$; *б*) $5x-2y-4=0$; *в*) $\frac{x}{4/5}+\frac{y}{-2}=1$. 11. $12x+9y-17=0$. 12. $4x-y-9=0$.

Розділ 3.3

1. Зовні; всередині; на колі. 2. $(x+2)^2+(y+1)^2=25$. 3. $(x+2)^2+(y-3)^2=9{,}1$. 4. $(x-4)^2+(y-5)^2=25$. 5. $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{5}=1$; $A_1\left(\sqrt{15};0\right)$, $A_2\left(-\sqrt{15};0\right)$; $B_1\left(0;\sqrt{5}\right)$, $B_2\left(0;-\sqrt{5}\right)$; $F_{1,2}\left(\pm\sqrt{10};0\right)$; $\varepsilon = \frac{\sqrt{6}}{3}$; $x = \frac{3\sqrt{10}}{2}$. 6. Еліпс; $a=2$, $b=\sqrt{3}$; $F_{1,2}(\pm 1;\ 0)$; $\varepsilon = 0{,}5$; $x = \pm 4$.

7. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; $y=\pm\frac{3}{4}x$; $x=\pm 3{,}2$. 8. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. 9. $y=2x^2-12$. 10. $y^2=20x$.

Розділ 3.4

1. $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{5\pi}{4}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{7\pi}{4}\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{4}\right)$, $D\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{3\pi}{4}\right)$. 2. $X=-3$, $Y=3\sqrt{3}$.

3. $\varphi = 300^{o}$. 4. $\text{Пр}_l M_1M_2 = \frac{23}{5}$. 5. *а*) парабола, *б*) коло, *в*) еліпс, *г*) коло.

Розділ 4.1

1. $2x-3y+z=0$. 2. $4x+3y-z+1=0$. 3. $3x+2z-1=0$; $\alpha \approx 33^{o}48'$, $\beta = 90^{o}$, $\gamma \approx 35^{o}48'$. 4. $d=4$. 5. *а*) співпадають; *б*) паралельні; *в*) перетинаються; *г*) паралельні. 6. *а*) перпендикулярні; *б*) не перпендикулярні.

Розділ 4.2

1. $x=2+3t$; $y=-1+4t$; $z=t$. 2. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+1}{3}$. 3. $M(2;0;4)$. 4. $\varphi \approx 19^{o}7'$.

5. $\begin{cases} x-3y-z+4=0; \\ 2x-4y+3z-2=0. \end{cases}$ 6. $d=\sqrt{5}$.

Розділ 4.3

1. *а*) Сфера; *б*) еліпсоїд; *в*) однопорожнинний гіперболоїд; *г*) двохпорожнинний гіперболоїд; *д*) параболоїд; *е*) конус. 2. *а*) однопорожнинний гіперболоїд обертання; *б*) гіперболічний циліндр; *в*) еліптичний параболоїд; г) дві паралельні площини. 3. Двопорожнинний гіперболоїд. 4. Однопорожнинний гіперболоїд обертання $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{20}=1$.

Відповіді до завдань для РГР

Завдання 1

1.1. $x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=3$. 1.2. $x_1=2;\ x_2=3;\ x_3=1$. 1.3. $x_1=3;\ x_2=1;\ x_3=2$.
1.4. $x_1=3;\ x_2=2;\ x_3=1$. 1.5. $x_1=1;\ x_2=-1;\ x_3=4$. 1.6. $x_1=1;\ x_2=-1;\ x_3=3$.
1.7. $x_1=1;\ x_2=-1;\ x_3=2$. 1.8. $x_1=1;\ x_2=1;\ x_3=1$. 1.9. $x_1=2;\ x_2=2;\ x_3=-3$.
1.10. $x_1=2;\ x_2=-1;\ x_3=3$. 1.11. $x_1=2;\ x_2=1;\ x_3=1$. 1.12. $x_1=1;\ x_2=1;\ x_3=-1$.
1.13. $x_1=1;\ x_2=0;\ x_3=-2$. 1.14. $x_1=2;\ x_2=-2;\ x_3=1$. 1.15. $x_1=1;\ x_2=-1;\ x_3=1$.
1.16. $x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=-2$. 1.17. $x_1=1;\ x_2=1;\ x_3=2$. 1.18. $x_1=1;\ x_2=-2;\ x_3=-1$.
1.19. $x_1=-1;\ x_2=0;\ x_3=1$. 1.20. $x_1=2;\ x_2=1;\ x_3=2$. 1.21. $x_1=0;\ x_2=2;\ x_3=2$.
1.22. $x_1=1;\ x_2=-3;\ x_3=-1$. 1.23. $x_1=1;\ x_2=3;\ x_3=-1$. 1.24. $x_1=2;\ x_2=-1;\ x_3=-3$.
1.25. $x_1=-2;\ x_2=-3;\ x_3=-4$. 1.26. $x_1=-2;\ x_2=1;\ x_3=-2$. 1.27. $x_1=-1;\ x_2=-2;\ x_3=-2$.
1.28. $x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=3$. 1.29. $x_1=1;\ x_2=-1;\ x_3=2$. 1.30. $x_1=-3;\ x_2=2;\ x_3=1$.

Завдання 2

2.1. $\angle A=50^\circ 24'$; $\angle B=85^\circ 34'$; $\angle C=44^\circ 2'$. 2.2. $\angle A=42^\circ 27'$; $\angle B=85^\circ 32'$; $\angle C=52^\circ 1'$.
2.3. $\angle A=104^\circ 58'$; $\angle B=46^\circ 55'$; $\angle C=28^\circ 7'$. 2.4. $\angle A=90^\circ 00'$; $\angle B=29^\circ 7'$; $\angle C=60^\circ 53'$.
2.5. $\angle A=52^\circ 1'$; $\angle B=90^\circ 00'$; $\angle C=37^\circ 59'$. 2.6. $\angle A=60^\circ 00'$; $\angle B=100^\circ 54'$; $\angle C=19^\circ 6'$.
2.7. $\angle A=24^\circ 53'$; $\angle B=17^\circ 00'$; $\angle C=138^\circ 7'$. 2.8. $\angle A=27^\circ 58'$; $\angle B=116^\circ 59'$; $\angle C=35^\circ 3'$.
2.9. $\angle A=69^\circ 5'$; $\angle B=46^\circ 57'$; $\angle C=63^\circ 58'$. 2.10. $\angle A=153^\circ 1'$; $\angle B=16^\circ 59'$; $\angle C=10^\circ 00'$.
2.11. $\angle A=50^\circ 55'$; $\angle B=36^\circ 58'$; $\angle C=92^\circ 7'$. 2.12. $\angle A=45^\circ 00'$; $\angle B=90^\circ 00'$; $\angle C=45^\circ 00'$.
2.13. $\angle A=90^\circ 00'$; $\angle B=35^\circ 58'$; $\angle C=54^\circ 2'$. 2.14. $\angle A=38^\circ 4'$; $\angle B=33^\circ 8'$; $\angle C=108^\circ 48'$.
2.15. $\angle A=65^\circ 4'$; $\angle B=59^\circ 50'$; $\angle C=55^\circ 6'$. 2.16. $\angle A=56^\circ 6'$; $\angle B=39^\circ 53'$; $\angle C=84^\circ 1'$.
2.17. $\angle A=75^\circ 2'$; $\angle B=46^\circ 55'$; $\angle C=58^\circ 3'$. 2.18. $\angle A=31^\circ 57'$; $\angle B=104^\circ 58'$; $\angle C=43^\circ 5'$.
2.19. $\angle A=49^\circ 6'$; $\angle B=81^\circ 47'$; $\angle C=49^\circ 6'$. 2.20. $\angle A=73^\circ 9'$; $\angle B=52^\circ 52'$; $\angle C=53^\circ 59'$.
2.21. $\angle A=75^\circ 2'$; $\angle B=43^\circ 5'$; $\angle C=61^\circ 52'$. 2.22. $\angle A=45^\circ 53'$; $\angle B=60^\circ 7'$; $\angle C=74^\circ 00'$.
2.23. $\angle A=22^\circ 3'$; $\angle B=70^\circ 2'$; $\angle C=87^\circ 55'$. 2.24. $\angle A=25^\circ 52'$; $\angle B=127^\circ 6'$; $\angle C=27^\circ 2'$.
2.25. $\angle A=90^\circ 00'$; $\angle B=68^\circ 55'$; $\angle C=21^\circ 5'$. 2.26. $\angle A=29^\circ 59'$; $\angle B=120^\circ 52'$; $\angle C=29^\circ 9'$.
2.27. $\angle A=131^\circ 58'$; $\angle B=25^\circ 00'$; $\angle C=23^\circ 2'$. 2.28. $\angle A=117^\circ 2'$; $\angle B=43^\circ 1'$; $\angle C=19^\circ 57'$.
2.29. $\angle A=22^\circ 55'$; $\angle B=114^\circ 3'$; $\angle C=43^\circ 2'$. 2.30. $\angle A=24^\circ 6'$; $\angle B=65^\circ 54'$; $\angle C=90^\circ 00'$.

