Техника радіо зв'язку

Випромінювання вертикального електричного диполя, розміщеного уздовж осі провідного колового циліндра поблизу плоскої границі відокремлення двох середовищ

запропоновується враховувати впливу циліндричного оточення елементарного вібратора на його поле поблизу перпендикулярно до осі циліндра границі розділа за допомогою коефіцієнта, входить до виразу для дипольного моменту джерела.

Деякі задачі, зв'язані з вивченням роботи антени поблизу границі земля-повітря, можуть бути приведені до моделі, показаній на рис.1.

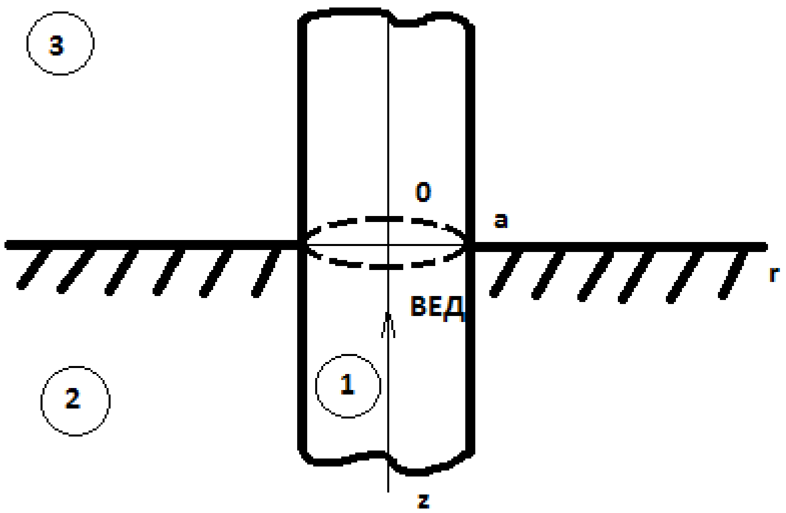

Рис.1. Розсташування джерела і границ розділа середовищ

Нехай є два полу простора 2 і 3 з плоскою границею розділу, с параметрами σ_2, ε_2, μ_0 і σ_3, ε_3, μ_0. На осі колового циліндра 1 (σ_1, ε_1, μ_0), проходячего нормально до границі, розміщений вертикальний електричний диполь (ЗЕД) малих розмірів. Потребується знайти поле, створене цим диполем, у середовищі 2.

Для рішення задачі звернемось к більш простішим умовам і розглянемо поле ЗЕД при наяві першого, другого просторів. Подібна задача розглядувалась раніше [1], де первинне збудження при рішенні через вектор Герца записувалось у вигляді

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ih|z|} K_0(r\sqrt{h^2 - k_1{}^2})\alpha h \quad , \qquad (1)$$

Де $R^2 = r^2 + z^2$; $K_0(x)$ – модифікована функція Бесселя (другого роду). При цьому виразу в середені і с зовні циліндра вмістили невиявлені функції a(h) і b(h): $\Pi_{z_2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ih|Z|} [K_0\left(r\sqrt{h^2 - k_1{}^2}\right) - b(h) I_0(r\sqrt{h^2 - k_1{}^2})\alpha h$; (2)

$$\Pi_{z_2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ih|z|}\alpha(h)K_0(r\sqrt{h^2-k_2{}^2})\alpha h$$
.

Де $I_0(x)$ – модифікована функція Бесселя першого роду.
В резулаті задовільнення граничним умовам на поверхні циліндра r = a , $E_{z1}=E_{z2}$ I $H\varphi 1=H\varphi 2$ знаходятся вирази для спектральних щільностей a(h) I b(h). Вираз a(h) записусться у вигляді

$$\alpha(h) = \frac{k_1^2\sqrt{h^2-k_1{}^2}\,K_0\left(\alpha\sqrt{h^2-k_1{}^2}\right)I_1\left(\alpha\sqrt{h^2-k_1{}^2}\right)+k_1^2\sqrt{h^2-k_1{}^2}I_0(\alpha\sqrt{h^2-k_1{}^2}K_1(\alpha\sqrt{h^2-k_1{}^2})}{k_2^2\sqrt{h^2-k_1{}^2}\,I_0\left(\alpha\sqrt{h^2-k_1{}^2}\right)K_1\left(\alpha\sqrt{h^2-k_2{}^2}\right)+k_1^2\sqrt{h^2-k_2{}^2}K_0\left(\alpha\sqrt{h^2-k_2{}^2}\right)I_1\left(\alpha\sqrt{h^2-k_1{}^2}\right)} \tag{3}$$

