

Міністерство освіти і науки України
Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка



СЕРГІЙ ЖИГИЛІЙ

**ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА.
ШВИДКОСТІ ТОЧОК І КУТОВІ ШВИДКОСТІ ТІЛ**

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

з дисципліни «Теоретична механіка»
для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання

Полтава 2019

УДК 531/534 (о7)

ББК 22.21я7

Ж 68

Рецензенти: **М.П. Нестеренко** (доктор техн. наук, професор кафедри будівельних машин та обладнання Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка), **С.М. Гнітько** (канд. техн. наук, доцент кафедри технології машинобудування Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка).

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка від 14 червня 2019 р., протокол № 5

Жигилій С.М.

Плоскопаралельний рух твердого тіла. Швидкості точок і кутові швидкості тіл: навчальний посібник / С.М. Жигилій. – Полтава: ПолтНТУ, 2019. – 128 с.: іл. 59, бібліогр. 11.

Навчальний посібник містить теоретичну та практичну частини. Теоретична частина містить відповідні параграфи теми «Плоскопаралельний рух твердого тіла» загального курсу лекцій навчальної дисципліни «Теоретична механіка». Практична частина – це приклади розв’язування 13 різноманітних задач на вказану тему, які ґрунтовно й усебічно розкривають методику, алгоритм і логіку розв’язування будь-яких аналогічних задач.

Для студентів (усіх форм навчання) та викладачів вищих технічних навчальних закладів.

27.02.01.01

© Жигилій С.М., 2019

© ПолтНТУ, 2019

ЗМІСТ

Передмова	4
Теоретична частина	5
Тема 15. Плоскопаралельний рух твердого тіла	6
§15.1. Визначення й властивості плоскопаралельного руху твердого тіла	6
§15.2. Розкладання й рівняння плоскопаралельного руху твердого тіла	8
§15.3. Швидкості точок тіла при плоскопаралельному русі	14
§15.4. Поняття про миттєвий центр швидкостей	26
§15.5. Визначення швидкостей точок тіла при плоскопаралельному русі за допомогою миттєвого центра швидкостей	27
§15.6. Способи визначення положення миттєвого центра швидкостей	29
Практична частина	35
Задача 123	36
Задача 124	54
Задача 125	61
Задача 126	68
Задача 127	75
Задача 133	83
Задача 134	93
Задача 135	97
Задача 136	101
Задача 137	106
Задача 138	111
Задача 139	116
Задача 140	120
Літературні джерела	127

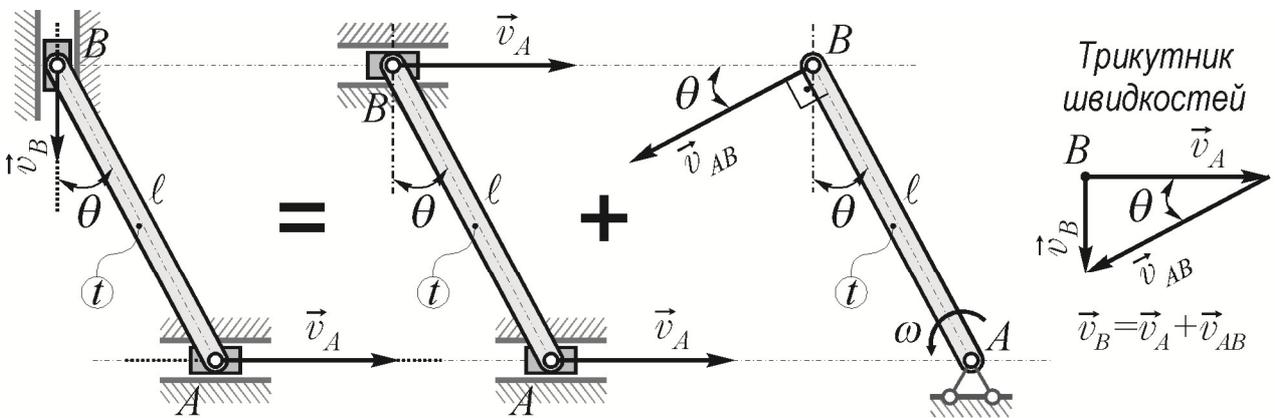
ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник, зміст якого є одним із результатів багаторічної праці автора на декількох викладацьких посадах кафедри теоретичної механіки Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка, складається з двох частин: теоретичної і практичної. У теоретичній частині викладені відповідні розділи (параграфи) теми «Плоскопаралельний рух твердого тіла» загального курсу лекцій навчальної дисципліни «Теоретична механіка», де усебічно розглянуто й пояснено всі необхідні кінематичні поняття, положення та властивості плоскопаралельного руху твердого тіла. Практична частина містить тринадцять різноманітних задач на визначення швидкостей точок і кутових швидкостей тіл, які виконують той чи інший вид плоскопаралельного руху. Усі задачі є різного рівня складності певними *інженерними задачами*, уміння розв'язувати які необхідне для висококваліфікованого проектування та конструювання пристроїв, виробів і приладів механізації й автоматизації сучасного виробництва, оскільки переважна більшість складових конструктивних елементів цих приладів і виробів перебувають саме у *плоскопаралельному русі*.

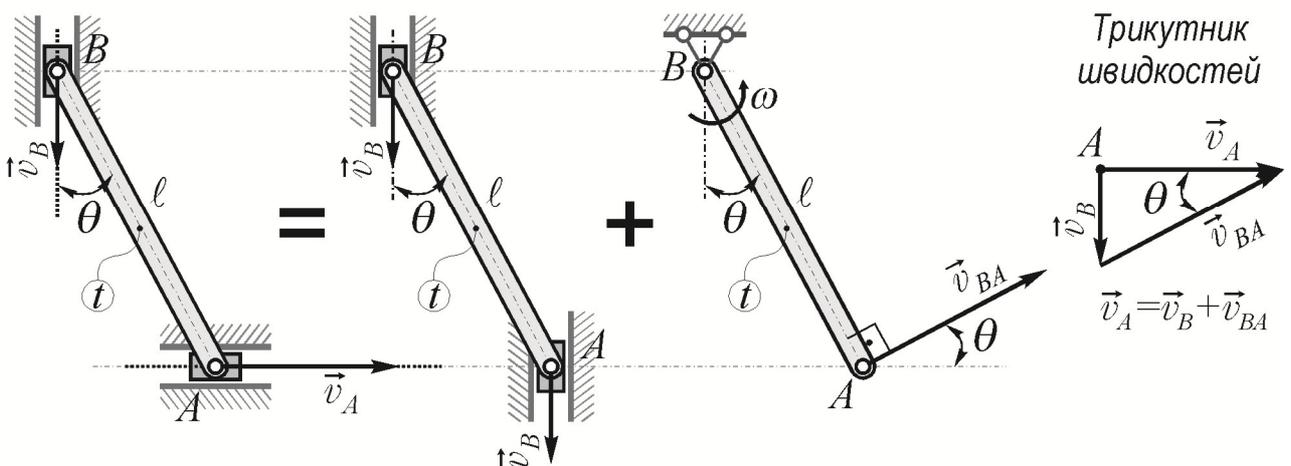
Нумерація самої теми, її параграфів та формул відповідає тому курсу теоретичної механіки, що викладає автор; для читачів, котрі не є студентами, зазначену нумерацію необхідно сприймати за умовну. Основні поняття, визначення та висновки, які *бажано* (насправді йдеться про те, що *обов'язково треба*) вивчити *напам'ять*, позначені в тексті символом $\textcircled{1}$. Рекомендації, зауваження, поради й уточнення позначено символом \clubsuit .

Розв'язування задач 123, 133 і 134, котрі автор використовує *при проведенні* відповідних *практичних занять*, наведено з такими детальними поясненнями, коментарями та порадами, щоб у читачів посібника виникало відчуття присутності на зазначених заняттях. Задачі 125÷127 і 136÷140 – це задачі *домашніх завдань* студентів, які, певна річ, призначені для їх самостійної роботи. Усі задачі є прикладами виконання різних індивідуальних варіантів розрахунково-графічної роботи з теоретичної механіки на тему «*Визначення швидкостей точок і кутових швидкостей ланок багатоланкового механізму*».

ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА



Плоскопаралельний рух бруса AB = Поступальний рух бруса AB з обраною за полюс точкою + Обертальний рух бруса AB навколо полюса



ТЕМА 15 ►

ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ
ТВЕРДОГО ТІЛА§ 15.1. ВИЗНАЧЕННЯ Й ВЛАСТИВОСТІ
ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

① **Плоскопаралельний** (або **плоский**) **рух твердого тіла** – це такий рух, при якому всі точки тіла рухаються тільки у певних площинах, паралельних деякій нерухомій площині.

✎ Плоскопаралельний рух є складним рухом, але найпростішим серед складних рухів твердого тіла. У виробничій або тій чи іншій практичній діяльності людства плоскопаралельний рух матеріальних тіл різноманітного призначення зустрічається найбільш часто.

Розглянемо й дослідимо плоскопаралельний рух твердого тіла будь-якої довільної форми.

Візьмемо деяку певну нерухому площину π_1 ; проведемо іншу також нерухому площину π , яка паралельна площині π_1 і перетинає розглядуване рухоме тіло. Нехай S – переріз тіла площиною π (рис. 15.1). Із визначення плоскопаралельного руху очевидно, що переріз S , рухаючись разом із розглядуваним тілом, весь час буде перебувати тільки в площині π .

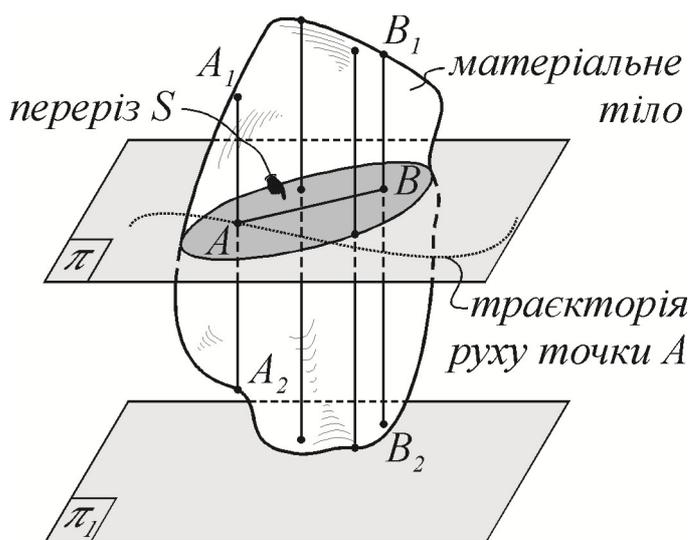


Рис. 15.1

Установимо **властивості** плоскопаралельного руху розглядуваного тіла. Для цього візьмімо будь-яку його точку A , що належить перерізу S , і проведемо через неї відрізок A_1A_2 , перпендикулярний перерізу S , де A_1 і A_2 – точки на поверхні тіла. Оскільки переріз, як встановлено вище, при русі тіла весь час перебуває в площині π , то відрізок A_1A_2 весь час є перпендикулярним до цієї площини й, отже, рухаючись разом із розглядуваним тілом, *лишається паралельним самому собі*. За цією ознакою встановлюємо,

що при русі тіла його відрізок A_1A_2 здійснює *поступальний рух*, через що всі точки цього відрізка *мають однакові кінематичні характеристики*, такі ж, як і точка A перерізу S . Неважко зрозуміти, що всі точки тіла, які належать, наприклад, відрізку B_1B_2 , мають однакові кінематичні характеристики з точкою B перерізу S ; якщо ж провести через усі інші точки перерізу S аналогічні відрізки (див. рис. 15.1), то, звісно, й висновки будуть аналогічними. З усвідомлення встановленого зрозуміло, що плоскопаралельний рух розглядуваного твердого тіла однозначно визначає рух перерізу S , одержаного перетином цього тіла будь-якою площиною π , паралельною до нерухокої площини π_1 . Тобто, вивчаючи плоскопаралельний рух твердого тіла, достатньо розглядати й досліджувати рух певного перерізу S тіла у відповідній площині π .

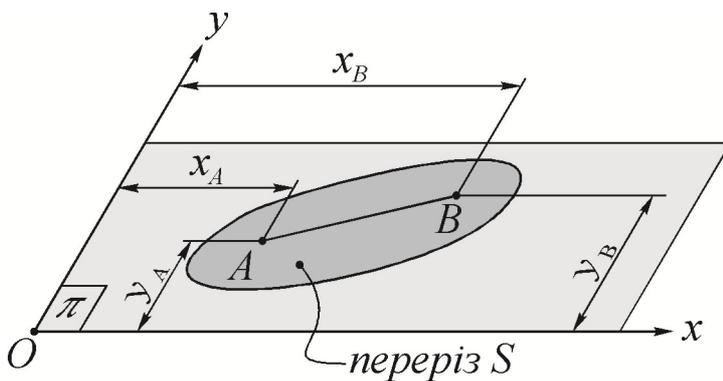


Рис. 15.2

разі положення цих точок однозначно встановлюють чотири координати x_A, y_A, x_B і y_B (рис. 15.2). Згідно з відповідною теоремою аналітичної геометрії

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (AB)^2. \quad (*)$$

Оскільки ж розглядається абсолютно тверде тіло, то віддаль між будь-якими точками його лишається незмінною, що безумовно стосується й обраних точок. Тобто при русі перерізу S у будь-якому його положенні $AB = const$ (але $\overline{AB} \neq const$). Це означає, що в наведеній формулі (*) з чотирьох координат x_A, y_A, x_B й y_B *незалежними є тільки три*. Приєднання ж будь-якої нової точки (наприклад, C) ніяк не збільшує кількості незалежних координат, оскільки кожним двом новим координатам x_C та y_C відповідають

дві рівності $CA = const$ і $CB = const$, які визначають незмінність віддалей до обраних спочатку точок A та B .

Таким чином, для однозначного задання положення й руху перерізу S у площині π достатньо знати положення та рух двох його довільних точок A і B або, що те саме, рух відрізка AB .

Розглянуте й установлене приводить до **висновку**:

- ⓐ плоскопаралельний рух твердого тіла **зводиться** до руху довільного відрізка AB перерізу S , одержаного перетином цього тіла площиною π , паралельною до нерухомої площини π_1 , (тобто кінематика плоскопаралельного руху твердого тіла зводиться до кінематики відповідного відрізка на площині).

§ 15.2. РОЗКЛАДАННЯ Й РІВНЯННЯ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

Розглянемо довільний плоскопаралельний рух твердого тіла¹.

Нехай у певний момент часу t_1 переріз S розглядуваного тіла перебував у початковому положенні I , а за якийсь скінчений проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$ здійснив у площині π перехід у кінцеве положення II ; при цьому дві довільні точки A і B цього перерізу, кожна рухаючись по своїй траєкторії, відповідно перейшли з положень A_1 та B_1 у положення A_2 і B_2 (рис. 15.3).

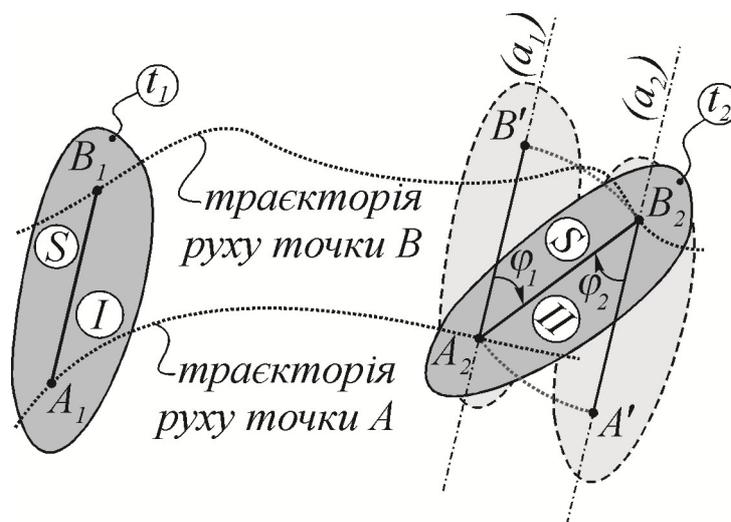


Рис. 15.3

- ⓐ Будемо вважати, що переріз S рухається в площині рисунка і, отже, рисунок 15.3 є натуральним зображенням цього перерізу, площини π й усіх інших зображених на ньому графічних елементів.

¹ Зараз і надалі, розглядаючи плоскопаралельний рух певного твердого тіла, згідно з викладеним у § 15.1 будемо розглядати й досліджувати рух відрізка AB (чи будь-якого іншого), що належить перерізу S тіла, утвореного відповідною площиною π .

Доведімо теорему про те, що *дійсний рух* перерізу S із початкового положення у кінцеве можна замінити *сукупністю двох уявних* (або *фіктивних*) *рухів*, і з'ясуємо ще одну *властивість* плоскопаралельного руху. Для цього розглянемо два варіанти можливих переходів перерізу S із положення I у положення II :

1. Нехай з положення I переріз S спочатку **рухається поступально** в якесь певне проміжне положення так, що точка A здійснює рух по своїй траєкторії у кінцеве положення A_2 ; при цьому точка B , описавши траєкторію, тотожну до траєкторії точки A , опиниться в положенні B' (у такому разі говорять, що точку A обрано за **полюс**). Потім переріз S у площині π здійснює **обертальний рух** навколо уявної осі, яка проходить через точку A_2 перпендикулярно до площини π , так, щоб точка B' збіглася з точкою B_2 . Позначмо відповідний кут повороту як φ_1 і звернімо увагу на те, що зазначене обертання перерізу S на кут φ_1 сталося *за рухом годинникової стрілки*.
2. Оберімо за **полюс** точку B й аналогічними діями переведемо переріз S із положення I у положення II ; при цьому **поступальний рух** перерізу S буде визначатися траєкторією руху точки B , а його **обертання** на кут φ_2 буде відбуватися навколо уявної осі, яка відповідно проходить через точку B_2 ²; знову звернімо увагу на те, що обертання у площині π на кут φ_2 сталося також *за рухом годинникової стрілки*.

Отже, теорема доведена (навіть двічі).