Завдання 3

3.1. *а*) $S=10{,}00$; *б*) $S=12{,}33$. 3.2. *а*) $S=19{,}80$; *б*) $S=8{,}66$.
3.3. *а*) $S=21{,}21$; *б*) $S=17{,}23$. 3.4. *а*) $S=5{,}20$; *б*) $S=12{,}12$.

3.5. *а*) $S=91{,}92$; *б*) $S=12{,}25$. 3.6. *а*) $S=25{,}98$; *б*) $S=10{,}82$.
3.7. *а*) $S=25{,}00$; *б*) $S=4{,}90$. 3.8. *а*) $S=67{,}55$; *б*) $S=12{,}12$.
3.9. *а*) $S=44{,}00$; *б*) $S=12{,}12$. 3.10. *а*) $S=33{,}94$; *б*) $S=4{,}90$.
3.11. *а*) $S=57{,}16$; *б*) $S=10{,}05$. 3.12. *а*) $S=5{,}66$; *б*) $S=3{,}74$.
3.13. *а*) $S=81{,}00$; *б*) $S=3{,}46$. 3.14. *а*) $S=76{,}21$; *б*) $S=12{,}25$.
3.15. *а*) $S=46{,}67$; *б*) $S=3{,}74$. 3.16. *а*) $S=66{,}00$; *б*) $S=24{,}49$.
3.17. *а*) $S=69{,}28$; *б*) $S=17{,}15$. 3.18. *а*) $S=69{,}00$; *б*) $S=8{,}31$.
3.19. *а*) $S=69{,}28$; *б*) $S=10{,}82$. 3.20. *а*) $S=93{,}00$; *б*) $S=7{,}48$.
3.21. *а*) $S=5{,}00$; *б*) $S=41{,}82$. 3.22. *а*) $S=55{,}15$; *б*) $S=9{,}80$.
3.23. *а*) $S=36{,}77$; *б*) $S=16{,}40$. 3.24. *а*) $S=19{,}05$; *б*) $S=25{,}77$.
3.25. *а*) $S=76{,}37$; *б*) $S=26{,}44$. 3.26. *а*) $S=57{,}16$; *б*) $S=38{,}01$.
3.27. *а*) $S=50{,}00$; *б*) $S=24{,}49$. 3.28. *а*) $S=31{,}18$; *б*) $S=63{,}36$.
3.29. *а*) $S=75{,}00$; *б*) $S=23{,}43$. 3.30. *а*) $S=2{,}83$; *б*) $S=42{,}02$.

Завдання 4

4.1. $V_T=31{,}83$; $S_{ABC}=10{,}78$. 4.2. $V_T=10{,}50$; $S_{ABC}=4{,}95$.
4.3. $V_T=28{,}50$; $S_{ABC}=18{,}67$. 4.4. $V_T=18{,}67$; $S_{ABC}=18{,}87$.
4.5. $V_T=35{,}00$; $S_{ABC}=34{,}10$. 4.6. $V_T=10{,}17$; $S_{ABC}=3{,}77$.
4.7. $V_T=7{,}33$; $S_{ABC}=8{,}65$. 4.8. $V_T=8{,}50$; $S_{ABC}=20{,}82$.
4.9. $V_T=28{,}00$; $S_{ABC}=15{,}37$. 4.10. $V_T=26{,}17$; $S_{ABC}=23{,}14$.
4.11. $V_T=54{,}67$; $S_{ABC}=20{,}02$. 4.12. $V_T=9{,}33$; $S_{ABC}=9{,}17$.
4.13. $V_T=39{,}00$; $S_{ABC}=17{,}33$. 4.14. $V_T=5{,}83$; $S_{ABC}=18{,}53$.
4.15. $V_T=39{,}00$; $S_{ABC}=26{,}93$. 4.16. $V_T=26{,}00$; $S_{ABC}=27{,}28$.
4.17. $V_T=21{,}33$; $S_{ABC}=15{,}05$. 4.18. $V_T=62{,}17$; $S_{ABC}=27{,}29$.
4.19. $V_T=35{,}00$; $S_{ABC}=10{,}50$. 4.20. $V_T=3{,}17$; $S_{ABC}=2{,}12$.
4.21. $V_T=9{,}00$; $S_{ABC}=9{,}97$. 4.22. $V_T=29{,}33$; $S_{ABC}=40{,}12$.
4.23. $V_T=6{,}33$; $S_{ABC}=16{,}95$. 4.24. $V_T=15{,}50$; $S_{ABC}=12{,}90$.
4.25. $V_T=2{,}50$; $S_{ABC}=15{,}58$. 4.26. $V_T=12{,}67$; $S_{ABC}=40{,}05$.
4.27. $V_T=33{,}67$; $S_{ABC}=21{,}24$. 4.28. $V_T=55{,}17$; $S_{ABC}=16{,}56$.
4.29. $V_T=46{,}83$; $S_{ABC}=28{,}64$. 4.30. $V_T=53{,}67$; $S_{ABC}=21{,}73$.

Завдання 5

5.1. 1) $AB=20{,}12$; 2) $x+2y+4=0$ AB, $7x+4y-32=0$ BC, $k_{AB}=-1/2$, $k_{BC}=-7/4$; 3) $\angle B=33^\circ 42'$; 4) $2x-y+8=0$ CD, $CD=8{,}94$; 5) $x+7y-11=0$ AE, $K(-3;2)$; 6) $x+2y-1=0$ KF.

5.2. 1) $AB=21{,}21$; 2) $x+y+1=0$ AB, $8x+y-41=0$ BC, $k_{AB}=-1$, $k_{BC}=-8$; 3) $\angle B=37^\circ 54'$; 4) $x-y+5=0$ CD, $CD=9{,}90$; 5) $x+2y-7=0$ AE, $K(-1;4)$; 6) $x+y-3=0$ KF.

5.3. 1) $AB = 20{,}12$; 2) $2x + y + 4 = 0$ AB, $8x - y - 24 = 0$ BC, $k_{AB} = -2$, $k_{BC} = 8$; 3) $\angle B = 33^{\circ}42'$; 4) $x - 2y + 12 = 0$ CD, $CD = 8{,}94$; 5) $x + y - 3 = 0$ AE, $K(-2; 5)$; 6) $2x + y - 1 = 0$ KF.

5.4. 1) $AB = 21{,}21$; 2) $x + y = 0$ AB, $8x + y - 49 = 0$ BC, $k_{AB} = -1$, $k_{BC} = -8$; 3) $\angle B = 37^{\circ}54'$; 4) $x - y + 4 = 0$ CD, $CD = 9{,}90$; 5) $x + 2y - 8 = 0$ AE, $K(0; 4)$; 6) $x + y - 4 = 0$ KF.

5.5. 1) $AB = 16{,}97$; 2) $x + y + 2 = 0$ AB, $7x - 3y - 36 = 0$ BC, $k_{AB} = -1$, $k_{BC} = 7/3$; 3) $\angle B = 68^{\circ}14'$; 4) $x - y = 0$ CD, $CD = 14{,}14$; 5) $x + 3y - 12 = 0$ AE, $K(3; 3)$; 6) $x + y - 6 = 0$ KF.