Підстановка співвідношень (3) в другу строчку формули (2) дає вираз для вектора Герца 2. Але отримання чисельних результатів за формулами (2) практично неможливо із-за великих математичних трулнощей при вичесленні не особистого інтеграла. Завдяки цьому формула (3) буде використана наступним чином.
у викладеному вище рішенні завдання застосовувалося розкладання сферичної хвильової функції (1) по спектру неоднорідних циліндричних хвиль, що і дозволило порівняно просто задовольнити граничним умовам на поверхні r = a. З іншого боку, не важко перевірити, що вираз (1) і всі наведені вище формули в результаті заміни змінної інтегрування h за формулою

$$\sqrt{h^2+k_1{}^2} = -i\lambda, \quad h^2-k_1^2 = -\lambda^2, \quad h = \sqrt{k_1{}^2+\lambda^2} = -i\sqrt{\lambda^2+k_1{}^2} \tag{4}$$

переходять в інтегральні розкладання по спектрах неоднорідних плоских хвиль. Такі розкладання відповідають геометрії завдання з плоскою кордоном розділу (задача Зоммерфельда).
Покажемо, що вираз (1) після заміни (4) переходить в інтегральне уявлення Зоммерфельда для сферична хвилі. З формули (4) маємо

$$\frac{e^{ik_1R}}{R} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ih|z|}K_0\left(r\sqrt{h^2-k_2{}^2}\right)\alpha h = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1{}^2}}K_0(-i\lambda r)\frac{\lambda\alpha\lambda}{i\sqrt{\lambda^2-k_1{}^2}} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1{}^2}|z|}\frac{\pi i}{2}H_0^{(1)}(\lambda r)\frac{\lambda\alpha\lambda}{i\mu_1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(\lambda r)e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1{}^2}|z|}\frac{\lambda\alpha\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k_1{}^2}}$$

В результаті заміни (4) вираз (3) перейде в спектр по неоднорідним плоским хвилям. Якщо звернутися до виразу (2) (другий рядок), то побачимо, що ця формула лише множником в підінтегральном виразі відрізняється від первинного збудження. Припустимо тепер, що наявність циліндричної області в класичній задачі Зоммерфельда призводить лише до нової форми запису первинного порушення та складемо для вектора Герца в задачі з плоскою кордоном у вигляді

$$\Pi_Z^{(2)} = \frac{1}{2}\int_{\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(\lambda r)\left[A_{1,2}(\lambda)\frac{e^{-\mu_2|Z|}}{\mu_2} + A_{1,2}(\lambda)e^{\mu_2|Z|}D(\lambda)\right]\lambda\alpha\lambda; \tag{5}$$

$$\Pi_Z^{(3)} = \frac{1}{2}\int_{\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(\lambda r)A_{1,3}(\lambda)e^{-\mu_3|Z|}G(\lambda)\lambda\alpha\lambda$$

Де $A_{1,2}(\lambda)$ - коефіцієнт, що виходить з формули (3) в результаті заміни (4); $A_{1,3}(\lambda)$- коефіцієнт, що відповідає зміні спектральної щільності первинного збудження в разі розміщення джерела нижче межі Z = 0.

Задовольняючи граничним умов на площині Z=0 ($E_{r2}=E_{r3}$, $H_{\varphi 2}=H_{\varphi 3}$), отримуємо вираз для спектральних площин D(λ) і C(λ) у вигляді

$$C(\lambda) = \frac{2k_2^2\widetilde{A_{1,2}(\lambda)}}{\widetilde{A_{1,2}}(\lambda)e^{(\mu_2-\mu_3)b}(\mu_2k_3^2+\mu_3k_2^2)}; \tag{6}$$

$$D(\lambda) = \frac{-e^{2\mu_2 b}(\mu_3k_2^2-\mu_2k_3^2)}{\mu_2(\mu_2k_3^2+\mu_3k_2^2)}.$$

Не важко побачити, що після підстановки виразу D(λ) в першу строку (5), переходимо до рішення, котре відрізняється від відомого [2] рішення задачі Зоммерфельда тільки наявністю у першому і другому доданку множника $A_{1,2}(\lambda)$.