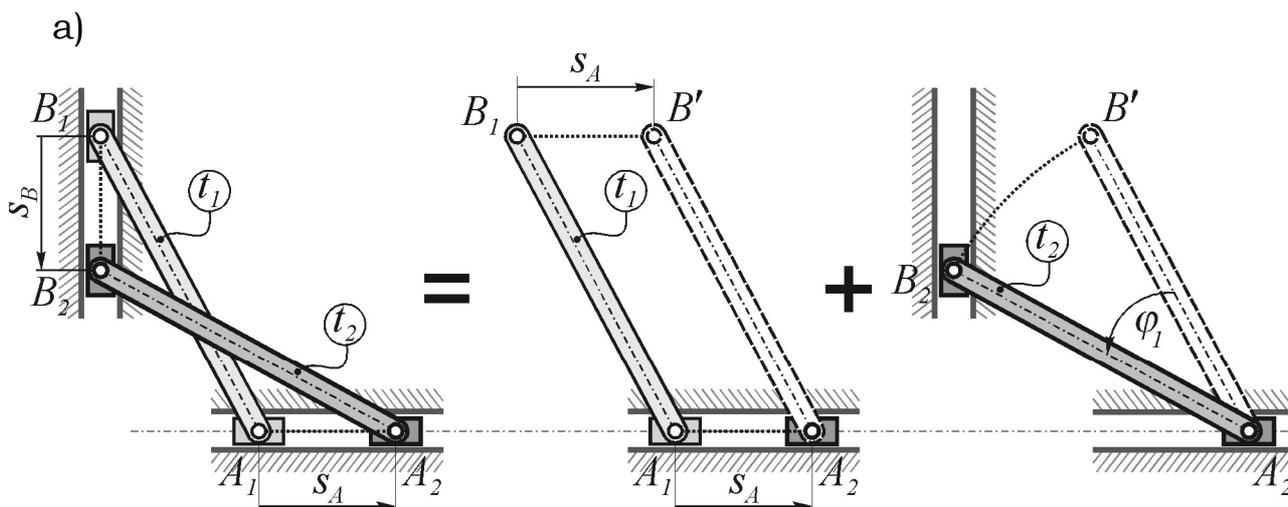
Звісно, перерізу S належить безліч точок і кожному з них можна обрати за полюс, через що й варіантів переходів перерізу з положення I у положення II також може бути безліч.

Розглянемо тепер не абстрактний плоскопаралельний рух тіла, а два реальні (досить поширені) види плоскопаралельного руху.

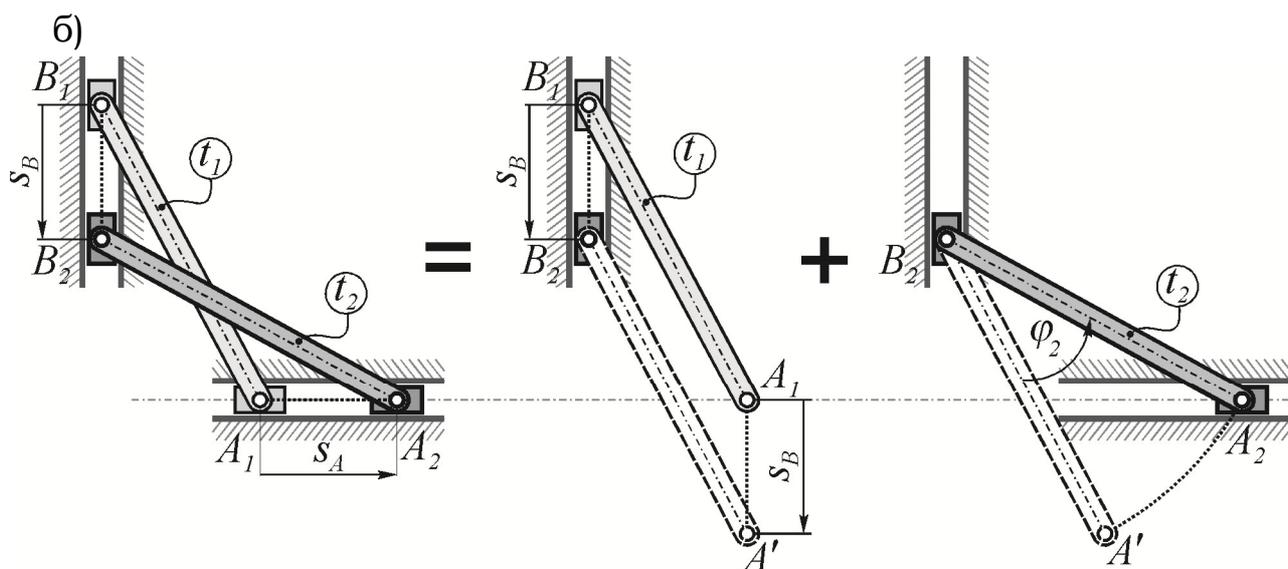
На рисунку 15.4 зображено брус AB , чий кінці A і B шарнірами приєднані до відповідних повзунів, кожний з яких має можливість рухатися вздовж своїх напрямних. Нехай за певний проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$ точки A та B відповідно перейшли з поло-

² Оскільки переріз S рухається тільки в площині π , то зазначена уявна вісь завжди проходить тільки перпендикулярно до площини π ; через це без будь-яких обмежень можна говорити, що переріз S виконує обертальний рух **навколо** обраного **полюса**.

жень A_1 і B_1 у положення A_2 і B_2 . Протягом цього ж проміжку часу брус AB виконує плоскопаралельний рух, який можна замінити сукупністю фіктивних поступального руху по горизонталі разом із полюсом A й обертового руху навколо цього полюса (див. рис. 15.4,а). Такий же кінцевий результат можна отримати, якщо брус AB здійснить поступальний рух по вертикалі разом із полюсом B з наступним обертанням навколо полюса B (див. рис. 15.4,б).



Плоскопаралельний рух бруса AB = Поступальний рух бруса AB з обраною за полюс точкою A + Обертовий рух бруса AB навколо полюса A



Плоскопаралельний рух бруса AB = Поступальний рух бруса AB з обраною за полюс точкою B + Обертовий рух бруса AB навколо полюса B

Рис. 15.4

На рисунку 15.5 зображено тіло у вигляді круга (наприклад, колесо), що без ковзання **котиться** по горизонтальній площині. За проміжок часу Δt точки C і M цього круга, рухаючись своїми траєкторіями, перейдуть відповідно з положень C_1 та M_1 у положення C_2 і M_2 . Знову-таки, оригінальне кочення круга може бути замінене або сукупністю поступального руху по горизонталі разом із полюсом C й обертового руху навколо цього полюса (див. рис. 15.5,а), або сукупністю поступального руху разом із точкою M по її траєкторії руху³ й обертання навколо точки M (див. рис. 15.5,б).

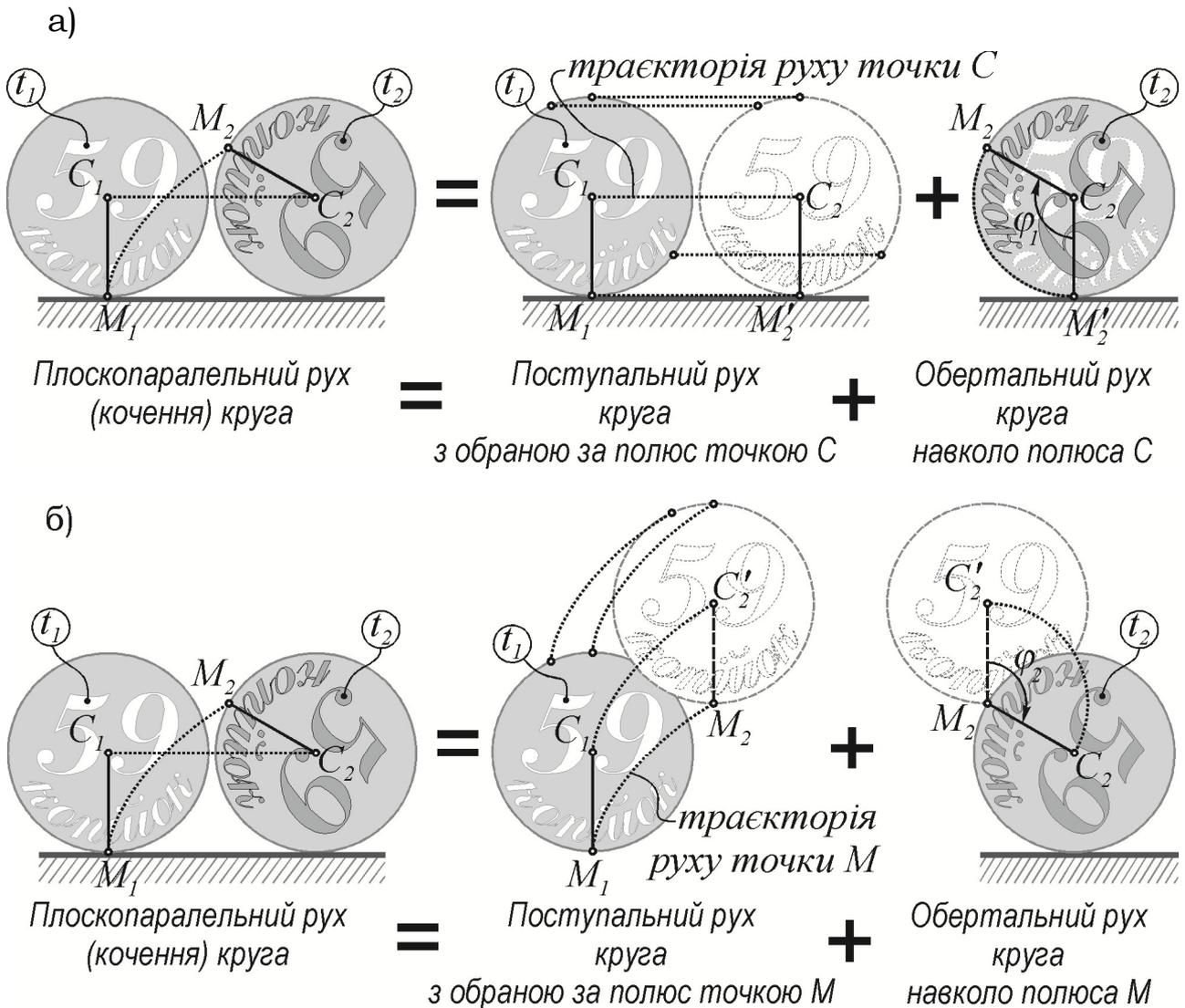


Рис. 15.5

³ Оскільки точка M – це точка кола, яке є межею круга, що котиться без ковзання по нерухомій площині, то вже з глибокої давнини людству відомо, що траєкторією руху цієї точки є **циклоїда** (певна річ, усі інші точки зазначеного кола також описують у просторі свої відповідні циклоїди).

Розглянувши рисунок 15.3, де зображено фіктивні переходи, які замінюють дійсний рух перерізу S , неважко бачити, що пряма (a_1) , на якій розташований відрізок A_2B' , і пряма (a_2) , на котрій розміщений відрізок B_2A' , паралельні відрізку A_1B_1 , що визначає паралельність і самих зазначених прямих. Оскільки відрізок A_2B_2 по відношенню до паралельних прямих (a_1) і (a_2) є певною січною, то відповідно до положень елементарної геометрії кути φ_1 і φ_2 – внутрішні різносторонні й тому $\varphi_1 = \varphi_2$.

Таким чином, незалежно від вибору полюса уявне *обертання* перерізу S відбувається в *одному напрямкові на однаковий кут*.

До такого самого висновку приведе й аналіз відповідних параметрів рухів тіл, наведених на рисунках 15.4 і 15.5.

Звичайно, сукупність двох фіктивних рухів (поступального разом із обраним полюсом та обертального навколо уявної осі, яка відповідно проходить через полюс) не відповідає дійсному рухові перерізу S за проміжок часу Δt , а лише уявно замінює цей рух. Більш точно дійсний рух перерізу S у площині π можна розглядати як послідовність елементарних рухів:

- розкладаючи скінчений проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$, протягом якого здійснюється рух із початкового положення I у кінцеве II , на *елементарні* проміжки часу Δt_i , дістанемо $\Delta t = \sum_{i=1}^n \Delta t_i$, де n – кількість елементарних проміжків;
- фіксуючи положення перерізу S на початку й у кінці кожного елементарного проміжку, будемо наближено розглядати рух протягом проміжку часу Δt як послідовність відповідних уявних рухів протягом кожного елементарного проміжку Δt_i .

У разі зменшення проміжку часу Δt_i (що автоматично призведе до відповідного збільшення кількості елементарних проміжків) послідовність зазначених уявних рухів буде більш наближеною до дійсного руху перерізу S . Для подальшого наближення до дійсного руху необхідно далі зменшувати приріст Δt_i . Переходячи до границі (тобто при $\Delta t_i \rightarrow 0$ і $n \rightarrow \infty$), на підставі доведеної вище теореми та внаслідок довільності вибору точок A та B доходимо **висновку**:

① **плоскопаралельний рух тіла** у кожний момент часу можна розглядати як **сукупність двох рухів** перерізу S тіла у відповідній площині π : **поступального** руху разом із довільно обраним полюсом і **обертального** руху навколо уявної осі, що проходить через полюс перпендикулярно до площини π ⁴.

① Важливою властивістю плоскопаралельного руху є те, що його **поступальна** частина від вибору полюса **залежить**, а **обертальна** частина – **не залежить**.

✎ Якщо, наприклад, на рисунку 15.4 уявити віртуального спостерігача, який не має ніяких антропологічних розмірів (але має очі) і знаходиться безпосередньо у точці A , рухаючись разом з нею, то цей спостерігач буде бачити певне обертання бруса AB навколо себе. Якщо ж аналогічний спостерігач перебуватиме у точці B , то він буде бачити точно таке саме і за напрямком, і за характером обертання бруса, але навколо свого місця перебування (більш строге математичне доведення наведеного факту див. далі на с. 20).

Визначимо плоскопаралельний рух аналітично (або, іншими словами, встановимо рівняння плоскопаралельного руху). Для цього сумістимо з площиною π декартові осі Ox і Oy та оберемо за полюс довільну точку A перерізу S , позначивши її координати x_A і y_A (рис. 15.6). Тоді згідно з формулою (10.4) [1] рівняння $x_A = x(t)$ та $y_A = y(t)$ визначають закон руху полюса A та, певна річ, поступальну частину руху перерізу S . Для визначення обертальної частини руху проведемо через полюс A дві півпрямі Ak і Al , з яких Ak рухається самостійно поступально разом із полюсом A , а Al – жорстко з'єднана з перерізом S та, отже, разом з ним обертається навколо полюса A . Оскільки під час руху перерізу S кут kAl , який позначимо φ , буде тим чи іншим чином змінюватися, то згідно з формулою (14.1) законом зміни

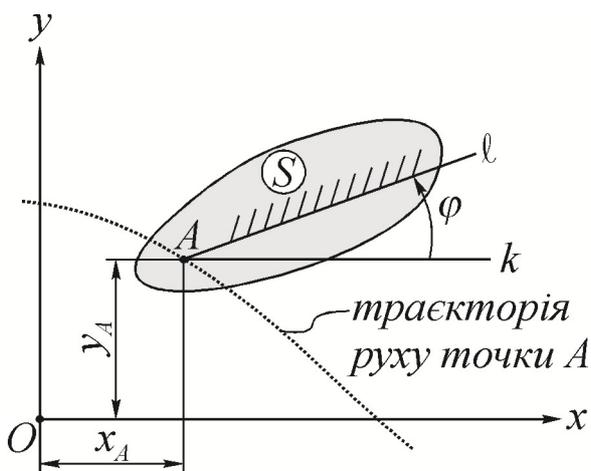


Рис. 15.6

тими руху проведемо через полюс A дві півпрямі Ak і Al , з яких Ak рухається самостійно поступально разом із полюсом A , а Al – жорстко з'єднана з перерізом S та, отже, разом з ним обертається навколо полюса A . Оскільки під час руху перерізу S кут kAl , який позначимо φ , буде тим чи іншим чином змінюватися, то згідно з формулою (14.1) законом зміни

⁴ Див. зноску 2 на с. 9.

цього кута є залежність $\varphi = \varphi(t)$, котра й визначає обертання півпрямой $A\ell$ навколо полюса A , а також і обертальну частину руху перерізу S .

Отже,

$$\left. \begin{aligned} x_A &= x(t), \\ y_A &= y(t), \\ \varphi &= \varphi(t) \end{aligned} \right\} \quad (15.1) \text{ – рівняння (або закон)} \\ \text{плоскопаралельного} \\ \text{руху твердого тіла.}$$

Функції $x(t)$, $y(t)$ і $\varphi(t)$ є однозначними, неперервними й у більшості задач двічі диференційованими функціями часу.

❏ Варто розуміти й знати, що частинними випадками плоскопаралельного руху є: 1) обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі (у тому разі, коли в (15.1) $x_A = const$ і $y_A = const$); 2) поступальний рух тіла *у певній площині* (у тому разі, коли в (15.1) $\varphi = const$).

§ 15.3. ШВИДКОСТІ ТОЧОК ТІЛА ПРИ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОМУ РУСІ

Розглянемо плоскопаралельний рух твердого тіла⁵ та визначимо швидкість \vec{v}_B довільної точки B цього тіла.

Нехай закон руху розглядуваного тіла має вигляд

$$x_A = x(t), \quad y_A = y(t), \quad \varphi = \varphi(t),$$

де перші два рівняння є законом руху довільної точки A перерізу S , а останнє рівняння – закон обертального руху перерізу S у відповідній площині π .

Маючи наведений закон руху й обравши точку A за полюс, для певного моменту часу t за формулами (11.7) ÷ (11.10) [1] можна однозначно встановити вектор \vec{v}_A швидкості полюса, а за формулою (14.2) – значення кутової швидкості ω обертання перерізу S . Нехай у цей момент часу переріз S та його відрізок AB перебувають у зображеному на рисунку 15.7,а положенні, точка A має швидкість \vec{v}_A , а переріз S – кутову швидкість ω ⁶.

⁵ Див. зноску 1 на с. 8.

⁶ Нагадаємо, що відповідно до формули (14.2) $\omega = |\dot{\varphi}|$; отже, якщо у якийсь момент часу похідна $\dot{\varphi} > 0$, то у цю мить переріз S обертається проти руху годинникової стрілки, якщо ж $\dot{\varphi} < 0$ – за рухом останньої.