5.6. 1) $AB = 20{,}12$; 2) $x + 2y - 2 = 0$ AB, $7x + 4y - 54 = 0$ BC, $k_{AB} = -1/2$, $k_{BC} = -7/4$; 3) $\angle B = 33^{\circ}42'$; 4) $2x - y + 6 = 0$ CD, $CD = 8{,}94$; 5) $x + 7y - 27 = 0$ AE, $K(-1; 4)$; 6) $x + 2y - 7 = 0$ KF.

5.7. 1) $AB = 21{,}21$; 2) $x + y + 3 = 0$ AB, $8x + y - 39 = 0$ BC, $k_{AB} = -1$, $k_{BC} = -8$; 3) $\angle B = 37^{\circ}54'$; 4) $x - y + 3 = 0$ CD, $CD = 9{,}90$; 5) $x + 2y - 3 = 0$ AE, $K(-1; 2)$; 6) $x + y - 1 = 0$ KF.

5.8. 1) $AB = 20{,}12$; 2) $2x + y + 8 = 0$ AB, $8x - y - 8 = 0$ BC, $k_{AB} = -2$, $k_{BC} = 8$; 3) $\angle B = 33^{\circ}42'$; 4) $x - 2y + 14 = 0$ CD, $CD = 8{,}94$; 5) $x + y - 1 = 0$ AE, $K(-4; 5)$; 6) $2x + y + 3 = 0$ KF.

5.9. 1) $AB = 21{,}21$; 2) $x + y + 3 = 0$ AB, $8x + y - 46 = 0$ BC, $k_{AB} = -1$, $k_{BC} = -8$; 3) $\angle B = 37^{\circ}54'$; 4) $x - y + 1 = 0$ CD, $CD = 9{,}90$; 5) $x + 2y - 2 = 0$ AE, $K(0; 1)$; 6) $x + y - 1 = 0$ KF.

5.10. 1) $AB = 16{,}97$; 2) $x + y + 6 = 0$ AB, $7x - 3y - 48 = 0$ BC, $k_{AB} = -1$, $k_{BC} = 7/3$; 3) $\angle B = 68^{\circ}14'$; 4) $x - y - 4 = 0$ CD, $CD = 14{,}14$; 5) $x + 3y = 0$ AE, $K(3; -1)$; 6) $x + y - 2 = 0$ KF.

5.11. 1) $AB = 20{,}12$; 2) $x + 2y + 8 = 0$ AB, $7x + 4y - 24 = 0$ BC, $k_{AB} = -1/2$, $k_{BC} = -7/4$; 3) $\angle B = 33^{\circ}42'$; 4) $2x - y + 6 = 0$ CD, $CD = 8{,}94$; 5) $x + 7y + 3 = 0$ AE, $K(-3; 0)$; 6) $x + 2y + 3 = 0$ KF.

5.12. 1) $AB = 21{,}21$; 2) $x + y + 2 = 0$ AB, $8x + y - 54 = 0$ BC, $k_{AB} = -1$, $k_{BC} = -8$; 3) $\angle B = 37^{\circ}54'$; 4) $x - y = 0$ CD, $CD = 9{,}90$; 5) $x + 2y - 3 = 0$ AE, $K(1; 1)$; 6) $x + y - 2 = 0$ KF.

5.13. 1) $AB = 20{,}12$; 2) $2x + y + 10 = 0$ AB, $8x - y - 10 = 0$ BC, $k_{AB} = -2$, $k_{BC} = 8$; 3) $\angle B = 33^{\circ}42'$; 4) $x - 2y + 10 = 0$ CD, $CD = 8{,}94$; 5) $x + y + 1 = 0$ AE, $K(-4; 3)$; 6) $2x + y + 5 = 0$ KF.

5.14. 1) $AB = 21{,}21$; 2) $x + y - 2 = 0$ AB, $8x + y - 65 = 0$ BC, $k_{AB} = -1$, $k_{BC} = -8$; 3) $\angle B = 37^{\circ}54'$; 4) $x - y + 2 = 0$ CD, $CD = 9{,}90$; 5) $x + 2y - 10 = 0$ AE, $K(2; 4)$; 6) $x + y - 6 = 0$ KF.

5.15. 1) $AB = 16{,}97$; 2) $x + y + 2 = 0$ AB, $7x - 3y - 46 = 0$ BC, $k_{AB} = -1$, $k_{BC} = 7/3$; 3) $\angle B = 68^{\circ}14'$; 4) $x - y - 2 = 0$ CD, $CD = 14{,}14$; 5) $x + 3y - 10 = 0$ AE, $K(4; 2)$; 6) $x + y - 6 = 0$ KF.

5.16. 1) $AB = 20{,}12$; 2) $x + 2y + 2 = 0$ AB, $7x + 4y - 46 = 0$ BC, $k_{AB} = -1/2$, $k_{BC} = -7/4$; 3) $\angle B = 33^{\circ}42'$; 4) $2x - y + 4 = 0$ CD, $CD = 8{,}94$; 5) $x + 7y - 13 = 0$ AE, $K(-1; 2)$; 6) $x + 2y - 3 = 0$ KF.

5.17. 1) $AB = 21{,}21$; 2) $x + y - 2 = 0$ AB, $8x + y - 58 = 0$ BC, $k_{AB} = -1$, $k_{BC} = -8$; 3) $\angle B = 37^{\circ}54'$; 4) $x - y + 4 = 0$ CD, $CD = 9{,}90$; 5) $x + 2y - 11 = 0$ AE, $K(1; 5)$; 6) $x + y - 6 = 0$ KF.

5.18. 1) $AB = 20{,}12$; 2) $2x + y = 0$ AB, $8x - y - 40 = 0$ BC, $k_{AB} = -2$, $k_{BC} = 8$; 3) $\angle B = 33^{\circ}42'$; 4) $x - 2y + 10 = 0$ CD, $CD = 8{,}94$; 5) $x + y - 5 = 0$ AE, $K(0; 5)$; 6) $2x + y - 5 = 0$ KF.

5.19. 1) $AB = 21{,}21$; 2) $x + y + 5 = 0$ AB, $8x + y - 30 = 0$ BC, $k_{AB} = -1$, $k_{BC} = -8$; 3) $\angle B = 37^{\circ}54'$; 4) $x - y + 3 = 0$ CD, $CD = 9{,}90$; 5) $x + 2y = 0$ AE, $K(-2; 1)$; 6) $x + y + 1 = 0$ KF.

5.20. 1) $AB = 16{,}97$; 2) $x + y + 4 = 0$ AB, $7x - 3y - 52 = 0$ BC, $k_{AB} = -1$, $k_{BC} = 7/3$; 3) $\angle B = 68^{\circ}14'$; 4) $x - y - 4 = 0$ CD, $CD = 14{,}14$; 5) $x + 3y - 4 = 0$ AE, $K(4; 0)$; 6) $x + y - 4 = 0$ KF.

5.21. 1) $AB = 20{,}12$; 2) $x + 2y + 12 = 0$ AB, $7x + 4y - 16 = 0$ BC, $k_{AB} = -1/2$, $k_{BC} = -7/4$; 3) $\angle B = 33^{\circ}42'$; 4) $2x - y + 4 = 0$ CD, $CD = 8{,}94$; 5) $x + 7y + 17 = 0$ AE, $K(-3; -2)$; 6) $x + 2y + 7 = 0$ KF.

5.22. 1) $AB = 21{,}21$; 2) $x + y = 0$ AB, $8x + y - 56 = 0$ BC, $k_{AB} = -1$, $k_{BC} = -8$; 3) $\angle B = 37^{\circ}54'$; 4) $x - y + 2 = 0$ CD, $CD = 9{,}90$; 5) $x + 2y - 7 = 0$ AE, $K(1; 3)$; 6) $x + y - 4 = 0$ KF.