У випадку , коли функція $A_{1,2}(\lambda)$ становиться постійна величина , не залежній від λ, вона може бути винесена за знак інтеграла і прийдемо до відомого рішення, помножене на деяке постійне число.

В результаті зміни змінній інтегрування за формулою (4) отримуємо

$$A_{1,2}(\lambda) = \frac{k_1^2\sqrt{k_2^2-{k_1}^2-\lambda^2}\,K_0(\alpha\sqrt{k_2^2-{k_1}^2-\lambda^2})I_1(\alpha\sqrt{k_2^2-{k_1}^2-\lambda^2}) + I(\alpha\sqrt{k_2^2-{k_1}^2-\lambda^2})_0K_1(\alpha\sqrt{k_2^2-{k_1}^2-\lambda^2})}{k_2^2\sqrt{k_2^2-{k_1}^2-\lambda^2}\,I_0(\alpha\sqrt{k_2^2-{k_1}^2-\lambda^2})K_1(i\lambda\alpha) + k_1^2 i\lambda K_0(i\lambda\alpha)I_1(\alpha\sqrt{k_2^2-{k_1}^2-\lambda^2})}$$

Вираз (7) входить підінтегральной вираз (5) для вектора Герца в другому півпросторі. Розроблені раніше прийоми наближеного обчислення інтегралів подібного роду зводяться до того, то якщо контактують середовища значно відрізняються за значенням хвильових чисел обчислення ведеться поблизу кордону Z = 0 і горизонтальні дальності набагато перевищують глибини джерела і точки спостереження, то можлива в частині підінтегральной функції заміна змінної інтегрування на постійне значення λ =k2, так як при обчисленні поля в середовищі 2 контурне інтегрування проводиться в околицях точки. Таким чином отримуємо

$$A_{1,2|_{\lambda-k_2}} = \frac{k_1^2\sqrt{-k_1^2}[K_0\left(\alpha\sqrt{-k_1^2}\right)I_1\left(\alpha\sqrt{k_1^2}\right) + I_0\left(\alpha\sqrt{-k_1^2}\right)K_1\left(\alpha\sqrt{-k_1^2}\right)]}{k_2^2\sqrt{-k_1^2}I_0\left(\alpha\sqrt{-k_1^2}\right)K_1(ik_2a) + ik_2k_1^2K_0(ik_2a)I_1\left(\alpha\sqrt{-k_1^2}\right)}$$

Враховуючи співвідношення між модифікованими і не модифікованими функціями Бесселя , можна показати , що

$$K_0(-i\lambda a) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(\lambda a); \quad I_0(-i\lambda a) = J_0(\lambda a);$$

$$K_1(-i\lambda a) = -\frac{\pi i}{2} H_1^{(1)}(\lambda a); \quad I_0(-i\lambda a) = -iJ_1(\lambda a).$$

тимчасова залежність в роботі обрана exp-iωt , тому $\sqrt{-k_1^2} \equiv ik_1$ і остаточно приходимо до

$$A_{1,2} = \frac{k_1[J_0(ak_1)H_1^{(1)}(ak_1) - H_0^{(1)}(ak_1)J_1(ak_1)]}{k_2[k_2J_0(ak_1)H_1^{(1)}(ak_2) - k_1H_0^{(1)}(ak_2)J_1(ak_1)]} \qquad (8)$$

Неважко показати , що вираз (8) , по-перше, рівна 1 при $k_1=k_2$ і , по-друге, при $a \to 0, A_{1,2} \to \frac{k_1^2}{k_2^2}$

Необхідно відзначити, що після підстановки виразів (6) у систему (5) і виносу з-під знака невласного інтеграла вирази (8) приходимо до векторів Герца, що збігається з точним рішенням завдання Зоммерфельда без циліндричної області. Таким чином, ці допущення до того, що отриманий вираз (8) можна вважати коефіцієнтом впливу циліндричного оточення ЗЕД на інтенсивність порушуваного їм поля та об'єднати з виразом для моменту диполя, яке в загальному вигляді буде записуватися як

$$-\frac{30iIa\tau a}{k_0\varepsilon'_{r1}} A_{1,2}.$$

Література

1. Никитина В.Н. Загальне рішення осесиметричної задачі теорії каротажу. Ізв.Ан СРСР, сер.геофіз., № 4, 1960