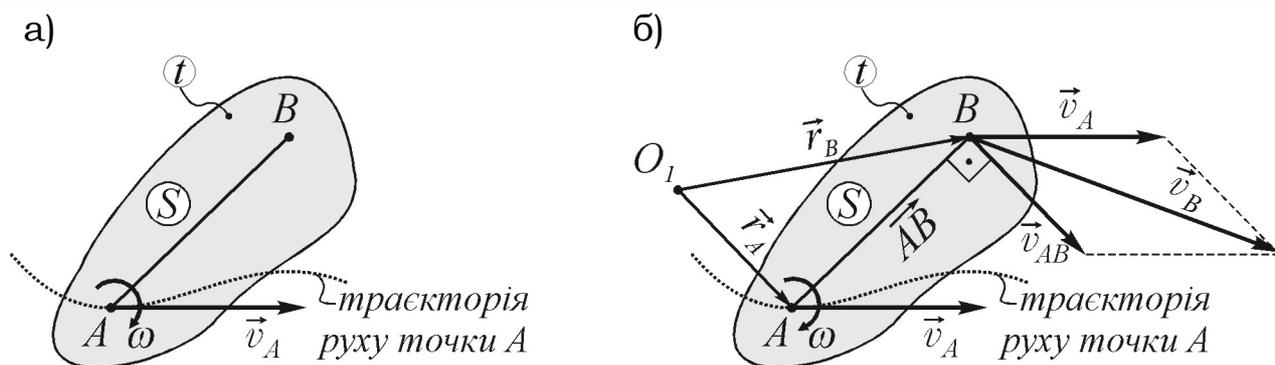


Рис. 15.7

Дослідимо рух точок A і B у векторній формі (див. [1] § 10.2). Для цього візьмемо довільну точку O_1 нерухомої площини π за початок відліку та зобразимо радіуси-вектори \vec{r}_A і \vec{r}_B , які визначають положення точок A та B відповідно; введемо також радіус-вектор \overline{AB} (див. рис. 15.7,б). Через те що розглядається абсолютно тверде тіло, то віддаль між точками A і B лишається незмінною; оскільки ж радіус-вектор \overline{AB} з'єднує дві точки перерізу S , то при русі тіла зазначений радіус-вектор обертається разом з перерізом навколо полюса A (аналогічно до півпрямой $A\ell$ на рисунку 15.6). Тобто

$$AB = const, \text{ але } \overline{AB} \neq const.$$

З рисунка 15.7,б очевидно, що

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB} \quad (*)$$

і така залежність між цими радіусами-векторами зберігається протягом усього часу руху тіла.

При векторному способі задання руху згідно з формулою (11.2) [1] $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Отже, для встановлення вектора \vec{v}_B швидкості руху точки B беремо похідну за часом від виразу (*), враховуючи, що похідна від суми дорівнює сумі похідних:

$$\vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_A + \overline{AB}) = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{AB}}{dt}. \quad (**)$$

Знову-таки, відповідно до формули (11.2) [1] в диференціальному рівнянні (**), $\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A$, де \vec{v}_A – вектор швидкості точки A ; по-

хідна ж $\frac{d\overline{AB}}{dt}$ визначає ту швидкість (позначимо її \vec{v}_{AB}), яку отримує точка B за умови, що $\vec{r}_A = const$ (тобто за умови, що полюс A не рухається), а переріз S лише виконує *обертальний рух* навколо уявної осі, котра проходить через полюс A перпендикулярно до площини π . Тоді за формулою Ейлера (14.12)

$$\vec{v}_{AB} = \vec{\omega} \times \overline{AB},$$

де $\vec{\omega}$ – вектор кутової швидкості, який згідно з розглянутим і доведеним у § 14.6 проходить у відповідному напрямку через полюс A перпендикулярно до площини π .

❶ Швидкість \vec{v}_{AB} називають **обертальною** (або **лінійною**) **швидкістю точки B в обертальному русі перерізу S навколо полюса A** .

Узявши до уваги викладене, надамо залежності (***) вигляду

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overline{AB} \quad (15.2)$$

або

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}. \quad (15.3)$$

Формули (15.2) і (15.3) є аналітичними записами **теорему про швидкості точок тіла при плоскопаралельному русі**:

❶ швидкість будь-якої точки перерізу S дорівнює геометричній (векторній) сумі швидкості точки, обраної за полюс, і обертальної швидкості цієї точки в обертальному русі перерізу S навколо обраного полюса.

Згідно з формулою (14.9) модуль обертальної швидкості точки B в обертальному русі перерізу S навколо полюса A

$$v_{AB} = BA \cdot \omega, \quad (15.4)$$

де BA – радіус обертання точки B в обертальному русі перерізу S навколо полюса A , ω – кутова швидкість перерізу S .

Відповідно до висновків, отриманих у § 14.5, вектор \vec{v}_{AB} проходить перпендикулярно до відрізка BA і напрямлений за напрямком кутової швидкості ω , тобто

$$\vec{v}_{AB} \perp BA. \quad (15.5)$$

❷ Зауважимо, що формула (15.4) є свідченням того, що модуль обертальної швидкості будь-якої точки перерізу S пропорційний віддалі від цієї точки до точки, обраної за полюс.

У разі потреби на розрахункових схемах чи будь-яких інших кресленнях-рисунках вектор \vec{v}_B швидкості точки B зображують за **правилом паралелограма**, сторонами якого є вектори \vec{v}_A і \vec{v}_{AB} , будуючи його або безпосередньо від точки B (див. рис. 15.7,б чи далі рис. 15.11), або від довільно обраної точки, що доречно розташована де-небудь поруч із зображенням перерізу S (див. далі рис. 15.8). Певна річ, замість паралелограма можна будувати векторний **трикутник швидкостей**, відповідними сторонами якого є \vec{v}_A , \vec{v}_{AB} та \vec{v}_B (див. далі рис. 15.9 і 15.10).

У попередньому параграфі ми дійшли висновку, що рух перерізу S у кожний момент часу можна розглядати як сукупність поступального руху разом із довільно обраним полюсом і обертального руху навколо полюса. Формули (15.2) і (15.3) є безумовним підтвердженням цього висновку: вектор \vec{v}_A відповідає поступальній частині плоскопаралельного руху (при цьому всі точки перерізу S начебто рухаються тотожними траєкторіями, які відтворюють траєкторію руху полюса A з однаковими швидкостями \vec{v}_A), а вектор $\vec{v}_{AB} = \vec{\omega} \times \overline{AB}$ відповідає обертальній частині плоскопаралельного руху (при цьому всі точки перерізу S начебто беруть участь у його обертанні навколо полюса), що відповідно зображено на рисунках 15.8÷15.11.

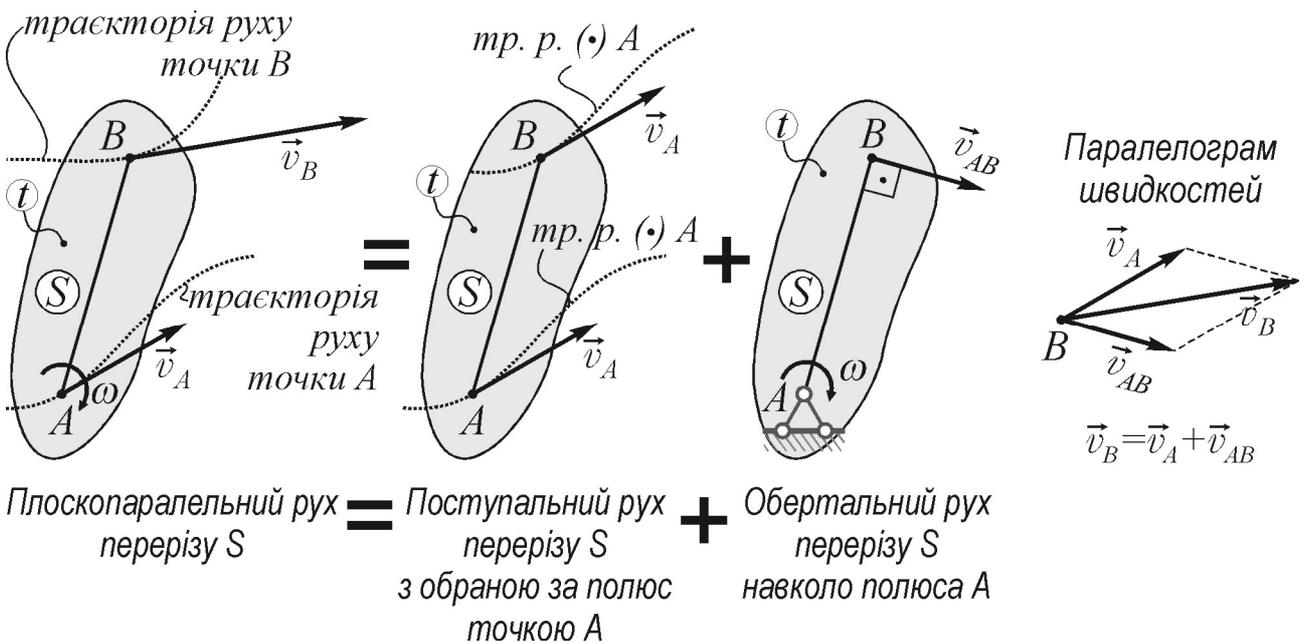


Рис. 15.8

Для прикладу знову розглянемо зображений на рисунку 15.4 плоскопаралельний рух бруса AB . Нехай у певний момент часу t брус перебуває у положенні, яке визначається кутом θ ; безсумнівно, що при русі бруса кут θ неперервно змінюється, тобто $\theta = f(t)$. Уважаючи, що у цей момент часу швидкість \vec{v}_A кінця A відома, знайдемо швидкість \vec{v}_B кінця B і кутову швидкість ω бруса, довжина якого ℓ . Обираючи точку A за полюс, будемо розглядати дійсний рух бруса як сукупність поступального руху разом з точкою A й одночасного обертання навколо точки A (рис. 15.9). За теоремою про швидкості точок тіла при плоскопаралельному русі

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}, \quad (15.3)$$

де згідно з формулою (15.4) модуль $v_{AB} = BA \cdot \omega = \ell \cdot \omega$.

Зауважимо, що, хоча й відомо те, що вектор \vec{v}_{AB} проходить під прямим кутом до відрізка BA ($\vec{v}_{AB} \perp BA$), але його величина v_{AB} невідома. Однак це компенсується тим фактом, що відомо напрямок вектора \vec{v}_B , що дозволяє однозначно зобразити *трикутник швидкостей*, який відповідає векторній сумі (15.3) (див. рис. 15.9).

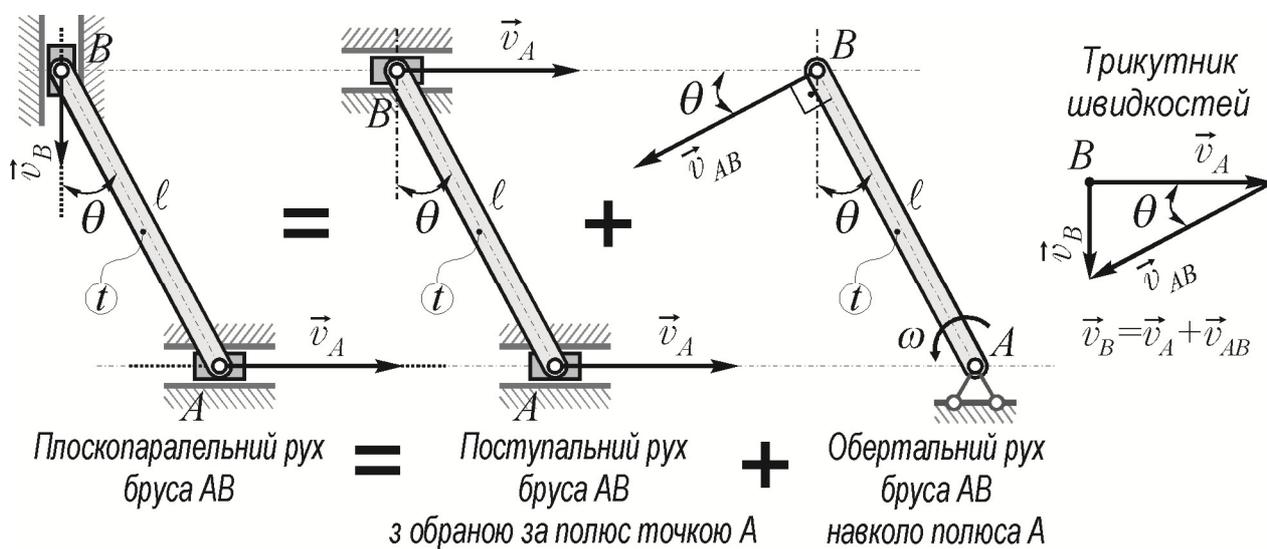


Рис. 15.9

Пам'ятаючи, що $v_{AB} = \ell \cdot \omega$ і розв'язуючи отриманий трикутник, дістанемо $\operatorname{tg} \theta = \frac{v_B}{v_A}$, $\cos \theta = \frac{v_A}{v_{AB}}$, звідки $v_{AB} = \frac{v_A}{\cos \theta}$, а

$$v_B = v_A \cdot \operatorname{tg} \theta \quad \text{і} \quad \omega = \frac{v_{AB}}{\ell} = \frac{v_A}{\ell \cdot \cos \theta}.$$

Такий же результат можна отримати, обираючи за полюс точку B : розглядаючи реальний рух бруса як поступальний рух з точкою B і одночасний обертальний рух навколо цієї точки (рис. 15.10), відповідно до формули (15.3) записуємо рівняння

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{BA}, \quad (15.3, \text{a})$$

де \vec{v}_{BA} – вектор обертальної швидкості точки A в обертальному русі розглядуваного бруса навколо полюса B , модуль якої згідно з формулою (15.4)

$$v_{BA} = AB \cdot \omega,$$

де AB – радіус обертання точки A навколо полюса B ; звідси, $AB = BA = \ell$.

Знання напрямку \vec{v}_A і того, що $\vec{v}_{BA} \perp AB$ дозволяє однозначно зобразити *трикутник швидкостей*, який відповідає векторній сумі (15.3,а) (див. рис. 15.10).

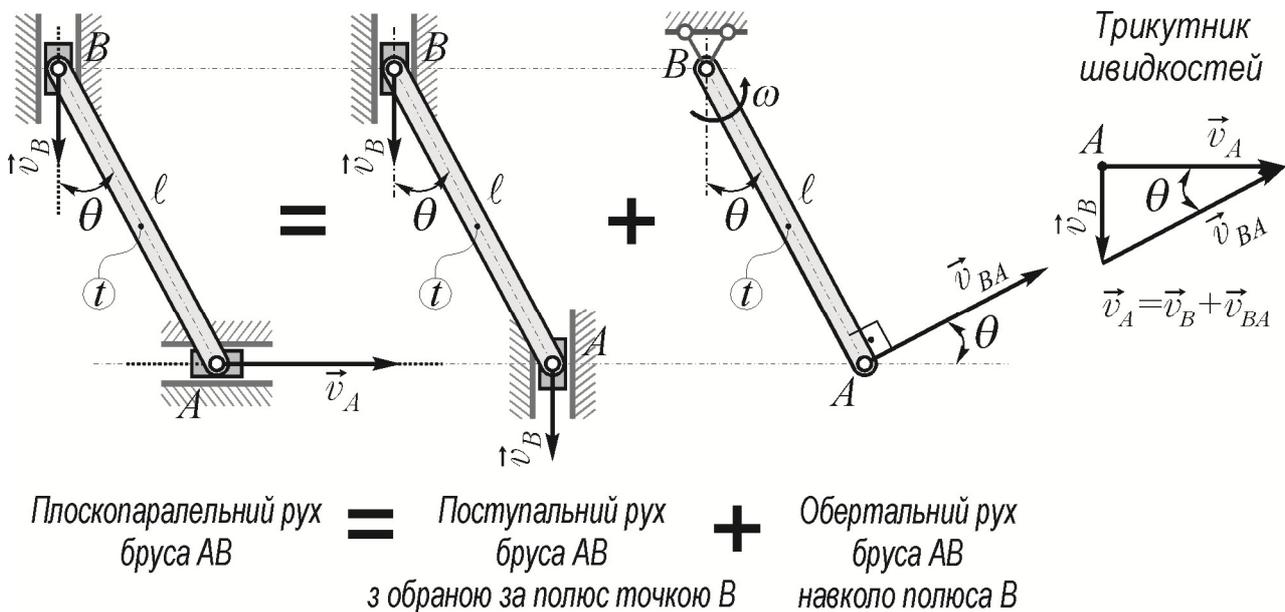


Рис. 15.10

Звернімо увагу, що у формулах (15.3) і (15.3,а) та на рисунках 15.9 і 15.10 вектори \vec{v}_{AB} і \vec{v}_{BA} однакові за модулем ($v_{AB} = v_{BA} = \ell \cdot \omega$), але протилежні за напрямком. Тобто *напрямок* вектора обертальної швидкості тієї чи іншої точки залежить від вибору полюса, що і має бути правильно враховано при графічному зображенні відповідної векторної суми.

Також зауважимо, що в обох ситуаціях, розглянутих на рисунках 15.9 і 15.10, кутову швидкість бруса визначає формула

$$\omega = \frac{v_A}{\ell \cdot \cos \theta}.$$

Цей факт у кінематиці плоскопаралельного руху має загальне значення, на підставі якого можна дійти висновку про те, що величина кутової швидкості ω не залежить від вибору полюса.

Доведімо це більш строго.

Нехай A та B – дві довільні точки розглядуваного перерізу S (див. наприклад, рис. 15.8) і полюсу A відповідає кутова швидкість $\vec{\omega}_A$, а полюсу B – кутова швидкість $\vec{\omega}_B$. Спочатку візьмемо за полюс точку A й визначимо швидкість точки B , а потім, обираючи за полюс точку B , знайдемо швидкість точки A . Згідно з формулою (15.2) запишемо

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \overrightarrow{AB},$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \times \overrightarrow{BA}.$$

Виконавши очевидні перетворення, наприклад, першого з цих рівнянь, матимемо

$$-\vec{v}_A = -\vec{v}_B - \vec{\omega}_A \times \overrightarrow{BA},$$

а додавши останні два записані рівняння, дістанемо рівність

$$\vec{v}_A - \vec{v}_A = \vec{v}_B - \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \times \overrightarrow{BA} - \vec{\omega}_A \times \overrightarrow{BA},$$

звідки

$$0 = 0 + \vec{\omega}_B \times \overrightarrow{BA} - \vec{\omega}_A \times \overrightarrow{BA}$$

або

$$\vec{\omega}_A \times \overrightarrow{BA} = \vec{\omega}_B \times \overrightarrow{BA}.$$

Не є великою таємницею, що отримана рівність виконується лише за умови $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B$, і, отже, немає ніякої потреби вказувати індекс полюса в позначенні кутової швидкості розглядуваного перерізу S , тобто

$$\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B = \vec{\omega}.$$

Таким чином,

❶ **кутова швидкість** ω обертання перерізу S тіла, що виконує плоскопаралельний рух, **від вибору полюса ніяк не залежить**.