5.23. 1) $AB = 20{,}12$; 2) $2x + y + 6 = 0$ AB, $8x - y - 26 = 0$ BC, $k_{AB} = -2$, $k_{BC} = 8$; 3) $\angle B = 33^{\circ}42'$; 4) $x - 2y + 8 = 0$ CD, $CD = 8{,}94$; 5) $x + y - 1 = 0$ AE, $K(-2; 3)$; 6) $2x + y + 1 = 0$ KF.

5.24. 1) $AB = 21{,}21$; 2) $x + y + 2 = 0$ AB, $8x + y - 33 = 0$ BC, $k_{AB} = -1$, $k_{BC} = -8$; 3) $\angle B = 37^{\circ}54'$; 4) $x - y + 6 = 0$ CD, $CD = 9{,}90$; 5) $x + 2y - 6 = 0$ AE, $K(-2; 4)$; 6) $x + y - 2 = 0$ KF.

5.25. 1) $AB=16{,}97$; 2) $x+y+4=0$ AB, $7x-3y-42=0$ BC, $k_{AB}=-1$, $k_{BC}=7/3$; 3) $\angle B=68^\circ 14'$; 4) $x-y-2=0$ CD, $CD=14{,}14$; 5) $x+3y-6=0$ AE, $K(3;1)$; 6) $x+y-4=0$ KF.

5.26. 1) $AB=20{,}12$; 2) $x+2y+6=0$ AB, $7x+4y-38=0$ BC, $k_{AB}=-1/2$, $k_{BC}=-7/4$; 3) $\angle B=33^\circ 42'$; 4) $2x-y+2=0$ CD, $CD=8{,}94$; 5) $x+7y+1=0$ AE, $K(-1;0)$; 6) $x+2y+1=0$ KF.

5.27. 1) $AB=21{,}21$; 2) $x+y+4=0$ AB, $8x+y-38=0$ BC, $k_{AB}=-1$, $k_{BC}=-8$; 3) $\angle B=37^\circ 54'$; 4) $x-y+2=0$ CD, $CD=9{,}90$; 5) $x+2y-1=0$ AE, $K(-1;1)$; 6) $x+y=0$ KF.

5.28. 1) $AB=20{,}12$; 2) $2x+y+2=0$ AB, $8x-y-42=0$ BC, $k_{AB}=-2$, $k_{BC}=8$; 3) $\angle B=33^\circ 42'$; 4) $x-2y+6=0$ CD, $CD=8{,}94$; 5) $x+y-3=0$ AE, $K(0;3)$; 6) $2x+y-3=0$ KF.

5.29. 1) $AB=21{,}21$; 2) $x+y+1=0$ AB, $8x+y-62=0$ BC, $k_{AB}=-1$, $k_{BC}=-8$; 3) $\angle B=37^\circ 54'$; 4) $x-y-1=0$ CD, $CD=9{,}90$; 5) $x+2y-4=0$ AE, $K(2;1)$; 6) $x+y-3=0$ KF.

5.30. 1) $AB=16{,}97$; 2) $x+y=0$ AB, $7x-3y-40=0$ BC, $k_{AB}=-1$, $k_{BC}=7/3$; 3) $\angle B=68^\circ 14'$; 4) $x-y=0$ CD, $CD=14{,}14$; 5) $x+3y-16=0$ AE, $K(4;4)$; 6) $x+y-8=0$ KF.

Завдання 6

6.1. 1) $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+4)^2=4$; $C\left(\frac{3}{2};-4\right)$, $R=2$. 2) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1$; $a=\sqrt{2}$, $b=1$, $c=1$, $F_{1,2}=(\pm 1;0)$.

6.2. 1) $(x+2)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=4$; $C\left(-2;\frac{1}{4}\right)$, $R=2$. 2) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{1}=1$; $a=\sqrt{3}$, $b=1$, $c=\sqrt{2}$, $F_{1,2}=(\pm\sqrt{2};0)$.

6.3. 1) $(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=9$; $C\left(1;-\frac{1}{2}\right)$, $R=3$. 2) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$; $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{2}$, $c=1$, $F_{1,2}=(\pm 1;0)$.

6.4. 1) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(y+3)^2=4$; $C\left(-\frac{1}{3};-3\right)$, $R=2$. 2) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$; $a=2$, $b=1$, $c=\sqrt{3}$, $F_{1,2}=(\pm\sqrt{3};0)$.

6.5. 1) $(x+3)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=9$; $C\left(-3;-\frac{3}{2}\right)$, $R=3$. 2) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$; $a=2$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{2}$, $F_{1,2}=(\pm\sqrt{2};0)$.

6.6. 1) $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+(y+2)^2=9$; $C\left(\frac{1}{4};-2\right)$, $R=3$. 2) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$; $a=2$, $b=\sqrt{3}$, $c=1$, $F_{1,2}=(\pm 1;0)$.

6.7. 1) $(x-2)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=9$; $C\left(2;-\frac{1}{3}\right)$, $R=3$. 2) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{2}=1$; $a=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{3}$, $F_{1,2}=(\pm\sqrt{3};0)$.

6.8. 1) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-3)^2=4$; $C\left(\frac{1}{2};3\right)$, $R=2$. 2) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$; $a=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{3}$, $c=\sqrt{2}$, $F_{1,2}=(\pm\sqrt{2};0)$.

6.9. 1) $(x+3)^2+(y+2)^2=16$; $C(-3;-2)$, $R=4$. 2) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$; $a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{2}$, $c=2$, $F_{1,2}=(\pm 2;0)$.

6.10. 1) $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=4$; $C\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$, $R=2$. 2) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$; $a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{3}$, $c=\sqrt{3}$, $F_{1,2}=(\pm\sqrt{3};0)$.

6.11. 1) $(x+3)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=4$; $C\left(-3;-\frac{1}{2}\right)$, $R=2$. 2) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$; $a=\sqrt{6}$, $b=2$, $c=\sqrt{2}$, $F_{1,2}=(\pm\sqrt{2};0)$.

6.12. 1) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+(y+2)^2=9$; $C\left(\frac{1}{3};-2\right)$, $R=3$. 2) $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{3}=1$; $a=\sqrt{7}$, $b=\sqrt{3}$, $c=2$, $F_{1,2}=(\pm 2;0)$.

6.13. 1) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=1$; $C\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$, $R=1$. 2) $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{4}=1$; $a=\sqrt{7}$, $b=2$, $c=\sqrt{3}$, $F_{1,2}=(\pm\sqrt{3};0)$.

6.14. 1) $(x+4)^2+(y-5)^2=9$; $C(-4;5)$, $R=3$. 2) $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{5}=1$; $a=\sqrt{7}$, $b=\sqrt{5}$, $c=\sqrt{2}$, $F_{1,2}=(\pm\sqrt{2};0)$.

6.15. 1) $(x+3)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=9$; $C\left(-3;\frac{1}{3}\right)$, $R=3$. 2) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{3}=1$; $a=\sqrt{8}$, $b=\sqrt{3}$, $c=\sqrt{5}$, $F_{1,2}=(\pm\sqrt{5};0)$.

6.16. 1) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-5)^2=4$; $C\left(-\frac{1}{2};5\right)$, $R=2$. 2) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$; $a=\sqrt{8}$, $b=2$, $c=2$, $F_{1,2}=(\pm 2;0)$.

6.17. 1) $(x-3)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=9$; $C\left(3;\frac{1}{4}\right)$, $R=3$. 2) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$; $a=\sqrt{8}$, $b=\sqrt{5}$, $c=\sqrt{3}$, $F_{1,2}=(\pm\sqrt{3};0)$.

6.18. 1) $(x+5)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=25$; $C\left(-5;\frac{1}{2}\right)$, $R=5$. 2) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$; $a=\sqrt{8}$, $b=\sqrt{6}$, $c=\sqrt{2}$, $F_{1,2}=\left(\pm\sqrt{2};0\right)$.

6.19. 1) $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1$; $C\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right)$, $R=1$. 2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$; $a=3$, $b=\sqrt{3}$, $c=\sqrt{6}$, $F_{1,2}=\left(\pm\sqrt{6};0\right)$.