Розглянемо круг, що котиться без ковзання по нерухомій горизонтальній площині. Нехай у певний момент часу t цей круг перебуває у зображеному на рисунку 15.11 положенні, а геометричний центр C круга має швидкість \vec{v}_C . Знайдемо: а) швидкість довільної точки M кола, яке є межею розглядуваного круга; б) швидкості характерних точок A , T (які у розглядуваний момент часу визначають вертикальний діаметр круга) й B (яка у цей момент часу перебуває на горизонтально розташованому діаметрі круга); в) кутову швидкість ω круга, радіус якого r . Обираючи точку C за полюс, розділимо оригінальне кочення круга на два складових рухи: поступальний рух разом із полюсом C та обертальний рух навколо нього. При цьому характеристикою поступальної складової кочення є те, що всі точки круга рухаються з однаковою швидкістю \vec{v}_C , а обертальна складова характеризується тим, що точки M , A , B і T здійснюють рух по колах навколо полюса C .

За теоремою (15.3)

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \vec{v}_{CM},$$

де \vec{v}_{CM} – вектор обертальної швидкості точки M в обертальному русі круга навколо полюса C , модуль якої відповідно до формули (15.4)

$$v_{CM} = MC \cdot \omega,$$

де $MC = r$ – радіус обертання точки M в обертальному русі круга навколо полюса C , а ω – кутова швидкість круга.

Згідно з формулою (15.5) вектор \vec{v}_{CM} напрямлений перпендикулярно до відрізка MC ($\vec{v}_{CM} \perp MC$) за напрямком кутової швидкості ω , яка поки що не відома.

Аналогічно

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{v}_C + \vec{v}_{CA}, & \vec{v}_B &= \vec{v}_C + \vec{v}_{CB}, & \vec{v}_T &= \vec{v}_C + \vec{v}_{CT}, \\ v_{CA} &= AC \cdot \omega = r \cdot \omega, & v_{CB} &= BC \cdot \omega = r \cdot \omega, & v_{CT} &= TC \cdot \omega = r \cdot \omega, \\ \vec{v}_{CA} &\perp AC, & \vec{v}_{CB} &\perp BC, & \vec{v}_{CT} &\perp TC. \end{aligned}$$

Кутову швидкість ω круга встановимо, дослідивши кінематику точки A , яка у розглядуваному положенні є точкою дотику круга до нерухомої горизонтальній площині. Через те що точка A не ковзає по нерухомій площині, її швидкість

$$v_A = 0,$$

з урахуванням чого відповідна формула набуває вигляду

$$0 = \vec{v}_C + \vec{v}_{CA},$$

що можливо лише за умови

$$\vec{v}_{CA} = -\vec{v}_C,$$

що відповідно і зображуємо на рисунку 15.11. Певна річ, $v_{CA} = v_C$. Урахувавши ж, що $v_{CA} = r \cdot \omega$, дістанемо $r \cdot \omega = v_C$, звідки величина кутової швидкості

$$\omega = \frac{v_C}{r},$$

а її напрямок визначає напрямок устанавленого вектора \vec{v}_{CA} обертальної швидкості точки A в обертальному русі круга навколо полюса C (див. рис. 15.11).

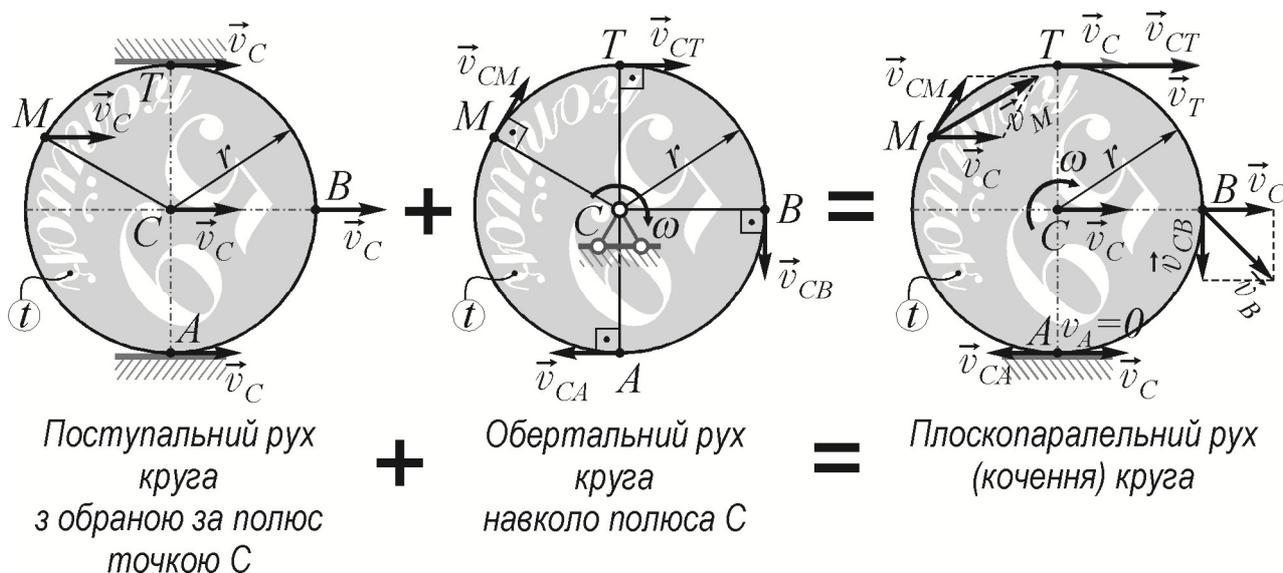


Рис. 15.11

Маючи значення ω , встановлюємо, що

$$v_{CM} = r \cdot \omega = r \cdot \frac{v_C}{r} = v_C, \quad v_{CB} = r \cdot \omega = r \cdot \frac{v_C}{r} = v_C,$$

$$v_{CT} = r \cdot \omega = r \cdot \frac{v_C}{r} = v_C,$$

тобто при коченні без ковзання круга по нерухомій поверхні

❶ модуль обертальної швидкості будь-якої точки кола, яке є межею розглядуваного круга, в обертальному русі круга навколо точки C дорівнює модулю швидкості цієї точки.

Відклавши на рисунку 15.11 за напрямком установленної кутової швидкості ω вектори \vec{v}_{CM} , \vec{v}_{CB} і \vec{v}_{CT} , згідно з векторною сумою (15.3) зображуємо вектори \vec{v}_M , \vec{v}_B та \vec{v}_T швидкостей точок M , B і T круга. Із зображеного очевидно, що

- величину й напрям вектора \vec{v}_M визначає діагональ векторного ромба, сторонами якого є вектори \vec{v}_C та \vec{v}_{CM} ; відповідно до положень елементарної геометрії модуль $v_M = v_C \cdot \sqrt{2 + 2 \cdot \cos \beta}$ або $v_M = 2 \cdot v_C \cdot \cos \frac{\beta}{2}$, де β – кут між \vec{v}_C і \vec{v}_{CM} ⁷, величина якого залежить від конкретного положення точки M ;
- величину й напрям вектора \vec{v}_B визначає діагональ векторного квадрата, сторонами якого є \vec{v}_C та \vec{v}_{CB} ; певна річ, модуль $v_B = \sqrt{2} \cdot v_C$, а вектор \vec{v}_B утворює 45° і з вертикаллю, і з горизонталлю;
- вектор \vec{v}_T – геометрична сума колінеарних однаково напрямлених векторів \vec{v}_C та \vec{v}_{CT} , через що $v_T = v_C + v_{CT} = 2v_C$.

❏ Зауважимо, що для розглядуваного положення круга точка T має найбільшу швидкість $v_T = 2v_C$ серед швидкостей усіх інших точок круга.

При розв'язуванні практичних задач за теоремою (15.3) для знаходження модуля v_B у певному положенні перерізу S , як правило, використовують один із двох способів (методів):

1. Графічний або **графоаналітичний**, який полягає в тому, що, застосовуючи формулу (15.3), оперують безпосередньо з векторами \vec{v}_A , \vec{v}_{AB} та \vec{v}_B , не пов'язуючи їх з будь-якими системами координат. При графічному розв'язуванні в певному доречно обраному масштабі швидкостей відповідно до векторної суми (15.3) графічно будують паралелограм (або трикутник) швидкостей і модуль v_B визначають, ураховуючи обраний масштаб, безпосереднім вимірюванням будь-яким придатним для цього приладом (наприклад, лінійкою). При графоаналітичному розв'язуванні, побудувавши трикутник

⁷ Див. будь-який довідник з елементарної геометрії.

(або паралелограм) швидкостей, модуль v_B визначають за тією чи іншою аналітичною (як правило, геометричною) формулою (теоремою);

2. Метод проєкцій, який полягає в тому, що векторну рівність (15.3) записують у проєкціях на ортогональні координатні осі x і y , пов'язуючи початок їх відріку чи з точкою A , чи з точкою B й одну з осей напрямляючи вздовж відрізка AB . Після цього модуль v_B визначають через проєкції v_{Bx} і v_{By} .

Теорема про швидкості точок тіла при плоскопаралельному русі має два корисних наслідки, які часто-густо полегшують дослідження плоского руху тіла (особливо при розв'язуванні практичних задач). Розглянемо ці наслідки.

Наслідок 1. Проєкції швидкостей точок перерізу S на вісь, що проходить через ці точки, рівні⁸.

Доведення

Розглянемо плоскопаралельний рух твердого тіла. Нехай у певний момент часу t відомі швидкість \vec{v}_A точки A перерізу S та його кутова швидкість $\vec{\omega}$ (визначеність вектора $\vec{\omega}$ означає, що відомі напрямок обертання перерізу й модуль кутової швидкості ω перерізу). Нехай також точки B і C розглядуваного перерізу знаходяться на одній прямій із точкою A (рис. 15.12).

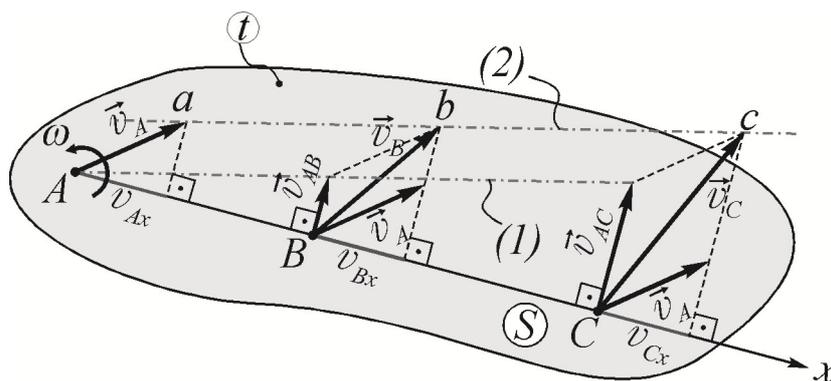


Рис. 15.12

Обираючи точку A за полюс, за теоремою (15.3) записуємо:

⁸ У деяких підручниках з теоретичної механіки наведений **наслідок 1** небезпідставно називають **теоремою Грасгофа про проєкції швидкостей**. Грасгоф Франц (нім. *Franz Grashof*; 11 липня 1826 р., Дюссельдорф – 26 жовтня 1893 р., Карлсруе) – німецький механік і машинобудівник.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}, \quad \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{AC}, \quad (***)$$

де згідно з формулою (15.5)

$$\vec{v}_{AB} \perp AB \quad \text{і} \quad \vec{v}_{AC} \perp AC.$$

Проведімо через точки A , B та C вісь Ax . Спроектувавши обидві частини обох векторних рівностей (***) на цю вісь, матимемо

$$v_{Bx} = v_{Ax} + v_{ABx} \quad \text{і} \quad v_{Cx} = v_{Ax} + v_{ACx},$$

де v_{Ax} , v_{Bx} , v_{Cx} , v_{ABx} та v_{ACx} – проекції на вісь Ax швидкостей \vec{v}_A , \vec{v}_B , \vec{v}_C й обертальних швидкостей \vec{v}_{AB} , \vec{v}_{AC} відповідно.

Через те що вектори \vec{v}_{AB} і \vec{v}_{AC} розташовані перпендикулярно до осі Ax (див. рис. 15.12), певна річ,

$$v_{ABx} = 0 \quad \text{та} \quad v_{ACx} = 0,$$

з урахуванням чого дістанемо

$$v_{Bx} = v_{Ax} + 0 \quad \text{і} \quad v_{Cx} = v_{Ax} + 0,$$

звідки очевидно, що

$$v_{Ax} = v_{Bx} = v_{Cx},$$

тобто, всі шукані проекції рівні, що і треба було довести.

Наслідок 2. Кінці векторів швидкостей точок перерізу S , які належать певному відрізку, знаходяться на одній прямій та ділять цю пряму на частини, які пропорціональні віддалям між відповідними точками зазначеного відрізка (без доведення⁹).

Зауваження 15.1. На рисунку 15.12 зображені: а) пряма (1), яка є графічно-геометричним підтвердженням того, що модуль обертальної швидкості будь-якої точки перерізу S пропорційний віддалі від цієї точки до точки, обраної за полюс (див. відповідне зауваження на с. 16); б) пряма (2), яка є аналогічним підтвердженням **наслідку 2**. Свідоме зображення й використання зазначених прямих (1) і (2) може стати у добрій пригоді при знаходженні положень тих чи інших векторів швидкостей точок перерізу S тіла. Певним обмеженням при цьому є те, що всі геометричні й кінематичні параметри, котрі характеризують конкретну задачу, необхідно зображувати з жорстким дотриманням лінійного і швидкісного масштабів (див., наприклад, далі рис. 123z.3 на с. 41 і рис. 123z.4 на с. 45).

⁹ Доведення **наслідку 2** пропонується охочим виконати самостійно. Якщо доводити самостійно охоти, часу чи вміння немає, але є бажання переконатися у справедливості змісту цього наслідку, то див. [2] с. 209.

§ 15.4. ПОНЯТТЯ ПРО МИТТЄВИЙ ЦЕНТР ШВИДКОСТЕЙ

Розглянемо плоский рух твердого тіла й доведемо, що в будь-який момент часу існує така точка, що належить перерізу S (або незмінно пов'язана з перерізом), швидкість якої в цю мить дорівнює нулю. Нехай у якийсь довільний момент часу переріз S перебуває у зображеному на рисунку 15.13 положенні, точка A має певну швидкість \vec{v}_A ($v_A \neq 0$), а переріз S – кутову швидкість ω ($\omega \neq 0$). Подумки повернемо вектор \vec{v}_A навколо точки A у напрямку кутової швидкості на 90° , в отриманому напрямкові відкладемо від точки A відрізок AP довжиною $AP = \frac{v_A}{\omega}$ і

знайдемо швидкість точки P . За формулою (15.3)

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{AP},$$

де \vec{v}_{AP} – вектор обертальної швидкості точки P в обертальному русі перерізу S навколо полюса A , модуль v_{AP} якої визначимо за формулою (15.4); урахувавши значення AP , дістанемо

$$v_{AP} = PA \cdot \omega = \frac{v_A}{\omega} \cdot \omega = v_A.$$

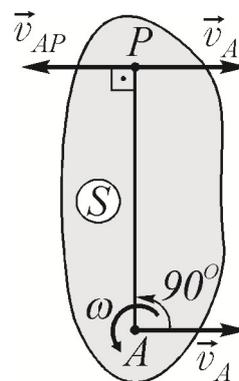


Рис. 15.13

Оскільки згідно з формулою (15.5) $\vec{v}_{AP} \perp AP$ і напрямлений за напрямком кутової швидкості ω , то, зобразивши відповідно вектор \vec{v}_{AP} на рисунку 15.13, бачимо, що вектори \vec{v}_A та \vec{v}_{AP} : а) колінеарні; б) протилежні за напрямками; в) однакові за величиною. Таким чином, $\vec{v}_{AP} = -\vec{v}_A$ і

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{AP} = \vec{v}_A - \vec{v}_A = 0,$$

тобто швидкість точки P дорівнює нулю.

❶ Точка, що належить перерізу S чи незмінно з ним пов'язана¹⁰, швидкість якої у певний момент часу дорівнює нулю, носить назву **миттєвий центр швидкостей** тіла в цю мить.

❷ Зазвичай миттєвий центр швидкостей позначають літерою (символом) P .

¹⁰ Миттєвий центр швидкостей не обов'язково має знаходитися у межах перерізу S ; у більшості випадків він перебуває поза перерізом, але у кожному мить розташування в просторі миттєвого центра швидкостей однозначно залежить від положення певних точок перерізу S і їх кінематичних характеристик (див., наприклад, далі рис. 15.18).

§ 15.5. ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТЕЙ ТОЧОК ТІЛА ПРІ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОМУ РУСІ ЗА ДОПОМОГОЮ МИТТЄВОГО ЦЕНТРА ШВИДКОСТЕЙ

У цьому параграфі з'ясуємо, яка ситуація виникає у разі, коли при знаходженні швидкостей тих чи інших точок твердого тіла, що виконує плоскопаралельний рух, відомо положення його миттєвого центра швидкостей.

Для цього розглянемо плоскопаралельний рух тіла; нехай у довільний момент часу t відповідний переріз S перебуває у зображеному на рисунку 15.14 положенні та відомі розташування миттєвого центра швидкостей P і кутова швидкість ω перерізу. Оберемо за полюс точку P . Тоді за теоремою (15.3) швидкість довільної точки M перерізу S визначає формула

$$\vec{v}_M = \vec{v}_P + \vec{v}_{PM},$$

або з урахуванням того, що $\vec{v}_P = 0$,

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{PM},$$

де \vec{v}_{PM} – вектор обертальної швидкості точки M в обертальному русі перерізу S навколо миттєвого центра швидкостей P .

Згідно з формулами (15.4) і (15.5) модуль

$$v_M \equiv v_{PM} = MP \cdot \omega, \tag{15.6}$$

а вектор $\vec{v}_M \equiv \vec{v}_{PM}$ напрямлений за напрямком кутової швидкості ω і проходить перпендикулярно до відрізка MP , що сполучає точку M з миттєвим центром швидкостей P тіла, тобто

$$\vec{v}_M \perp PM. \tag{15.7}$$

Отримані залежності (15.6) і (15.7) приводять до логічного **висновку:**

❶ якщо при плоскому русі тіла у будь-який момент часу за полюс обрати миттєвий центр швидкостей цього тіла, то вектори швидкостей точок перерізу S розподіляються так, немовби в цю мить переріз обертається **навколо мит-**

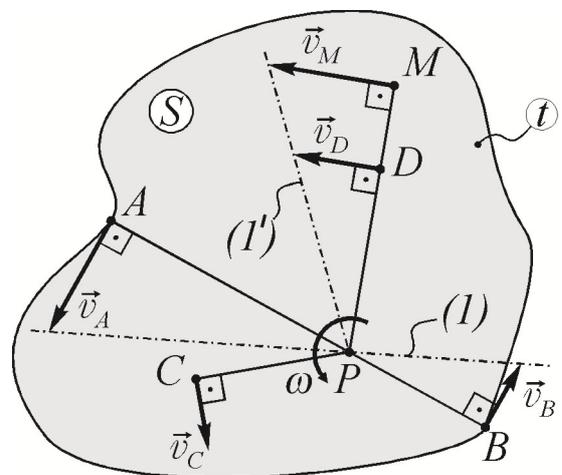


Рис. 15.14

тевого центра швидкостей¹¹ так само, як обертається тіло навколо нерухомої осі (див. тему 14).