6.20. 1) $\left(x+\frac{1}{5}\right)^2+(y+1)^2=4$; $C\left(-\frac{1}{5};-1\right)$, $R=2$. 2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; $a=3$, $b=2$, $c=\sqrt{5}$, $F_{1,2}=\left(\pm\sqrt{5};0\right)$.

6.21. 1) $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+(y-2)^2=4$; $C\left(-\frac{1}{4};2\right)$, $R=2$. 2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$; $a=3$, $b=\sqrt{5}$, $c=2$, $F_{1,2}=(\pm 2;0)$.

6.22. 1) $(x+2)^2+(y-1)^2=4$; $C(-2;1)$, $R=2$. 2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$; $a=3$, $b=\sqrt{6}$, $c=\sqrt{3}$, $F_{1,2}=\left(\pm\sqrt{3};0\right)$.

6.23. 1) $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=9$; $C\left(-\frac{3}{2};2\right)$, $R=3$. 2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{7}=1$; $a=3$, $b=\sqrt{7}$, $c=\sqrt{2}$, $F_{1,2}=\left(\pm\sqrt{2};0\right)$.

6.24. 1) $(x+1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=4$; $C\left(-1;\frac{3}{2}\right)$, $R=2$. 2) $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{4}=1$; $a=\sqrt{10}$, $b=2$, $c=\sqrt{6}$, $F_{1,2}=\left(\pm\sqrt{6};0\right)$.

6.25. 1) $(x-4)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=9$; $C\left(4;-\frac{5}{2}\right)$, $R=3$. 2) $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$; $a=\sqrt{10}$, $b=\sqrt{5}$, $c=\sqrt{5}$, $F_{1,2}=\left(\pm\sqrt{5};0\right)$.

6.26. 1) $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+(y-1)^2=4$; $C\left(-\frac{5}{2};1\right)$, $R=2$. 2) $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$; $a=\sqrt{10}$, $b=\sqrt{6}$, $c=2$, $F_{1,2}=(\pm 2;0)$.

6.27. 1) $(x+2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=4$; $C\left(-2;\frac{3}{2}\right)$, $R=2$. 2) $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{7}=1$; $a=\sqrt{10}$, $b=\sqrt{7}$, $c=\sqrt{3}$, $F_{1,2}=\left(\pm\sqrt{3};0\right)$.

6.28. 1) $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=4$; $C\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $R=2$. 2) $\frac{x^2}{11}+\frac{y^2}{5}=1$; $a=\sqrt{11}$, $b=\sqrt{5}$, $c=\sqrt{6}$, $F_{1,2}=\left(\pm\sqrt{6};0\right)$.

6.29. 1) $(x-4)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=4$; $C\left(4;\frac{5}{2}\right)$, $R=2$. 2) $\frac{x^2}{11}+\frac{y^2}{6}=1$; $a=\sqrt{11}$, $b=\sqrt{6}$, $c=\sqrt{5}$, $F_{1,2}=\left(\pm\sqrt{5};0\right)$.

6.30. 1) $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+(y+2)^2=4$; $C\left(-\frac{5}{2};-2\right)$, $R=2$. 2) $\frac{x^2}{11}+\frac{y^2}{7}=1$; $a=\sqrt{11}$, $b=\sqrt{7}$, $c=2$, $F_{1,2}=(\pm 2;0)$.

Завдання 7

7.1. 1. $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{3}=1$; $F_{1,2}(\pm 2;0)$, $C_{1,2}(\pm 1;0)$, $\varepsilon=2$, $y=\pm 1{,}73x$, $B(\pm 1{,}32;\pm 1{,}5)$.
2. $(x-2)^2=4(y-2)$; $p=2$, $C(2;2)$, $F(2;3)$, $y=1$.

7.2. 1. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$; $F_{1,2}(\pm 2;0)$, $C_{1,2}(\pm 1{,}41;0)$, $\varepsilon=1{,}41$, $y=\pm x$, $B(\pm 1{,}73;\pm 1)$.
2. $(x-1)^2=-4(y-3)$; $p=-2$, $C(1;3)$, $F(1;2)$, $y=4$.

7.3. 1. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1$; $F_{1,2}(\pm 2;0)$, $C_{1,2}(\pm 1{,}73;0)$, $\varepsilon=1{,}15$, $y=\pm 0{,}58x$, $B(\pm 1{,}94;\pm 0{,}5)$.
2. $(x+4)^2=8(y+1)$; $p=4$, $C(-4;-1)$, $F(-4;1)$, $y=-3$.

7.4. 1. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$; $F_{1,2}(\pm 3;0)$, $C_{1,2}(\pm 1{,}73;0)$, $\varepsilon=1{,}73$, $y=\pm 1{,}41x$, $B(\pm 2{,}24;\pm 2)$.
2. $(x+3)^2=8(y+3)$; $p=4$, $C(-3;-3)$, $F(-3;-1)$, $y=-5$.

7.5. 1. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$; $F_{1,2}(\pm 3;0)$, $C_{1,2}(\pm 2{,}45;0)$, $\varepsilon=1{,}22$, $y=\pm 0{,}71x$, $B(\pm 2{,}83;\pm 1)$.
2. $(x+3)^2=4(y-1)$; $p=2$, $C(-3;1)$, $F(-3;2)$, $y=0$.

7.6. 1. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$; $F_{1,2}(\pm 4;0)$, $C_{1,2}(\pm 2;0)$, $\varepsilon=2$, $y=\pm 1{,}73x$, $B(\pm 2{,}65;\pm 3)$.
2. $(x+1)^2=4(y-2)$; $p=2$, $C(-1;2)$, $F(-1;3)$, $y=1$.

7.7. 1. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{10}=1$; $F_{1,2}(\pm 4;0)$, $C_{1,2}(\pm 2{,}45;0)$, $\varepsilon=1{,}63$, $y=\pm 1{,}29x$, $B(\pm 3{,}12;\pm 2{,}5)$.
2. $(x+2)^2=-8(y-1)$; $p=-4$, $C(-2;1)$, $F(-2;-1)$, $y=3$.

7.8. 1. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$; $F_{1,2}(\pm 4;0)$, $C_{1,2}(\pm 2{,}83;0)$, $\varepsilon=1{,}41$, $y=\pm x$, $B(\pm 3{,}46;\pm 2)$.
2. $(x-1)^2=-8(y+1)$; $p=-4$, $C(1;-1)$, $F(1;-3)$, $y=1$.

7.9. 1. $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$; $F_{1,2}(\pm 4;0)$, $C_{1,2}(\pm 3{,}16;0)$, $\varepsilon=1{,}26$, $y=\pm 0{,}77x$, $B(\pm 3{,}71;\pm 1{,}5)$.
2. $(x-2)^2=-4(y+2)$; $p=-2$, $C(2;-2)$, $F(2;-3)$, $y=-1$.

7.10. 1. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$; $F_{1,2}(\pm 4;0)$, $C_{1,2}(\pm 3{,}46;0)$, $\varepsilon=1{,}15$, $y=\pm 0{,}58x$, $B(\pm 3{,}87;\pm 1)$.
2. $(x-3)^2=8(y+3)$; $p=4$, $C(3;-3)$, $F(3;-1)$, $y=-5$.

7.11. 1. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$; $F_{1,2}(\pm 5;0)$, $C_{1,2}(\pm 2{,}24;0)$, $\varepsilon=2{,}24$, $y=\pm 2x$, $B(\pm 3;\pm 4)$.
2. $(x-1)^2=4(y-1)$; $p=2$, $C(1;1)$, $F(1;2)$, $y=0$.

7.12. 1. $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{15}=1$; $F_{1,2}(\pm5;0)$, $C_{1,2}(\pm3,16;0)$, $\varepsilon=1,58$, $y=\pm1,22x$, $B(\pm4;\pm3)$.
2. $(x-2)^2=-8(y+1)$; $p=-4$, $C(2;-1)$, $F(2;-3)$, $y=1$.