За формулами (15.6) і (15.7) легко встановити, що модулі й вектори швидкостей точок A , B , C та D перерізу S :

$$v_A = AP \cdot \omega \quad \text{і} \quad \vec{v}_A \perp AP,$$

$$v_B = BP \cdot \omega \quad \text{і} \quad \vec{v}_B \perp BP,$$

$$v_C = CP \cdot \omega \quad \text{і} \quad \vec{v}_C \perp CP,$$

$$v_D = DP \cdot \omega \quad \text{і} \quad \vec{v}_D \perp DP;$$

звісно, що всі вектори напрямлені за напрямком кутової швидкості ω перерізу (див. рис. 15.14).

Також з останніх формул нескладно знайти, наприклад, що

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AP \cdot \omega}{BP \cdot \omega}$$

або

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AP}{BP}, \quad (15.8)$$

звідки зрозуміло, що швидкості будь-яких точок перерізу S відносяться між собою так, як їх віддалі від миттєвого центра швидкостей (див. на рис. 15.14 прямі (I) і (I') й **зауваження 15.1** на с. 25).

Таким чином,

❶ **модуль** v_M **швидкості** будь-якої точки M перерізу S у кожний момент часу пропорціональний найкоротшій віддалі MP від цієї точки до миттєвого центра швидкостей P і визначається добутком вказаної віддалі на кутову швидкість ω перерізу S , а **вектор** \vec{v}_M напрямлений перпендикулярно до відрізка MP у напрямку обертання перерізу.

❷ Підсумовуючи викладене у цьому параграфі, можна сказати, що у разі, коли при плоскопаралельному русі тіла у розглядуваний момент часу положення миттєвого центра швидкостей визначене, то використання його як полюса дає можливість *уникнути поступальної частини* плоского руху й **умовно розглядати тіло** як таке, що виконує миттєвий *обертальний рух* навколо уявної осі, яка відповідно проходить через миттєвий центр швидкостей. Слід мати на увазі, що означена умовність справедлива **лише при знаходженні швидкостей** точок, а не їх прискорень.

¹¹ Див. зноску 2 на с. 9.

§ 15.6. СПОСОБИ ВИЗНАЧЕННЯ ПОЛОЖЕННЯ МИТТЄВОГО ЦЕНТРА ШВИДКОСТЕЙ

Використання миттєвого центра швидкостей часто суттєво спрощує процес дослідження плоскопаралельного руху того чи іншого тіла. Але «певним недоліком» цієї точки є те, що при русі тіла її положення в просторі неперервно змінюється. Тому необхідно твердо знати й уміти знаходити місце розташування миттєвого центра швидкостей тіла у різноманітних положеннях перерізу S у площині свого руху. Розглянемо деякі випадки й відповідні:

- способи визначення положення миттєвого центра швидкостей;
- формули, які характеризують кінематику розглядуваного випадку.

☛ Усі наведені нижче міркування базуються на отриманих у § 15.5 висновках і формулах (15.6) ÷ (15.8).

1. Нехай відомі швидкість \vec{v}_A точки A та кутова швидкість ω перерізу S (рис. 15.15). У цьому разі положення миттєвого центра швидкостей визначають аналогічно доведенню його існування – див. § 15.4 і рисунок 15.13.

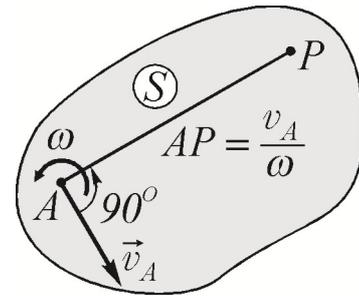


Рис. 15.15

2. Нехай відомі швидкість \vec{v}_A точки A та положення прямої (b) , на якій знаходиться вектор \vec{v}_B швидкості точки B (рис. 15.16,а). У цьому випадку миттєвий центр швидкостей знаходиться на перетині перпендикуляра (a^\perp) , встановленого у точці A до вектора \vec{v}_A , та перпендикуляра (b^\perp) ¹², встановленого у точці B до прямої (b) .

☛ Варто розуміти, що без будь-яких обмежень можна вважати й говорити, що у точці B перпендикуляр (b^\perp) встановлено до вектора \vec{v}_B , оскільки останній, хоча і не заданий однозначно умовою розглядуваного випадку, але обов'язково знаходиться на прямій (b) .

Знаючи модуль v_A швидкості точки A та визначивши певним чином віддаль AP від цієї точки до миттєвого центра швид-

¹² Позначення перпендикулярів (a^\perp) та (b^\perp) є **умовним** і уведеним в обіг автором; як правило зазначені перпендикуляри взагалі ніяк не позначають.

костей, з формули (15.6) можна знайти числове значенні кутової швидкості $\omega = \frac{v_A}{AP}$, а за напрямком вектора \vec{v}_A встановити напрямок обертання перерізу навколо точки P (або, що те саме, напрямку кутової швидкості ω). Визначивши потім віддаль BP від точки B до полюса P , за формулою (15.6) можна знайти, що модуль $v_B = BP \cdot \omega$, а за напрямком кутової швидкості ω перерізу S – однозначно встановити напрямок вектора \vec{v}_B на прямій (b) (див. рис. 15.16,б).

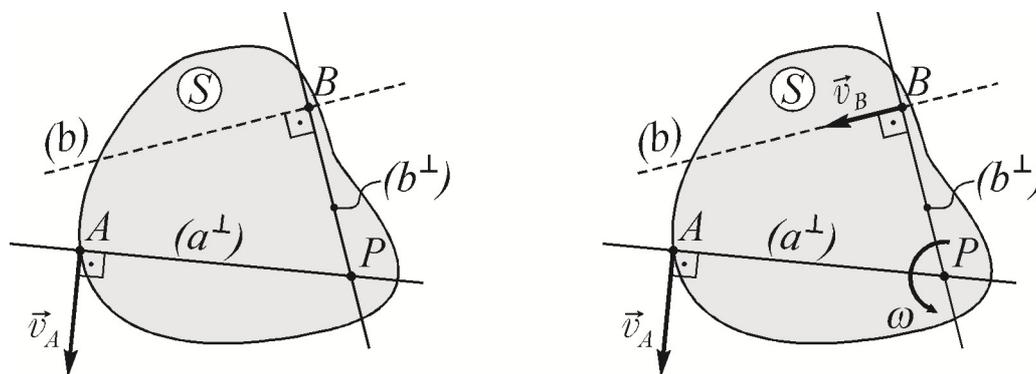


Рис. 15.16

3. Нехай для двох довільних точок A і B перерізу S відомі їх швидкості \vec{v}_A та \vec{v}_B , які паралельні між собою, протилежно напрямлені й перпендикулярні відрізку AB (рис. 15.17). Безсумнівно, що знайти положення миттєвого центра швидкостей, установивши

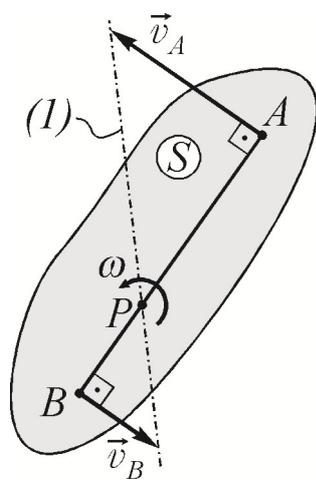


Рис. 15.17

відповідним чином перпендикуляри (a^\perp) і (b^\perp) , неможливо, оскільки у цьому разі зазначені перпендикуляри збігаються. Тоді врахуємо, що відповідно до формули (15.8) $\frac{v_A}{v_B} = \frac{AP}{BP}$, через що кінці векторів \vec{v}_A та \vec{v}_B мають лежати на *прямій* (l) , яка проходить через точку P . Тоді точка перетину прямої (l) з відрізком AB і є миттєвим центром швидкостей тіла у цьому випадку.

Знаючи модуль v_A (або v_B) та визначивши віддаль AP (чи BP), за формулою (15.6) знаходять числове

значення кутової швидкості $\omega = \frac{v_A}{AP}$ (або $\omega = \frac{v_B}{BP}$). Напрямок же кутової швидкості перерізу визначають за напрямком вектора \vec{v}_A чи \vec{v}_B (див. рис. 15.17).

❏ Зауважимо, що співвідношення між модулями v_A і v_B у розглянутому випадкові не має ніякого значення, а при $v_A = v_B$ точка P ділить відрізок AB навпіл.

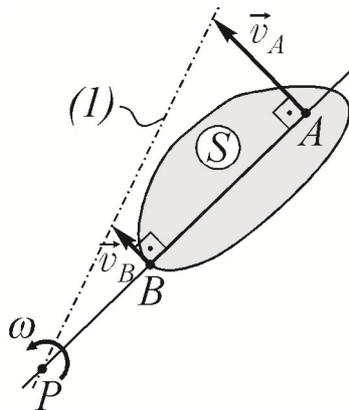


Рис. 15.18

4. Нехай для двох точок A і B перерізу S відомі їх швидкості \vec{v}_A та \vec{v}_B , які паралельні між собою, мають однаковий напрямок, перпендикулярні відрітку AB і різні за величиною (приймемо для визначеності, що $v_A > v_B$) (рис. 15.18).

На підставі аналогічних до попереднього випадку міркувань зрозуміло, що миттєвий центр швидкостей P знаходиться на перетині прямої (l) , що проходить через кінці векторів швидкостей \vec{v}_A і \vec{v}_B , та прямої, що проходить по відрітку AB (див. рис. 15.18 і подібну ситуацію з точками M та D на рис. 15.14).

5. Нехай для двох довільних точок A і B перерізу S відомі їх швидкості \vec{v}_A та \vec{v}_B , які паралельні між собою, мають однаковий напрямок, перпендикулярні відрітку AB і однакові за величиною (рис. 15.19). Оскільки у цьому разі пряма (l) , яка проходить через

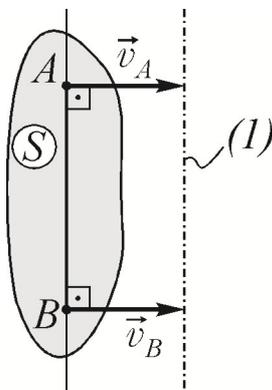


Рис. 15.19

кінці векторів \vec{v}_A і \vec{v}_B , паралельна прямій, що проходить через відрізок AB , то миттєвий центр швидкостей P знаходиться в нескінченності ($AP = BP = \infty$), а кутова швидкість ω перерізу S

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{\infty} = 0 \quad (\text{або} \quad \omega = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_B}{\infty} = 0).$$

Це означає, що у такому положенні (або у цю **мить**) обертання перерізу S відсутнє і він виконує **миттєво-поступальний рух**, характерною ознакою якого є те, що швид-

кості руху всіх точок перерізу S однакові, кутова швидкість його дорівнює нулю, а точки, швидкість котрої дорівнює нулю, не існує.

❏ *Миттєво-поступальний рух* відрізняється від *поступального руху* тим, що у випадку миттєво-поступального руху тільки швидкості всіх точок однакові, але їх прискорення взагалі не рівні між собою (як відомо, при поступальному русі прискорення всіх точок також однакові); кутова швидкість ω перерізу S у цю мить дорівнює нулеві, але його кутове прискорення ε при цьому не дорівнює нулю.

6. Нехай для двох довільних точок A і B перерізу S відомі швидкості \vec{v}_A та \vec{v}_B , які паралельні між собою, мають однаковий напрямок, але не перпендикулярні відрізку AB (рис. 15.20). Очевидно, що в цьому разі перпендикуляри (a^\perp) (встановлений у точці A до вектора \vec{v}_A) та (b^\perp) (встановлений у точці B до вектора \vec{v}_B)

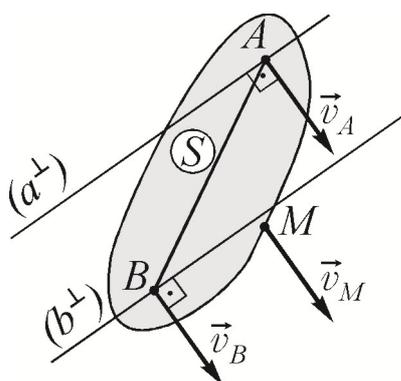


Рис. 15.20

паралельні один до одного й не перетинаються (або перетинаються у нескінченності). Отже, і в цьому випадку

$$AP = BP = \infty,$$

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{\infty} = 0,$$

переріз S виконує миттєво-поступальний рух, що, природно, визначає рівність швидкостей усіх точок перерізу:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_M.$$

7. Нехай матеріальне тіло (геометрична форма цього тіла не має ніякого значення) котиться без ковзання по будь-якій *нерухомій* поверхні (рис. 15.21) чи по лінії (наприклад, по нерухомому дроту; можна також згадати популярну нещодавно дитячу іграшку «йо-йо»). Оскільки у цьому разі *швидкість точки дотику тіла та поверхні (лінії) дорівнює нулю*, то ця точка і є миттєвим центром швидкостей тіла. Якщо швидкість \vec{v}_M довільної точки M ті-

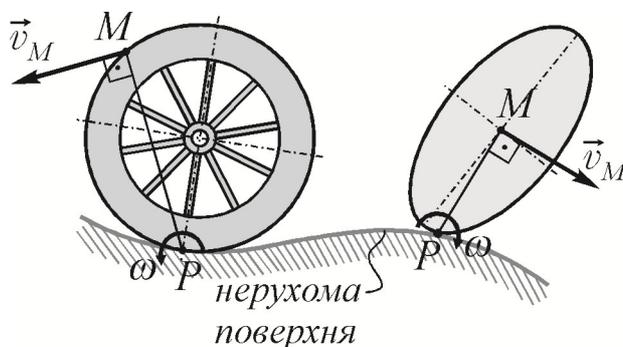


Рис. 15.21

ла відома, то за формулою (15.6) $\omega = \frac{v_M}{MP}$, де ω – кутова швидкість

кочення тіла, напрямком якої визначається напрямком вектора \vec{v}_M ; також відповідно до формули (15.7) обов'язково буде виконуватися умова $\vec{v}_M \perp PM$.

Для усвідомлення ситуації, яка виникає у разі застосування поняття про миттєвий центр швидкостей, знову розглянемо рух зображеного на рисунках 15.9 і 15.10 бруса AB . Нехай у певний момент часу t брус перебуває у положенні, яке визначає кут θ , а кінець A бруса має швидкість \vec{v}_A (рис. 15.22,а); знайдемо швидкість \vec{v}_B кінця B і кутову швидкість ω бруса. Установивши у точці A перпендикуляр (a^\perp) до вектора \vec{v}_A , а у точці B – перпендикуляр (b^\perp) до прямої (b) , на перетині цих перпендикулярів отримаємо миттєвий центр швидкостей P бруса. Обираючи точку P за полюс, будемо у даний момент часу t дійсний плоскопаралельний рух бруса умовно розглядати як обертальний рух навколо цієї точки (див. рис. 15.22,б).

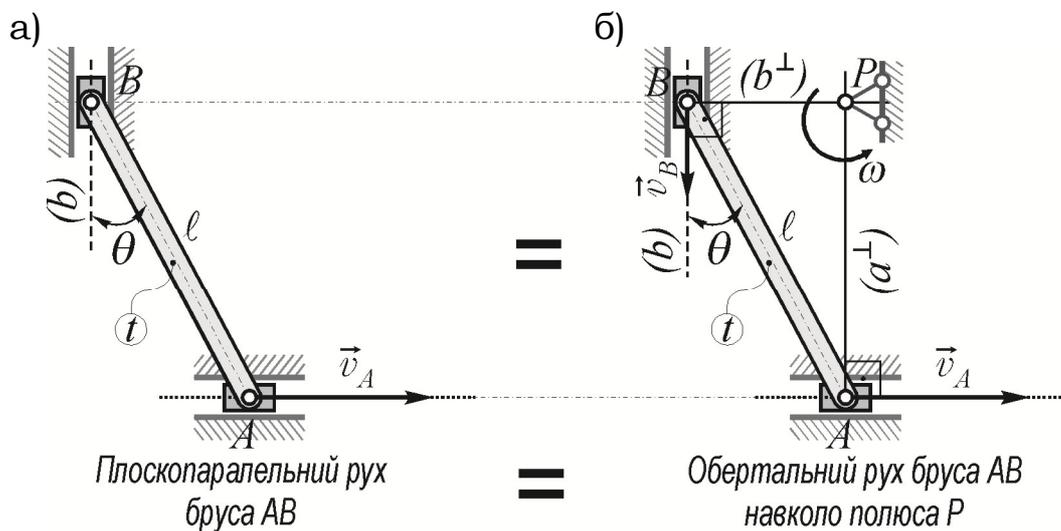


Рис. 15.22

Тоді з формули (15.6) кутова швидкість бруса $\omega = \frac{v_A}{AP}$; оскільки з трикутника ABP очевидно, що $AP = AB \cdot \cos \theta = l \cdot \cos \theta$, то $\omega = \frac{v_A}{l \cdot \cos \theta}$, а напрямком вектора \vec{v}_A визначає напрямком кутової

швидкості ω . Оскільки з трикутника ABP віддаль $BP = \ell \cdot \sin \theta$, а за формулою (15.6) $v_B = BP \cdot \omega$, то, урахувавши необхідні значення, дістанемо, що модуль $v_B = BP \cdot \omega = \ell \cdot \sin \theta \cdot \frac{v_A}{\ell \cdot \cos \theta} = v_A \cdot \operatorname{tg} \theta$, а напрямком вектора \vec{v}_B на прямій (b) встановлюємо за напрямком кутової швидкості ω бруса (див. рис. 15.22,б)¹³.