7.13. 1. $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{10}=1$; $F_{1,2}(\pm5;0)$, $C_{1,2}(\pm3,87;0)$, $\varepsilon=1,29$, $y=\pm0,82x$, $B(\pm4,58;\pm2)$.
2. $(x-3)^2=-4(y+2)$; $p=-2$, $C(3;-2)$, $F(3;-3)$, $y=-1$.

7.14. 1. $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$; $F_{1,2}(\pm5;0)$, $C_{1,2}(\pm4,47;0)$, $\varepsilon=1,12$, $y=\pm0,5x$, $B(\pm4,9;\pm1)$.
2. $(x+1)^2=8(y+3)$; $p=4$, $C(-1;-3)$, $F(-1;-1)$, $y=-5$.

7.15. 1. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{30}=1$; $F_{1,2}(\pm6;0)$, $C_{1,2}(\pm2,45;0)$, $\varepsilon=2,45$, $y=\pm2,24x$, $B(\pm3,32;\pm5)$.
2. $(x-2)^2=4(y-1)$; $p=2$, $C(2;1)$, $F(2;2)$, $y=0$.

7.16. 1. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$; $F_{1,2}(\pm6;0)$, $C_{1,2}(\pm3;0)$, $\varepsilon=2$, $y=\pm1,73x$, $B(\pm3,97;\pm4,5)$.
2. $(x-3)^2=-8(y-1)$; $p=-4$, $C(3;1)$, $F(3;-1)$, $y=3$.

7.17. 1. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{24}=1$; $F_{1,2}(\pm6;0)$, $C_{1,2}(\pm3,46;0)$, $\varepsilon=1,73$, $y=\pm1,41x$, $B(\pm4,47;\pm4)$.
2. $(x+1)^2=-4(y+2)$; $p=-2$, $C(-1;-2)$, $F(-1;-3)$, $y=-1$.

7.18. 1. $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{18}=1$; $F_{1,2}(\pm6;0)$, $C_{1,2}(\pm4,24;0)$, $\varepsilon=1,41$, $y=\pm x$, $B(\pm5,20;\pm3)$.
2. $(x+2)^2=8(y+3)$; $p=4$, $C(-2;-3)$, $F(-2;-1)$, $y=-5$.

7.19. 1. $\frac{x^2}{21}-\frac{y^2}{15}=1$; $F_{1,2}(\pm6;0)$, $C_{1,2}(\pm4,58;0)$, $\varepsilon=1,31$, $y=\pm0,85x$, $B(\pm5,45;\pm2,5)$.
2. $(x-3)^2=4(y-1)$; $p=2$, $C(3;1)$, $F(3;2)$, $y=0$.

7.20. 1. $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{12}=1$; $F_{1,2}(\pm6;0)$, $C_{1,2}(\pm4,9;0)$, $\varepsilon=1,22$, $y=\pm0,71x$, $B(\pm5,66;\pm2)$.
2. $(x+1)^2=-4(y+1)$; $p=-2$, $C(-1;-1)$, $F(-1;-2)$, $y=0$.

7.21. 1. $\frac{x^2}{27}-\frac{y^2}{9}=1$; $F_{1,2}(\pm6;0)$, $C_{1,2}(\pm5,2;0)$, $\varepsilon=1,15$, $y=\pm0,58x$, $B(\pm5,81;\pm1,5)$.
2. $(x+2)^2=-4(y+2)$; $p=-2$, $C(-2;-2)$, $F(-2;-3)$, $y=-1$.

7.22. 1. $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{42}=1$; $F_{1,2}(\pm7;0)$, $C_{1,2}(\pm2,65;0)$, $\varepsilon=2,65$, $y=\pm2,45x$, $B(\pm3,61;\pm6)$.
2. $(x+3)^2=8(y+3)$; $p=4$, $C(-3;-3)$, $F(-3;-1)$, $y=-5$.

7.23. 1. $\frac{x^2}{14}-\frac{y^2}{35}=1$; $F_{1,2}(\pm7;0)$, $C_{1,2}(\pm3,74;0)$, $\varepsilon=1,87$, $y=\pm1,58x$, $B(\pm4,9;\pm5)$.
2. $(x+1)^2=4(y-1)$; $p=2$, $C(-1;1)$, $F(-1;2)$, $y=0$.

7.24. 1. $\frac{x^2}{21}-\frac{y^2}{28}=1$; $F_{1,2}(\pm7;0)$, $C_{1,2}(\pm4,58;0)$, $\varepsilon=1,53$, $y=\pm1,15x$, $B(\pm5,74;\pm4)$.
2. $(x+2)^2=-8(y+2)$; $p=-4$, $C(-2;-2)$, $F(-2;-4)$, $y=0$.

7.25. 1. $\frac{x^2}{28}-\frac{y^2}{21}=1$; $F_{1,2}(\pm7;0)$, $C_{1,2}(\pm5,29;0)$, $\varepsilon=1,32$, $y=\pm0,87x$, $B(\pm6,32;\pm3)$.
2. $(x+3)^2=-4(y+2)$; $p=-2$, $C(-3;-2)$, $F(-3;-3)$, $y=-1$.

7.26. 1. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1$; $F_{1,2}(\pm8;0)$, $C_{1,2}(\pm4;0)$, $\varepsilon=2$, $y=\pm1,73x$, $B(\pm5,29;\pm6)$.
2. $(x-1)^2=8(y+3)$; $p=4$, $C(1;-3)$, $F(1;-1)$, $y=-5$.

7.27. 1. $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{40}=1$; $F_{1,2}(\pm8;0)$, $C_{1,2}(\pm4,9;0)$, $\varepsilon=1,63$, $y=\pm1,29x$, $B(\pm6,24;\pm5)$.
2. $(x+2)^2=4(y-1)$; $p=2$, $C(-2;1)$, $F(-2;2)$, $y=0$.

7.28. 1. $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{32}=1$; $F_{1,2}(\pm8;0)$, $C_{1,2}(\pm5,66;0)$, $\varepsilon=1,41$, $y=\pm x$, $B(\pm6,93;\pm4)$.
2. $(x+3)^2=-8(y+2)$; $p=-4$, $C(-3;-2)$, $F(-3;-4)$, $y=0$.

7.29. 1. $\frac{x^2}{40}-\frac{y^2}{24}=1$; $F_{1,2}(\pm8;0)$, $C_{1,2}(\pm6,32;0)$, $\varepsilon=1,26$, $y=\pm0,77x$, $B(\pm7,42;\pm3)$.
2. $(x-1)^2=-4(y+2)$; $p=-2$, $C(1;-2)$, $F(1;-3)$, $y=-1$.

7.30. 1. $\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{16}=1$; $F_{1,2}(\pm8;0)$, $C_{1,2}(\pm6,93;0)$, $\varepsilon=1,15$, $y=\pm0,58x$, $B(\pm7,75;\pm2)$.
2. $(x-2)^2=8(y+3)$; $p=4$, $C(2;-3)$, $F(2;-1)$, $y=-5$.

Завдання 8

8.1. 1. *а)* $2x-y+z+27=0$ Π_1; *б)* $x+3y+z+11=0$ Π_2; *в)* $x+3y+z-10=0$ Π_3.
2. Виконується. 3. $d=6,33$.

8.2. 1. *а)* $2x+2y-z-9=0$ Π_1; *б)* $x-2y-2z+3=0$ Π_2; *в)* $x-2y-2z-15=0$ Π_3.
2. Виконується. 3. $d=6,00$.

8.3. 1. *а)* $x+y-z+1=0$ Π_1; *б)* $7x-3y+4z+50=0$ Π_2; *в)* $7x-3y+4z-31=0$ Π_3.
2. Виконується. 3. $d=9,42$.

8.4. 1. *а)* $x-y+8z-37=0$ Π_1; *б)* $3x-5y-z-50=0$ Π_2; *в)* $3x-5y-z+14=0$ Π_3.
2. Виконується. 3. $d=10,82$.

8.5. 1. *а)* $2x+2y-z-14=0$ Π_1; *б)* $3x-2y+2z-25=0$ Π_2; *в)* $3x-2y+2z+15=0$ Π_3.
2. Виконується. 3. $d=9,70$.