На завершення розмови про миттєвий центр швидкостей P відмітимо й зауважимо таке. Важливо розуміти те, що у разі, коли у певний момент часу точка P перебуває у межах перерізу S , то вона збігається з якоюсь точкою цього перерізу, але в інший момент часу миттєвий центр швидкостей тіла збігається зі зовсім іншою точкою перерізу. Розглянемо це на прикладі круга, що котиться без ковзання по нерухомій горизонтальній площині так, що геометричний центр C круга має швидкість \vec{v}_C . Якщо у момент часу t точкою дотику круга до площини є точка A , то $v_A = 0$ і, звідси, у цю мить точка A – миттєвий центр швидкостей круга (рис. 15.23,а). Якщо при подальшому коченні у момент часу $t_1 = t + \Delta t_1$ круг торкається площини іншою точкою, то у момент часу t_1 ця інша точка є миттєвим центром швидкостей (рис. 15.23,б). Якщо у момент часу $t_2 = t + \Delta t_2$ круг торкається площини точкою B , то у цю мить його миттєвим центром швидкостей є саме точка B (рис. 15.23,в).

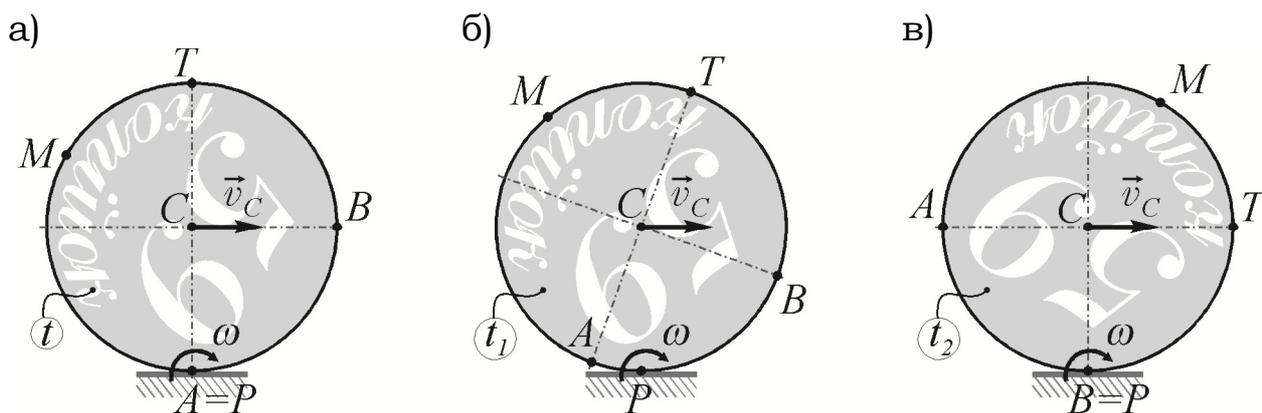
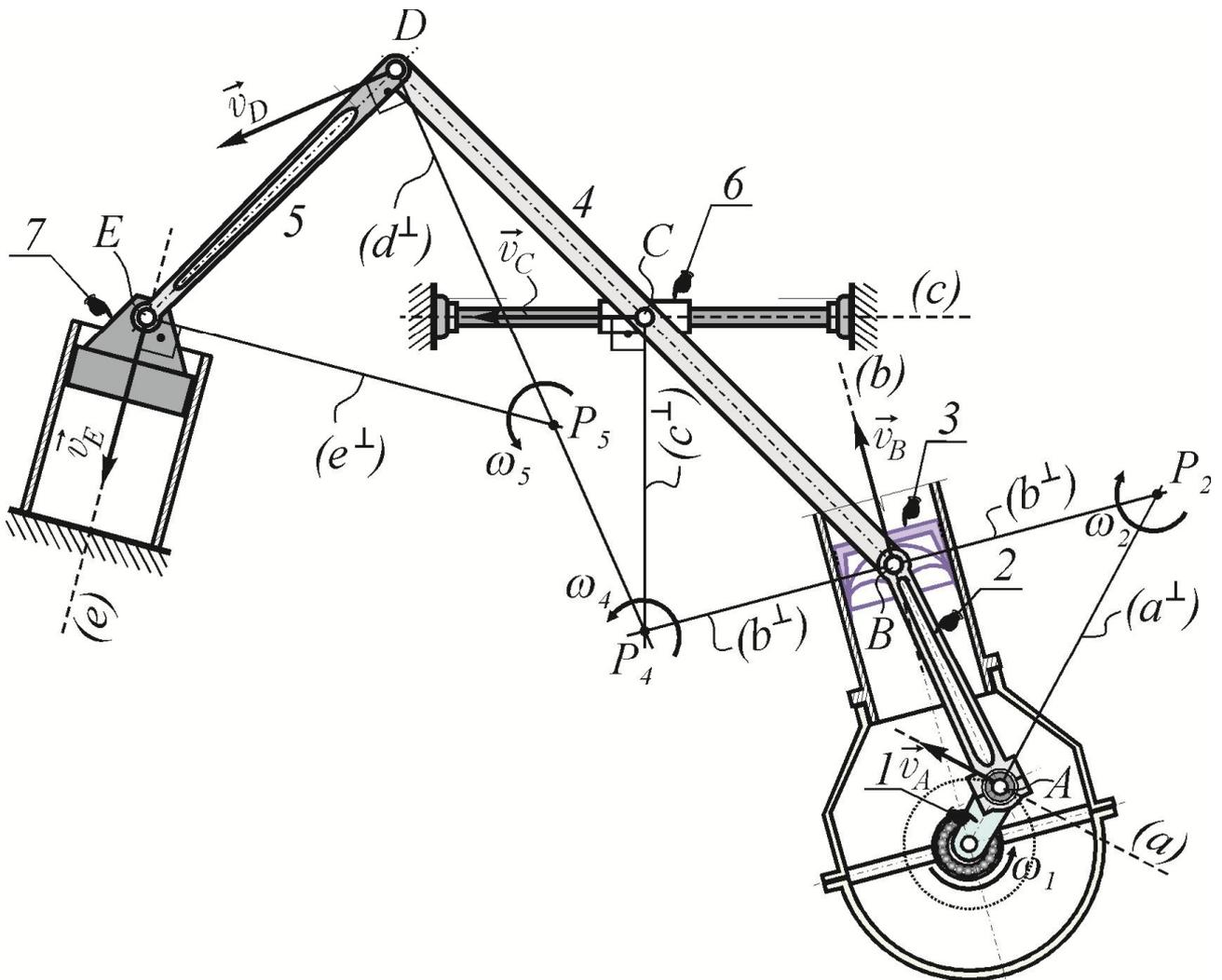


Рис. 15.23

¹³ Певна річ, результати-значення, встановлені за допомогою поняття про миттєвий центр швидкостей, повністю збігаються з отриманим на с. 18÷19, де за полюс обиралася спочатку точка A , а потім точка B . Неважко помітити, що використання миттєвого центра швидкостей спростило процес дослідження плоского руху бруса і зменшило обсяг обчислювальної роботи.

ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА



ЗАДАЧА № 123

На рисунку 123z.1 наведено схематичне зображення¹ багато-ланкового плоского механізму, рух якого відбувається завдяки обертанню ланки 1 зі сталою кутовою швидкістю ω_1 за рухом годинникової стрілки навколо нерухомої осі, що проходить через точку O_1 перпендикулярно до площини знаходження механізму². Усі ланки розглядати як абсолютно тверді тіла, вважаючи, що суміжні ланки з'єднані ідеальними точковими шарнірами A і B .

Для зображеного положення механізму **виконати кінематичний аналіз**: а) встановити вид руху кожної ланки механізму й указати траєкторії рухів тих точок механізму, для яких це можливо без будь-яких формул та обчислень; б) визначити швидкості точок A , B , D і K та кутові швидкості ланок 2 і 3 .

Дано: $O_1A = 0,5 \text{ м}$, $AB = BD = 2 \text{ м}$,

$$O_3B = O_3K = 1 \text{ м}, \quad \omega_1 = 6\sqrt{3} \left(\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right).$$

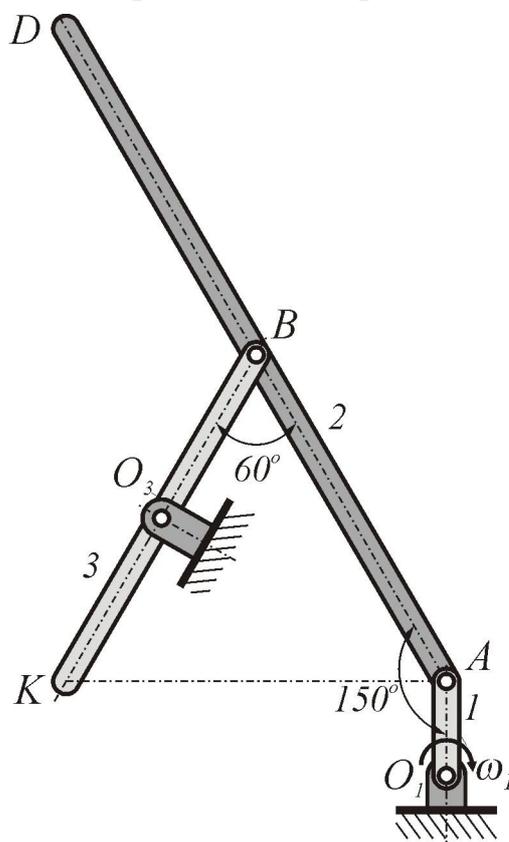


Рис. 123z.1

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ**1. ПОПЕРЕДНІЙ КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМУ³**

Рухи ланок 1 і 3 обмежено шарнірно-нерухомими опорами O_1 й O_3 відповідно, через це зазначені ланки виконують обертальні

¹ Наведене на рисунку 123z.1 **схематичне зображення механізму** є достатньо близьким до вигляду реальної конструкції, але, звісно, не є інженерним **робочим кресленням**.

² Зображена на рисунку 123z.1 дугова стрілка, що позначена (підписана) як ω_1 , визначає не вектор кутової швидкості $\vec{\omega}_1$, а лише **напрямок обертання ланки 1** у розглядуваному положенні механізму.

³ Така назва є **умовною**; вона означає, що в цьому пункті задачі визначають ті кінематичні характеристики руху ланок і точок механізму, для яких це можливо зробити **без будь-яких формул та обчислень**. При набутті певного досвіду все викладене в цьому пункті варто виконувати подумки, користуючись відповідними поняттями й характеристиками безпосередньо у необхідних місцях розв'язуваної задачі.

рухи **навколо нерухомих осей**, що проходять через нерухомі точки O_1 й O_3 перпендикулярно до площини знаходження механізму (тому що розглядувані ланки при русі механізму перебувають тільки в одній площині, то у такому разі також можна говорити, що ланки 1 і 3 виконують **обертальні рухи навколо точок** O_1 й O_3).

Важливо розуміти та знати, що при русі механізму ланка 1 виконує обертальний рух тільки в одному напрямкові, весь час обертаючись на 360° .

|| ① Зазвичай такі ланки називають **кривошипями**.

Ланка ж 3 спочатку якийсь проміжок часу обертається в одному напрямку, потім, зупинившись на мить у певному положенні, обертається в протилежному напрямку до зупинки в якомусь іншому певному положенні, після чого її зазначені рухи знову циклічно повторюються (говорять, що ланка 3 виконує **коливально-обертальний рух**).

|| ① Зазвичай такі ланки називають **коромислами**.

Оскільки точка A механізму належить ланці 1, яка виконує обертальний рух, то відповідно до викладеного у §§ 14.1 і 14.5 траєкторією руху точки A є коло радіуса $R_A = AO_1$ із центром у точці O_1 , а вектор \vec{v}_A швидкості руху цієї точки лежить на дотичній до вказаної траєкторії руху. Оскільки ж траєкторією руху є коло, то дотична, яку позначимо (a) , проходить через точку A під кутом 90° до радіуса, який у розглядуваному положенні механізму сполучає точку A із центром кола, тобто $(a) \perp AO_1$. Зображуємо траєкторію руху точки A та дотичну (a) на рисунку 123z.2⁴.

Оскільки точки B і K механізму належать ланці 3, що виконує коливально-обертальний рух, то траєкторіями цих точок є відповідні колові дуги радіусами $R_B = BO_3$ та $R_K = KO_3$ з центрами у точці O_3 . Відповідно до викладеного вище, вектор \vec{v}_B швидкості руху точки B має знаходитися на дотичній (b) , яка проходить че-

⁴ На рисунку 123z.2 зображено **кінематичну схему механізму** та тільки ті характеристики руху ланок механізму та його окремих точок, які визначені при проведенні *попереднього кінематичного аналізу*; рисунок 123z.2 є **допоміжним** і певним початковим **фрагментом** остаточної розрахункової схеми (див. рис. 123z.3). Звісно, що при розв'язуванні будь-яких практичних задач немає ніякої потреби зображувати такий фрагмент окремим рисунком.

рез цю точку під кутом 90° до відрізка BO_3 , а вектор \vec{v}_K – на дотичній (k) , котра проходить через точку K під прямим кутом до відрізка KO_3 . Зображуємо на рисунку 123z.2 траєкторії рухів точок B і K та дотичні (b) і (k) .

Розглядаючи рух ланки 2, встановлюємо, що:

- траєкторії рухів точок A та B , які належать цій ланці, не однакові – за цією ознакою ланка 2 не виконує поступальний рух;
- у цієї ланки немає нерухомої точки (як точки O_1 й O_3 у ланок 1 і 3 відповідно), через яку б проходила вісь її обертання – за цією ознакою ланка 2 не виконує обертального руху навколо нерухомої осі;
- усі точки цієї ланки рухаються тільки в одній площині (в якій знаходиться весь механізм); за цією ознакою ланка 2 виконує плоскопаралельний рух.

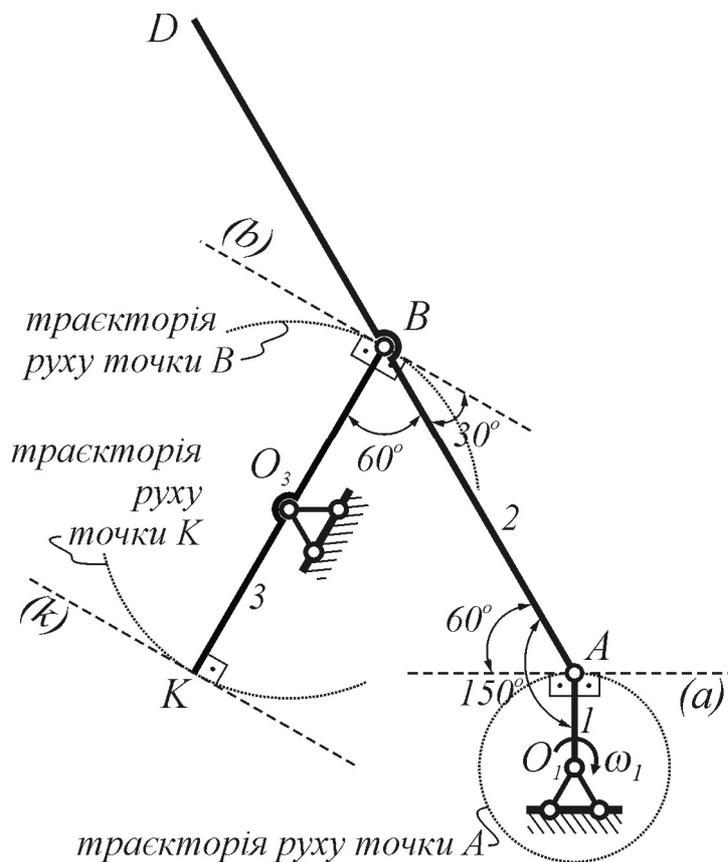


Рис. 123z.2

|| ① Зазвичай такі ланки називають **шатунами**.

Оскільки точка D належить тільки ланці 2, яка виконує складний плоскопаралельний рух, то вказати будь-які кінематичні характеристики цієї точки без використання відповідних формул і обчислень неможливо.

2. РОЗГЛЯНЕМО ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ ЛАНКИ 1

Знаючи кутову швидкість ω_1 обертання ланки 1, за формулою (14.9) визначимо модуль v_A швидкості точки A

$$v_A = AO_1 \cdot \omega_1 = 0,5 \cdot 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \approx 5,196 \left(\frac{м}{сек} \right).$$

❏ Варто згадати, що швидкість \vec{v}_A називають **обертальною** (або лінійною, або коловою) швидкістю точки A .

Напрямок вектора \vec{v}_A на дотичній (a) встановлюємо за заданим в умові задачі напрямком обертання ланки 1 (зазвичай говорять, що вектор \vec{v}_A напрямлений за напрямком кутової швидкості ω_1). Зображуємо відповідно вектор \vec{v}_A на розрахунковій схемі на рисунку 123z.3.

Зауваження № 123.1. При розв'язуванні задачі методом проєкцій вектор \vec{v}_A на розрахунковій схемі зображують променем довільної довжини; у разі графічного розв'язування вектор \vec{v}_A , як і вектори швидкостей усіх інших точок, необхідно відкласти в певному вибраному масштабі швидкостей.

3. РОЗГЛЯНЕМО ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ЛАНКИ 2

3.1. Визначимо швидкість \vec{v}_B точки B . Оскільки швидкість \vec{v}_A відома та точка A , крім ланки 1 , належить і ланці 2 , що виконує плоскопаралельний рух, то, обираючи точку A за полюс, за формулою (15.3) або за *теоремою про швидкості точок при плоскопаралельному русі тіла* (див. §15.3) записуємо швидкість точки B , яка також належить ланці 2 ,

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}, \quad (123.1)$$

де \vec{v}_{AB} – вектор обертальної швидкості точки B в обертальному русі ланки 2 навколо обраного полюса A .

За формулою (15.4) модуль цієї обертальної швидкості

$$v_{AB} = BA \cdot \omega_2, \quad (123.2)$$

де BA – радіус обертання точки B в обертальному русі ланки 2 навколо полюса A , ω_2 – кутова швидкість ланки 2 ; сам же вектор \vec{v}_{AB} згідно з формулою (15.5) перпендикулярний до відрізка BA ($\vec{v}_{AB} \perp BA$) і напрямлений за напрямком кутової швидкості ω_2 .

Оскільки кутова швидкість ω_2 поки що невідома, то і скористатися формулами (123.2) та (123.1) поки що можливості немає.

Подальше дослідження плоскопаралельного руху ланки 2 можна виконати **декількома способами**. Розглянемо два з них.

1-й спосіб – **метод проєкцій**.

Проведімо через точку A ортогональні координатні осі Ax й Ay так, щоб, наприклад, вісь Ax проходила через точку B .

Зауваження № 123.2. Указаний напрямок координатних осей суттєво спрощує процес розв'язування будь-якої задачі, пов'язаної з дослідженням плоскопаралельного руху того чи іншого тіла; тому в усіх таких задачах координатні осі варто обирати і проводити аналогічно.

Спроектуювавши обидві частини рівності (123.1) на осі Ax й Ay , дістанемо

$$v_{Bx} = v_{Ax} + v_{ABx}, \quad (123.3)$$

$$v_{By} = v_{Ay} + v_{ABy}, \quad (123.4)$$

де v_{Ax} , v_{Bx} , v_{ABx} , v_{Ay} , v_{By} та v_{ABy} – проєкції на осі Ax та Ay векторів швидкостей \vec{v}_A , \vec{v}_B та \vec{v}_{AB} відповідно.