8.6. 1. *а)* $5x+4y-z+77=0$ Π_1; *б)* $x-y+z-8=0$ Π_2; *в)* $x-y+z+7=0$ Π_3.
2. Виконується. 3. $d=8,66$.

8.7. 1. *а)* $x-9y+5z+7=0$ Π_1; *б)* $x-y-2z-20=0$ Π_2; *в)* $x-y-2z=0$ Π_3.
2. Виконується. 3. $d=8,16$.

8.8. 1. *а)* $2x-3y+4z+4=0$ Π_1; *б)* $2x-z-22=0$ Π_2; *в)* $2x-z+1=0$ Π_3.
2. Виконується. 3. $d=10,29$.

8.9. 1. *а)* $4x+3y-5z+23=0\ \Pi_1$; *б)* $2x-y+z-19=0\ \Pi_2$; *в)* $2x-y+z+1=0\ \Pi_3$. 2. Виконується. 3. $d=8{,}16$.

8.10. 1. *а)* $x+4y+2z+11=0\ \Pi_1$; *б)* $2x+3y-7z-43=0\ \Pi_2$; *в)* $2x+3y-7z+35=0\ \Pi_3$. 2. Виконується. 3. $d=9{,}91$.

8.11. 1. *а)* $x+7y-5z+18=0\ \Pi_1$; *б)* $x-3y-4z-47=0\ \Pi_2$; *в)* $x-3y-4z-1=0\ \Pi_3$. 2. Виконується. 3. $d=9{,}02$.

8.12. 1. *а)* $2x+4y-z+23=0\ \Pi_1$; *б)* $4x-3y-4z+45=0\ \Pi_2$; *в)* $4x-3y-4z-10=0\ \Pi_3$. 2. Виконується. 3. $d=8{,}59$.

8.13. 1. *а)* $4x-7y+z-30=0\ \Pi_1$; *б)* $2x+y-z+18=0\ \Pi_2$; *в)* $2x+y-z-5=0\ \Pi_3$. 2. Виконується. 3. $d=9{,}39$.

8.14. 1. *а)* $5x+y-3z+18=0\ \Pi_1$; *б)* $4x+y+7z+60=0\ \Pi_2$; *в)* $4x+y+7z-21=0\ \Pi_3$. 2. Виконується. 3. $d=9{,}97$.

8.15. 1. *а)* $x+3y+z=0\ \Pi_1$; *б)* $5x-3y+4z+52=0\ \Pi_2$; *в)* $5x-3y+4z-35=0\ \Pi_3$. 2. Виконується. 3. $d=12{,}30$.

8.16. 1. *а)* $5x+4y-6z+27=0\ \Pi_1$; *б)* $2x+2y+3z-36=0\ \Pi_2$; *в)* $2x+2y+3z-2=0\ \Pi_3$. 2. Виконується. 3. $d=8{,}25$.

8.17. 1. *а)* $3x-3y+2z+6=0\ \Pi_1$; *б)* $x+5y+6z-88=0\ \Pi_2$; *в)* $x+5y+6z-40=0\ \Pi_3$. 2. Виконується. 3. $d=6{,}10$.

8.18. 1. *а)* $3x-7y+8z-39=0\ \Pi_1$; *б)* $2x+2y+z-29=0\ \Pi_2$; *в)* $2x+2y+z+1=0\ \Pi_3$. 2. Виконується. 3. $d=10{,}00$.

8.19. 1. *а)* $x-6y+4z-50=0\ \Pi_1$; *б)* $2x+y+z-24=0\ \Pi_2$; *в)* $2x+y+z-5=0\ \Pi_3$. 2. Виконується. 3. $d=7{,}76$.

8.20. 1. *а)* $5x+2y-9z+50=0\ \Pi_1$; *б)* $4x-y+2z-27=0\ \Pi_2$; *в)* $4x-y+2z+11=0\ \Pi_3$. 2. Виконується. 3. $d=8{,}29$.

8.21. 1. *а)* $2x+2y-z-12=0\ \Pi_1$; *б)* $x-4y-6z-53=0\ \Pi_2$; *в)* $x-4y-6z+10=0\ \Pi_3$. 2. Виконується. 3. $d=8{,}65$.

8.22. 1. *а)* $x-2y+2z-5=0\ \Pi_1$; *б)* $2x+2y+z+17=0\ \Pi_2$; *в)* $2x+2y+z-16=0\ \Pi_3$. 2. Виконується. 3. $d=11{,}00$.

8.23. 1. *а)* $x+y+3z-10=0\ \Pi_1$; *б)* $x+5y-2z+39=0\ \Pi_2$; *в)* $x+5y-2z-21=0\ \Pi_3$. 2. Виконується. 3. $d=10{,}95$.

8.24. 1. *а)* $x+y-z+1=0\ \Pi_1$; *б)* $4x-y+3z+25=0\ \Pi_2$; *в)* $4x-y+3z-26=0\ \Pi_3$. 2. Виконується. 3. $d=10{,}00$.

8.25. 1. *а)* $2x+2y-z-12=0\ \Pi_1$; *б)* $x-y-5=0\ \Pi_2$; *в)* $x-y+6=0\ \Pi_3$. 2. Виконується. 3. $d=7{,}78$.

8.26. 1. *а)* $x+4y-2z+21=0\ \Pi_1$; *б)* $2x-y-z-21=0\ \Pi_2$; *в)* $2x-y-z-4=0\ \Pi_3$. 2. Виконується. 3. $d=6{,}94$.

8.27. 1. *а)* $x-y+2z+7=0\ \Pi_1$; *б)* $x-y-z-14=0\ \Pi_2$; *в)* $x-y-z+3=0\ \Pi_3$. 2. Виконується. 3. $d=9{,}81$.

8.28. 1. *а)* $x+9y-5z+60=0\ \Pi_1$; *б)* $3x-2y-3z-35=0\ \Pi_2$; *в)* $3x-2y-3z+3=0\ \Pi_3$. 2. Виконується. 3. $d=8{,}10$.

8.29. 1. *а)* $x+9y-9z+90=0\ \Pi_1$; *б)* $9x-2y-z-91=0\ \Pi_2$; *в)* $9x-2y-z-24=0\ \Pi_3$. 2. Виконується. 3. $d=7{,}22$.

8.30. 1. *а)* $x+4y+5z-46=0\ \Pi_1$; *б)* $x-4y+3z+28=0\ \Pi_2$; *в)* $x-4y+3z-19=0\ \Pi_3$. 2. Виконується. 3. $d=9{,}22$.

Завдання 9

9.1. 1. $\frac{x}{-4}=\frac{y-1}{-7}=\frac{z+2}{1}$; $\frac{x+4}{3}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+3}{8}$. 2. $\alpha=67°22'$.

9.2. 1. $\frac{x}{7}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-1}{-3}$; $\frac{x-2}{-3}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+9}{8}$. 2. $\alpha=50°37'$.

9.3. 1. $\frac{x}{-5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{7}$; $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-4}{-7}$. 2. $\alpha=27°14'$.

9.4. 1. $\frac{x}{-4}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{1}$; $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-1}{1}$. 2. $\alpha=48°4'$.

9.5. 1. $\frac{x}{3}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z-2}{5}$; $\frac{x-4}{-7}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{-6}$. 2. $\alpha=33°1'$.

9.6. 1. $\frac{x}{-5}=\frac{y+4}{1}=\frac{z+1}{7}$; $\frac{x-2}{-5}=\frac{y+4}{6}=\frac{z+7}{1}$. 2. $\alpha=56°10'$.

9.7. 1. $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+3}{9}$; $\frac{x-4}{-5}=\frac{y+6}{7}=\frac{z+3}{3}$. 2. $\alpha=80°13'$.

9.8. 1. $\frac{x}{1}=\frac{y+3}{-5}=\frac{z-2}{-3}$; $\frac{x-4}{-5}=\frac{y+6}{5}=\frac{z-1}{-3}$. 2. $\alpha=62°30'$.