Зауваження № 123.3. Формули (123.3) і (123.4), зовнішній вигляд яких є незмінним для будь-якої задачі та не залежить ні від розташування точки A , ні від напрямку введених координатних осей, ні від напрямків вказаних векторів, несуть лише певну початкову інформацію, необхідну для розв'язування задачі. При набутті певного досвіду можна (і навіть необхідно), не записуючи цих рівнянь, одразу складати рівняння, що визначають вказані проєкції для конкретного розглядуваного випадку⁵; у цій задачі – див. далі рівняння (123.5) та (123.6).

Оскільки вектор \vec{v}_A лежить на прямій (a) , котра утворює з віссю Ax кут 60° (див. рис. 123z.3 або 123z.2), то з урахуванням напрямків вектора \vec{v}_A та осей Ax і Ay зрозуміло, що

$$v_{Ax} = +v_A \cdot \cos 60^\circ \quad \text{і} \quad v_{Ay} = +v_A \cdot \sin 60^\circ.$$

За потреби (а така виникає при розв'язуванні досить багатьох задач) можна знайти числові значення цих проєкцій:

$$v_{Ax} = v_A \cdot \cos 60^\circ = 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 1,5 \cdot \sqrt{3} \approx 2,598 \left(\frac{\text{м}}{\text{сек}} \right),$$

$$v_{Ay} = v_A \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4,5 \left(\frac{\text{м}}{\text{сек}} \right).$$

⁵ Так, як це роблять, наприклад, при складанні рівнянь рівноваги в статисти.

Отримані тут проекції можна зобразити на розрахунковій схемі. Для цього з кінця вектора \vec{v}_A необхідно опустити перпендикуляри на осі Ax та Ay ; відповідні відрізки осей і є графічними зображеннями проекцій v_{Ax} та v_{Ay} (див. рис. 123z.3); при розв'язуванні багатьох задач цього робити взагалі не потрібно.

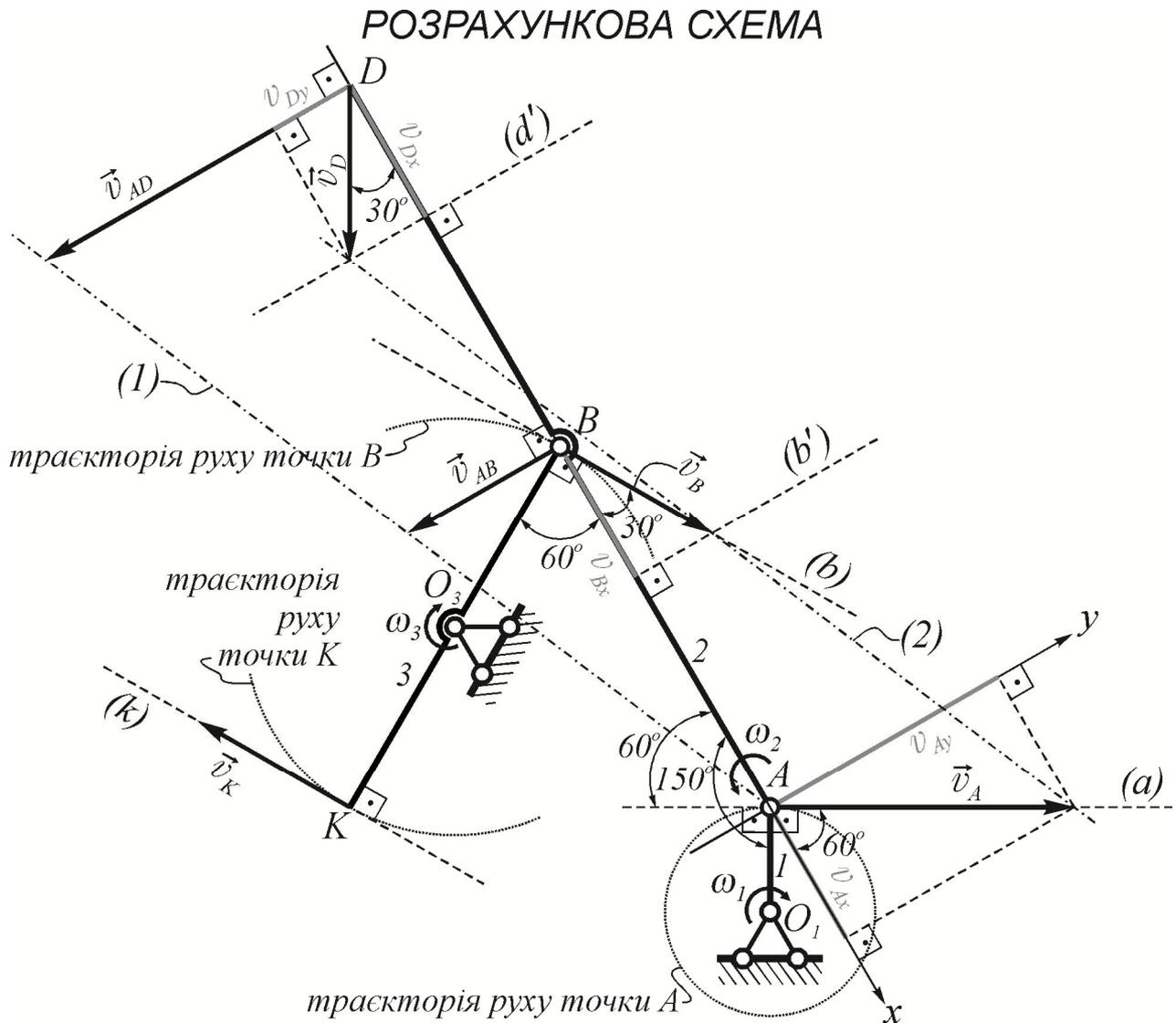


Рис. 123z.3. До розв'язування задачі методом проекцій

Через те що вектор \vec{v}_{AB} перпендикулярний до відрізка BA , уздовж якого проходить вісь Ax , то:

- вектор \vec{v}_{AB} на вісь Ax не проектується (або його проекція на цю вісь дорівнює нулеві): $v_{ABx} = 0$;
- вектор \vec{v}_{AB} колінеарний осі Ay та, отже, проектується на цю вісь у дійсну (натуральну) величину; оскільки ж напрямок век-

тора \vec{v}_{AB} поки що невідомий, то і знак проекції v_{AB_y} також поки що є невизначеним, але безумовно

$$v_{AB_y} = \pm v_{AB}, \quad (*)$$

а необхідний знак чи, що те саме, напрямок вектора \vec{v}_{AB} з'ясуємо в подальших міркуваннях.

Оскільки вектор \vec{v}_B лежить на прямій (b), яка утворює з віссю Ax кут 30° (див. рис. 123z.3 або 123z.2), але напрямок \vec{v}_B поки що невідомий, то проекції v_{B_x} та v_{B_y} (так само як і v_{AB_y} вище) можна записати лише з точністю до їх знаків:

$$v_{B_x} = \pm v_B \cdot \cos 30^\circ, \quad (**)$$

$$v_{B_y} = \pm v_B \cdot \sin 30^\circ. \quad (***)$$

Підставивши всі вказані та визначені тим чи іншим чином проекції у формули (123.3) й (123.4), отримаємо

$$\pm v_B \cdot \cos 30^\circ = v_A \cdot \cos 60^\circ + 0, \quad (123.5)$$

$$\pm v_B \cdot \sin 30^\circ = v_A \cdot \sin 60^\circ \pm v_{AB}. \quad (123.6)$$

Виконавши додавання в правій частині рівняння (123.5), дістанемо рівність

$$\pm v_B \cdot \cos 30^\circ = v_A \cdot \cos 60^\circ,$$

яка, оскільки права частина її додатна, виконується лише за умови додатного знака лівої частини, тобто

$$+ v_B \cdot \cos 30^\circ = v_A \cdot \cos 60^\circ,$$

звідки модуль швидкості точки B

$$v_B = \frac{v_A \cdot \cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3} \cdot 2} = 3 \left(\frac{м}{сек} \right).$$

З'ясований у рівності (123.5) знак «плюс» її лівої частини, яка визначає проекцію v_{B_x} вектора \vec{v}_B на вісь Ax , означає, що напрямок вектора \vec{v}_B збігається з додатним напрямком осі Ax , через що формула (**) набуває однозначного вигляду

$$v_{B_x} = +v_B \cdot \cos 30^\circ.$$

За потреби (а така виникає при розв'язуванні досить багатьох задач) можна знайти числове значення цієї проекції

$$v_{Bx} = v_B \cdot \cos 30^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,5 \cdot \sqrt{3} \approx 2,598 \left(\frac{м}{сек} \right).$$

Порівнюючи знайдені значення проєкцій v_{Bx} і v_{Ax} , бачимо, що

$$v_{Bx} = v_{Ax}.$$

Зауваження № 123.4. Остання отримана рівність повністю відповідає змісту **наслідку 1** з теорема про швидкості точок при плоскопаралельному русі тіла (див. у § 15.3 с. 24); тобто можна було б одразу після визначення v_{Ax} без будь-яких додаткових формул і міркувань записати, що відповідно до **наслідку 1** зі вказаної теореми

$$v_{Bx} = v_{Dx} = v_{Ax}.$$

Відкладаємо від точки B знайдену проєкцію v_{Bx} ⁶, після чого через відповідний кінець проєкції v_{Bx} проводимо під прямим кутом до осі Ax пряму (b') до її перетину з прямою (b); знайдена в такий спосіб точка їх перетину і визначає кінець вектора \vec{v}_B , який зображуємо на розрахунковій схемі (див. рис. 123z.3).

Якби за умовою задачі необхідно було б знайти тільки швидкість \vec{v}_B , то розв'язування можна було б закінчувати в цьому місці.

Зображений вектор \vec{v}_B свідчить, що його напрямок збігається з напрямком осі Ay ; це дозволяє позбутися невизначеності у формулі (***) , в якій необхідно обрати знак «плюс», тобто

$$v_{By} = +v_B \cdot \sin 30^\circ,$$

звідки числове значення проєкції

$$v_{By} = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1,5 \left(\frac{м}{сек} \right).$$

З урахуванням установлених значень рівність (123.6) набуває вигляду

$$v_B \cdot \sin 30^\circ = v_A \cdot \sin 60^\circ \pm v_{AB}, \quad (123.6)^*$$

звідки, підставляючи знайдені раніше числові значення, матимемо

$$1,5 = 4,5 \pm v_{AB}.$$

⁶ Зауважимо, що значення проєкцій v_{Ax} та v_{Bx} збігаються як за величиною, так і за знаком.

Зауваження № 123.5. Для спрощення подальшого аналізу (в цій задачі та в усіх аналогічних) *завжди* необхідно розв'язувати отримане рівняння, обов'язково лишаючи невизначений доданок (у цьому разі $\pm v_{AB}$) в тій частині рівняння, в якій він виявився при безпосередньому проектуванні.

Виконавши очевидні арифметичні перетворення та обчислення, дістанемо

$$1,5 - 4,5 = \pm v_{AB} \quad \text{та} \quad -3 = \pm v_{AB}.$$

Оскільки ліва частина отриманої рівності *від'ємна*, то для її виконання в правій частині також необхідно обрати знак «мінус»:

$$-3 = -v_{AB},$$

звідки модуль обертальної швидкості точки B в обертальному русі ланки 2 навколо полюса A

$$v_{AB} = 3 \frac{M}{\text{сек}}.$$

З'ясований у правій частині рівності (123.6)* знак «мінус» доданка v_{AB} , який визначає проекцію v_{ABy} вектора \vec{v}_{AB} на вісь Ay , означає, що напрямком вектора \vec{v}_{AB} не збігається з додатним напрямком осі Ay . Зображуємо відповідно вектор \vec{v}_{AB} на розрахунковій схемі (див. рис. 123z.3).

❏ Зауважимо, що модулі v_B та v_{AB} виявилися однаковими; хоча й розглядається спосіб розв'язування задачі методом проекцій, але все одно на схемі вектори \vec{v}_B та \vec{v}_{AB} варто зображувати променями однакової довжини (хоча й не обов'язково).

2-й спосіб – **графоаналітичний**.

На підставі векторної рівності (123.1)

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB},$$

яка з точки зору векторної алгебри є *векторною сумою*, побудуємо *графічне зображення* відповідного векторного трикутника.

❏ Отримане в результаті побудови графічне зображення називається **трикутником швидкостей**, логіка та правила побудови якого абсолютно тотожні до логіки та правил побудови *силового трикутника* – див. відповідні положення статистики.

Оскільки векторна сума (123.1) визначає швидкість точки B , то від цієї точки на розрахунковій схемі на рисунку 123z.4:

- відкладаємо вектор \vec{v}_A ;

- далі відповідно до формули (123.1) від кінця вектора \vec{v}_A необхідно відкласти вектор \vec{v}_{AB} , модуль v_{AB} якого знайти неможливо через відсутність значення ω_2 , але відомо, що $\vec{v}_{AB} \perp BA$; тоді через кінець вектора \vec{v}_A перпендикулярно до відрізка BA проводимо пряму (b') ; очевидно, що вектор \vec{v}_{AB} , початок якого визначається кінцем вектора \vec{v}_A , лежить на прямій (b') ;
- оскільки, як з'ясовано ще в пункті 1 розв'язуваної задачі, вектор \vec{v}_B знаходиться на дотичній (b) , то точка перетину прямих (b) та (b') і визначає кінці векторів \vec{v}_{AB} на прямій (b') та \vec{v}_B на прямій (b) ; зображуємо ці вектори.

РОЗРАХУНКОВА СХЕМА

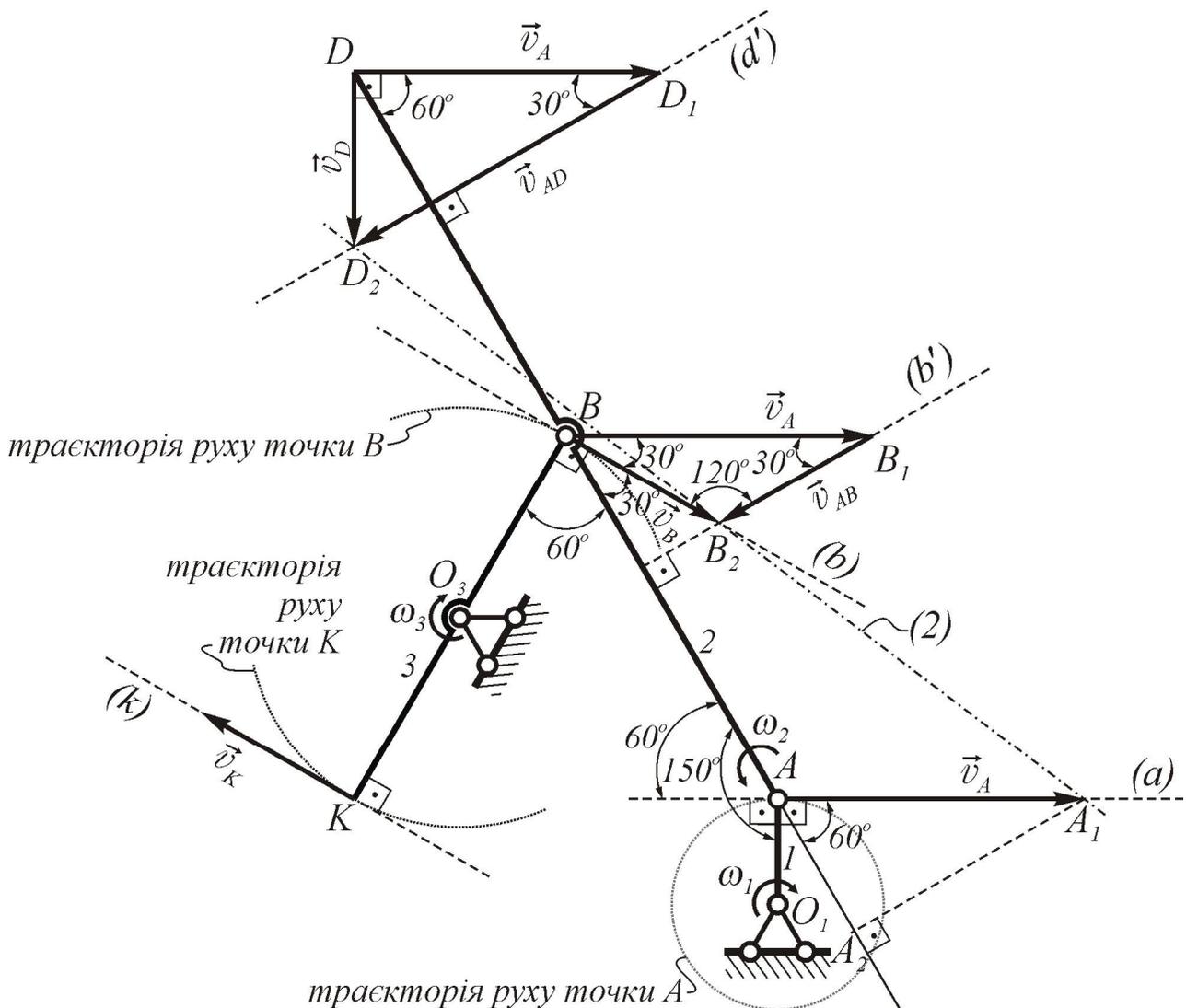


Рис. 123z.4. До графоаналітичного способу розв'язування

Зауваження № 123.6. По обходу контура трикутника швидкостей вектори \vec{v}_A та \vec{v}_{AB} розташовані в одному напрямку, який визначився напрямком відомого вектора \vec{v}_A , а вектор \vec{v}_B – у протилежному.

Зауваження № 123.7. У трикутнику швидкостей дійсні напрямки обертальної швидкості \vec{v}_{AB} точки B в обертальному русі ланки 2 навколо полюса A та швидкості \vec{v}_B точки B виявилися визначеними одразу без будь-яких додаткових міркувань.

Зауваження № 123.8. Важливо розуміти, що трикутник швидкостей є векторною (геометричною) схемою, при побудові якої ніякого перенесення векторів швидкостей не здійснюється, а будується *трикутник* із променів, рівних дійсним розглядуваним векторам швидкостей, *котрий* відповідає векторній сумі (123.1); тобто не слід зазначену дію сприймати так, що начебто вектори швидкостей \vec{v}_A та \vec{v}_{AB} змінили точки свого прикладання; у розв'язуваній задачі безумовно вектор \vec{v}_A прикладений у точці A , а вектор \vec{v}_{AB} – у точці B (як це зображено на рис. 123z.3).