9.9. 1. $\frac{x}{-1}=\frac{y-2}{7}=\frac{z+3}{5}$; $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{-5}$. 2. $\alpha=23°28'$.

9.10. 1. $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-1}{-9}$; $\frac{x-6}{-9}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{1}$. 2. $\alpha=71°32'$.

9.11. 1. $\frac{x}{-6}=\frac{y+3}{-7}=\frac{z-1}{5}$; $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{-5}$. 2. $\alpha=29°47'$.

9.12. 1. $\frac{x}{8}=\frac{y-2}{-9}=\frac{z+1}{-1}$; $\frac{x-2}{-5}=\frac{y+1}{6}=\frac{z-1}{-5}$. 2. $\alpha=37°26'$.

9.13. 1. $\frac{x}{3}=\frac{y-3}{-8}=\frac{z-2}{7}$; $\frac{x-4}{-5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{-1}$. 2. $\alpha=58°31'$.

9.14. 1. $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-1}{-9}$; $\frac{x-2}{-6}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{1}$. 2. $\alpha=75°43'$.

9.15. 1. $\frac{x}{7}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-3}{1}$; $\frac{x+6}{7}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-2}{-3}$. 2. $\alpha=64°6'$.

9.16. 1. $\frac{x}{-5}=\frac{y-1}{-7}=\frac{z-3}{1}$; $\frac{x+4}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{-2}$. 2. $\alpha=42°14'$.

9.17. 1. $\frac{x}{7}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-1}{5}$; $\frac{x+4}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{-3}$. 2. $\alpha=84°23'$.

9.18. 1. $\frac{x}{8}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z-1}{-2}$; $\frac{x-4}{-6}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-1}{-3}$. 2. $\alpha=34°4'$.

9.19. 1. $\frac{x}{-3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{-5}$; $\frac{x+4}{3}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{2}$. 2. $\alpha=54°49'$.

9.20. 1. $\frac{x}{7}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{-5}$; $\frac{x+4}{3}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z-1}{2}$. 2. $\alpha=85°35'$.

9.21. 1. $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z+2}{7}$; $\frac{x-4}{-7}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+1}{1}$. 2. $\alpha=77°00'$.

9.22. 1. $\frac{x}{3}=\frac{y-4}{-7}=\frac{z-1}{-5}$; $\frac{x-6}{-7}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+7}{5}$. 2. $\alpha=66°36'$.

9.23. 1. $\frac{x}{-4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$; $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+4}{3}=\frac{z+2}{5}$. 2. $\alpha=76°13'$.

9.24. 1. $\frac{x}{1}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z-1}{-3}$; $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-2}{-3}$. 2. $\alpha=66°36'$.

9.25. 1. $\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{9}=\frac{z-4}{7}$; $\frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{3}$. 2. $\alpha=72°32'$.

9.26. 1. $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-1}{1}$; $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+3}{1}$. 2. $\alpha=30°1'$.

9.27. 1. $\frac{x}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{7}$; $\frac{x-4}{-3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+5}{8}$. 2. $\alpha=49°56'$.

9.28. 1. $\frac{x}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{-7}$; $\frac{x+2}{5}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-3}{-5}$. 2. $\alpha=31°3'$.

9.29. 1. $\frac{x}{-7}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z+1}{1}$; $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-5}{-2}$. 2. $\alpha=76°44'$.

9.30. 1. $\frac{x}{-4}=\frac{y-3}{-7}=\frac{z-2}{1}$; $\frac{x-4}{-3}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-1}{8}$. 2. $\alpha=79°17'$.

Завдання 10

10.1.	а) $M(-7;9;-9)$;	б) $\alpha=21°7'$.	10.2.	а) $M(1;3;2)$;	б) $\alpha=47°14'$.
10.3.	а) $M(1;4;6)$;	б) $\alpha=24°6'$.	10.4.	а) $M(2;-4;1)$;	б) $\alpha=16°58'$.
10.5.	а) $M(-1;2;3)$;	б) $\alpha=47°4'$.	10.6.	а) $M(-2;3;5)$;	б) $\alpha=38°36'$.
10.7.	а) $M(-1;-4;2)$;	б) $\alpha=24°16'$.	10.8.	а) $M(2;5;-1)$;	б) $\alpha=39°41'$.
10.9.	а) $M(5;-1;1)$;	б) $\alpha=30°1'$.	10.10.	а) $M(3;1;-1)$;	б) $\alpha=35°47'$.
10.11.	а) $M(-1;0;5)$;	б) $\alpha=32°20'$.	10.12.	а) $M(1;4;-1)$;	б) $\alpha=38°2'$.
10.13.	а) $M(8;-9;1)$;	б) $\alpha=30°35'$.	10.14.	а) $M(-3;-5;-2)$;	б) $\alpha=59°34'$.
10.15.	а) $M(-1;-5;2)$;	б) $\alpha=49°20'$.	10.16.	а) $M(3;1;2)$;	б) $\alpha=41°50'$.
10.17.	а) $M(-2;2;-6)$;	б) $\alpha=71°55'$.	10.18.	а) $M(1;-3;7)$;	б) $\alpha=25°20'$.
10.19.	а) $M(4;1;-1)$;	б) $\alpha=56°5'$.	10.20.	а) $M(-6;2;-8)$;	б) $\alpha=21°22'$.
10.21.	а) $M(-1;4;-2)$;	б) $\alpha=39°15'$.	10.22.	а) $M(-5;6;7)$;	б) $\alpha=24°16'$.
10.23.	а) $M(-2;-1;1)$;	б) $\alpha=16°50'$.	10.24.	а) $M(4;3;-1)$;	б) $\alpha=37°42'$.
10.25.	а) $M(-2;-1;3)$;	б) $\alpha=44°26'$.	10.26.	а) $M(3;2;4)$;	б) $\alpha=47°4'$.
10.27.	а) $M(-3;-1;4)$;	б) $\alpha=52°17'$.	10.28.	а) $M(1;9;4)$;	б) $\alpha=23°1'$.
10.29.	а) $M(-1;3;5)$;	б) $\alpha=42°47'$.	10.30.	а) $M(-2;1;2)$;	б) $\alpha=63°6'$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П. Юрик.І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001. – 648 с.: іл.

2. В.С.Шипачев. Высшая математика. Учеб. для вузов. 5-е изд., стер. – М.: Высш. школа. 2002. – 479 с.: ил.

3. Зайцев И.А. Высшая математика: Учеб. для вузов. – 3-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2004 – 400 с.: ил.

4. Черненко В.Д. Высшая математика в примерах и задачах: Учебное пособие для вузов. В 3 т.: Т. 1. – СПб.: Политехника, 2003. – 703 с.: ил.

5. Л.І.Дюженкова, О.Ю.Дюженкова, Г.О.Михалін. Вища математика. Приклади і задачі. Посібник. ВЦ Академія. 2002. – 624 с.: іл..

6. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я.Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. І. Учеб. пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. школа. 199. – 304 с.: ил.

7. И.И. Лихолетов, И.П. Мацкевич. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. Из-во «Вышэйшая школа» Минск 1976. – 454 с.

8. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / В.П.Дубовик, І.І.Юрик, І.П.Вовкодав та ін.; За ред. В.П.Дубовика, І.І.Юрика. – К.: А.С.К., 2001. – 480 с.: іл.

9. В.С.Шипачев. Задачник по высшей математике. Издание второе – М.: Высш. школа. 2001. – 304 с.: ил.

10. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учебное пособие для спец. учебных заведений. – 5-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2002. – 495 с.

Лєві Л.І.,
Коваль А.В.,
Ліхоманов О.О.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЛІНІЙНА, ВЕКТОРНА АЛГЕБРА І АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Підписано до друку 16.10.2009.
Формат 60x84/16. Папір офсет.
Друк офсетний. Ум.-друк. арк. 10,2.
Наклад 1000. прим. Зам. №144.

Видавець і виготівник
ТОВ «Віртуальна реальність»
91011, м. Луганськ, вул. Челюскінців, 6/15.
Тел.: 8 (0642) 718-140, 718-141.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи ДК №1415 від 03.07.2003 р.