Після **графічної** побудови необхідно **аналітично** розв'язати задачу⁷ про знаходження відповідних сторін трикутника швидкостей, який на рисунку 123z.4 умовно позначимо BB_1B_2 (зазначену задачу можна розв'язувати, використовуючи будь-які необхідні для цього поняття елементарної геометрії).

Аналізуємо та визначаємо відповідні кути трикутника BB_1B_2 :

- оскільки кут між вектором \vec{v}_A та *прямою*, що проходить через точки A і B , дорівнює 60° , а кут між вектором \vec{v}_B та тією ж *прямою* – 30° , то $\angle B_1BB_2 = 30^\circ$;
- оскільки з прямокутного трикутника AA_1A_2 очевидно, що $\angle AA_1A_2 = 30^\circ$, то в трикутнику BB_1B_2 відповідний кут також дорівнює 30° :

$$\angle BB_1B_2 = 30^\circ;$$

- оскільки в трикутнику BB_1B_2 два його кути виявилися однаковими, то він є рівнобедреним та $BB_2 = B_1B_2$; якщо врахувати, що довжини сторін трикутника швидкостей визначають модулі відповідних швидкостей, то

⁷ Звідси й походить назва розглядуваного способу – **графоаналітичний**.

$$v_B = v_{AB};$$

- оскільки сума трьох кутів будь-якого трикутника дорівнює 180° , то в трикутнику швидкостей

$$\angle BB_2B_1 = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ.$$

Розв'яжімо трикутник швидкостей за теоремою синусів⁸, відповідно до якої (див. будь-який довідник з елементарної тригонометрії)

$$\frac{v_A}{\sin 120^\circ} = \frac{v_B}{\sin 30^\circ} = \frac{v_{AB}}{\sin 30^\circ}.$$

Оскільки $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, а $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (див.

будь-який довідник з елементарної геометрії), то $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, з урахуванням чого останнє рівняння набуває вигляду

$$\frac{v_A}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{v_B}{\frac{1}{2}} = \frac{v_{AB}}{\frac{1}{2}} \quad \text{або} \quad \frac{v_A}{\sqrt{3}} = \frac{v_B}{1} = \frac{v_{AB}}{1},$$

звідки

$$v_B = v_{AB} = \frac{v_A}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3 \left(\frac{м}{сек} \right).$$

Результати, отримані методом проекцій та графоаналітичним способом, повністю збігаються, що, безсумнівно, і має бути.

3.2. Визначимо кутову швидкість ω_2 ланки 2. З формули (123.2)

$$\omega_2 = \frac{v_{AB}}{BA} = \frac{3}{2} = 1,5 \left(\frac{рад}{сек} \right).$$

Зображуємо на розрахунковій схемі навколо полюса A дугову стрілку, яка визначає кутову швидкість ω_2 ланки 2 у розглядуваному положенні механізму; напрямом цієї дугової стрілки встановлюємо за напрямком *обертальної швидкості \vec{v}_{AB} точки B в обертальному русі ланки 2 навколо полюса A – проти руху годинникової стрілки* (див. рис. 123z.3 та 123z.4).

⁸ Звісно, що можна було б застосувати й будь-який інший допустимий спосіб розв'язування.

Зауваження № 123.9. За роки викладання автор зіткнувся з незрозумілими для нього труднощами та сумнівами, які у цій та аналогічних задачах виникають у деяких студентів при встановленні напрямку обертання розглядуваної ланки за знайденим напрямком обертальної швидкості певної точки навколо іншої точки, обраної за полюс. Тому на прикладі розв'язуваної задачі більш широко розглянемо ті прості міркування, які мають зняти всі означені труднощі та сумніви. По-перше, необхідно твердо пам'ятати та розуміти, що

❶ складний плоскопаралельний рух ланки 2 у розглядуваному її положенні можна розкласти та сприймати його як суму двох простих рухів: поступального руху разом з обраною за полюс точкою A й обертального руху навколо цього полюса A (див. рис. 123z.5).

По-друге, аналізуючи кінематику ланки 2, необхідно зосереджувати увагу тільки на її русі, ніяк не розглядаючи рухи інших ланок і в'язі, що обмежують та визначають ці рухи. По-третє, процес встановлення напрямку обертання ланки 2 у розглядуваному положенні механізму абсолютно тотожний до визначення напрямку обертання цієї ланки за напрямком обертальної швидкості \vec{v}_{AB} точки B навколо полюса A за уявної умови, що полюс A не рухається (див. відповідне зображення уявної шарнірно-нерухомої опори на рис. 123z.5).

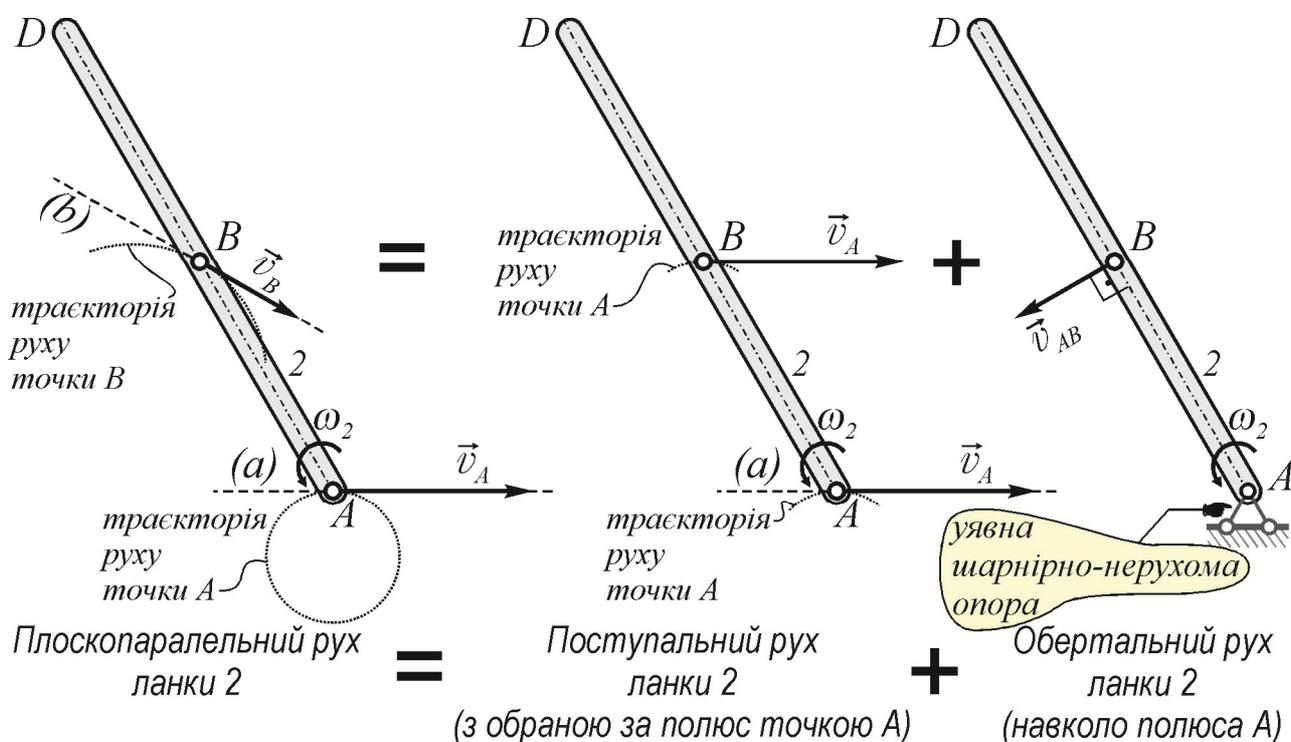


Рис. 123z.5. Розкладання плоскопаралельного руху ланки 2

3.3. Визначимо швидкість \vec{v}_D точки D . Оскільки точка D належить ланці 2, то, обираючи точку A за полюс (хоча можна було б за полюс взяти і точку B , адже її швидкість уже відома), відповідно до формули (15.3) отримуємо, що

$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{v}_{AD}, \quad (123.7)$$

де \vec{v}_{AD} – вектор обертальної швидкості точки D в обертальному русі ланки 2 навколо полюса A ; її модуль згідно з формулою (15.4)

$$v_{AD} = DA \cdot \omega_2 = (DB + BA) \cdot \omega_2 = (2 + 2) \cdot 1,5 = 4 \cdot 1,5 = 6 \left(\frac{m}{сек} \right),$$

де DA – радіус обертання точки D навколо полюса A .

Зображуємо на розрахунковій схемі від точки D вектор \vec{v}_{AD} , спрямовуючи його перпендикулярно до відрізка DA ($\vec{v}_{AD} \perp DA$) за напрямком кутової швидкості ω_2 (див. рис. 123z.3).

На розрахунковій схемі також зображено пряму (1), яка свідчить, що модулі v_{AB} і v_{AD} пропорційні віддалям BA та DA від цих точок до полюса A (на підставі того, що $v_{AB} = BA \cdot \omega_2$ і $v_{AD} = DA \cdot \omega_2$).

Значення швидкості \vec{v}_D знайдемо **двома способами**.

1-й спосіб – **метод проєкцій**. Оскільки вісь Ax системи координат Axy , уведеної в підпункті 3.1 задачі, проходить через точку D , то необхідності застосовувати нову (іншу) систему відліку немає. Урахуємо, що, як також з'ясовано раніше, відповідно до **наслідку 1 з теореми про швидкості точок при плоскопаралельному русі тіла** (див. у § 15.3 с. 24)

$$v_{Dx} = v_{Ax} = v_{Bx};$$

тоді відкладаємо від точки D визначену проєкцію v_{Dx} , врахувавши, що значення її збігається з проєкціями v_{Ax} та v_{Bx} і за величиною, і за знаком; через відповідний кінець проєкції v_{Dx} проводимо під прямим кутом до осі Ax пряму (d') (див. рис. 123z.3); очевидно, що кінець вектора \vec{v}_D знаходиться на прямій (d').

Зауваження № 123.10. Якщо відкласти всі знайдені значення швидкостей з дотриманням масштабу швидкостей, то положення кінця вектора \vec{v}_D на прямій (d') можна **визначити графічно**, ви-

користавши **наслідок 2** з теорему про швидкості точок при плоскопаралельному русі тіла (див. у § 15.3 с. 25): оскільки точки A , B і D ланки 2 належать відрізку AD , то кінці векторів швидкостей \vec{v}_A , \vec{v}_B і \vec{v}_D обов'язково знаходяться на одній прямій; тоді проводимо через кінці векторів \vec{v}_A та \vec{v}_B пряму, наприклад, (2) до її перетину з прямою (d'); зазначена точка перетину й визначає кінець вектора \vec{v}_D , який і зображуємо на розрахунковій схемі (див. рис. 123z.3).

Усвідомивши викладене вище, розуміємо, що достатньо спроектувати обидві частини рівняння (123.7) тільки на вісь Ay ; при проектуванні врахуємо, що вектори \vec{v}_A та \vec{v}_{AD} на розрахунковій схемі визначені повністю й однозначно (тобто ніяких проблем або невизначеностей, пов'язаних із проектуванням цих векторів, немає); отже,

$$v_{Dy} = v_A \cdot \sin 60^\circ - v_{AD},$$

де v_{Dy} – проекція на вісь Ay вектора \vec{v}_D , алгебраїчне значення якої

$$v_{Dy} = v_A \cdot \sin 60^\circ - v_{AD} = 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 = 4,5 - 6 = -1,5 \left(\frac{м}{сек} \right).$$

Отриманий знак «мінус» свідчить, що напрямок вектора \vec{v}_D не збігається з додатним напрямком осі y .

Тоді відповідно до формул (11.7) та (11.9) [1] в розглядуваному положенні механізму вектор \vec{v}_D швидкості точки D

$$\vec{v}_D = \vec{i} \cdot v_{Dx} + \vec{j} \cdot v_{Dy} = 2,598\vec{i} - 1,5\vec{j},$$

а його модуль

$$\begin{aligned} v_D &= \sqrt{(v_{Dx})^2 + (v_{Dy})^2} = \sqrt{(1,5 \cdot \sqrt{3})^2 + (-1,5)^2} = \sqrt{1,5^2 \cdot (\sqrt{3})^2 + 1,5^2} = \\ &= \sqrt{1,5^2 \cdot 3 + 1,5^2} = \sqrt{1,5^2 \cdot (3 + 1)} = \sqrt{1,5^2 \cdot 4} = \\ &= \sqrt{1,5^2 \cdot 2^2} = \sqrt{(1,5 \cdot 2)^2} = \sqrt{3^2} = 3 \left(\frac{м}{сек} \right). \end{aligned}$$

Зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 123z.3 проекцію v_{Dy} (цього можна і не робити, адже вектор \vec{v}_D вище вже визначений графічно, але в будь-якому разі зображення вектора \vec{v}_D має відповідати його обчисленим проекціям v_{Dx} та v_{Dy}).

Зауваження № 123.11. Усі зазначені в попередньому абзаці елементи розрахункової схеми відповідатимуть реальній дійсності тільки у випадку зображення їх з дотриманням масштабів – лінійного масштабу (для схеми механізму) та масштабу швидкостей (для відповідних кінематичних характеристик точок).

У разі потреби положення вектора \vec{v}_D аналітично можна встановити за допомогою напрямних косинусів: наприклад, відповідно до

формули (11.10) [1] $\cos\left(\vec{i}; \hat{\vec{v}}_D\right) = \frac{v_{Dx}}{v_D} = \frac{1,5 \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; оскільки ж

$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ$, то вектор \vec{v}_D утворює кут 30° з віссю x (див. рис. 123z.3).

2-й спосіб – **графоаналітичний**. Побудуємо трикутник швидкостей, що відповідає векторній сумі (123.7)

$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{v}_{AD}.$$

На розрахунковій схемі (див. рис. 123z.4):

- від точки D відкладаємо вектор \vec{v}_A , позначивши його кінець як D_1 ;
- від точки D_1 відкладаємо вектор \vec{v}_{AD} , враховуючи що $\vec{v}_{AD} \perp DA$ та обираючи напрямом \vec{v}_{AD} за напрямком кутової швидкості ω_2 ; кінець вектора \vec{v}_{AD} позначаємо як D_2 (з нескладного аналізу зрозуміло, що $\angle DD_1D_2 = 30^\circ$);
- відповідно до **наслідку 2** з *теорема про швидкості точок при плоскопаралельному русі тіла* (див. у § 15.3 с. 25) кінці векторів \vec{v}_A , \vec{v}_B і \vec{v}_D швидкостей точок A , B і D ланки 2, які належать відрізку AD , мають знаходитися на одній прямій; тоді, якщо провести через кінці векторів \vec{v}_A та \vec{v}_B пряму (2) до її перетину з прямою (d'), то ця точка перетину й буде визначати кінець вектора \vec{v}_D , який і зображуємо на розрахунковій схемі, направляючи його з точки D у точку D_2 .

Зауваження № 123.12. По обходу контура трикутника швидкостей вектори \vec{v}_A та \vec{v}_{AD} розташовані в одному напрямку, який визначився напрямком відомого вектора \vec{v}_A , а \vec{v}_D – у протилежному.

Розглянемо збудований трикутник DD_1D_2 швидкостей: оскільки відомі дві сторони DD_1 і D_1D_2 цього трикутника та кут між ними, то за теоремою косинусів (див. будь-який довідник з елементарної тригонометрії)

$$\begin{aligned} DD_2^2 &= DD_1^2 + D_1D_2^2 - 2 \cdot DD_1 \cdot D_1D_2 \cdot \cos(\angle DD_1D_2) = \\ &= v_A^2 + v_{AD}^2 - 2 \cdot v_A \cdot v_{AD} \cdot \cos 30^\circ = (3\sqrt{3})^2 + 6^2 - 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= 3^2 \cdot \sqrt{3}^2 + 36 - 18 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 27 + 36 - 54 = 63 - 54 = 9. \end{aligned}$$

Тоді модуль швидкості точки D :

$$v_D = DD_2 = \sqrt{DD_2^2} = \sqrt{9} = 3 \left(\frac{м}{сек} \right).$$

Напрямок вектора \vec{v}_D визначимо, наприклад, кутом DD_1D_2 між векторами \vec{v}_A та \vec{v}_D : згідно з теоремою синусів

$$\frac{DD_2}{\sin(\angle DD_1D_2)} = \frac{D_1D_2}{\sin(\angle D_1DD_2)}$$

або

$$\frac{v_D}{\sin 30^\circ} = \frac{v_{AD}}{\sin(\angle D_1DD_2)},$$

звідки

$$\sin(\angle D_1DD_2) = \frac{v_{AD}}{v_D} \cdot \sin 30^\circ = \frac{6}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Через те що $\arcsin(1) = 90^\circ$, між векторами \vec{v}_D і \vec{v}_A кут 90° ; оскільки ж вектор \vec{v}_A напрямлений під кутом 60° до осі x , то з трикутника DD_1D_2 на рисунку 123z.4 видно, що вектор \vec{v}_D утворює кут 30° з віссю x .

Звісно, що значення, отримані обома способами розв'язування задачі (методом проєкцій і графоаналітичним), повністю збігаються.

4. РОЗГЛЯНЕМО ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ ЛАНКИ 3

4.1. Визначимо кутову швидкість ω_3 ланки 3. Оскільки точка B , крім ланки 2, належить і ланці 3, яка виконує обертальний рух навколо нерухомої осі, що проходить через нерухомих точку O_1 перпендикулярно до площини знаходження механізму, то за формулою (14.9)

$$v_B = BO_3 \cdot \omega_3,$$

звідки, маючи вже значення v_B , знаходимо

$$\omega_3 = \frac{v_B}{BO_3} = \frac{3}{1} = 3 \left(\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right).$$

Зображуємо на розрахунковій схемі навколо точки O_3 , через яку проходить нерухома вісь обертання ланки 3, дугову стрілку, котра визначає кутову швидкість ω_3 ланки 3 у розглядуваному положенні механізму; напрямок цієї дугової стрілки встановлюємо за напрямком вектора \vec{v}_B швидкості точки B – за рухом годинникової стрілки (див. рис. 123z.3 та 123z.4).

4.2. Визначимо швидкість \vec{v}_K точки K . Згідно з формулою (14.9)

$$v_K = KO_3 \cdot \omega_3 = 1 \cdot 3 = 3 \left(\frac{\text{м}}{\text{сек}} \right).$$

Напрямок вектора \vec{v}_K на дотичній (k) визначаємо та зображуємо на розрахунковій схемі відповідно до встановленого напрямку обертання ланки 3 (див. рис. 123z.3 та 123z.4).

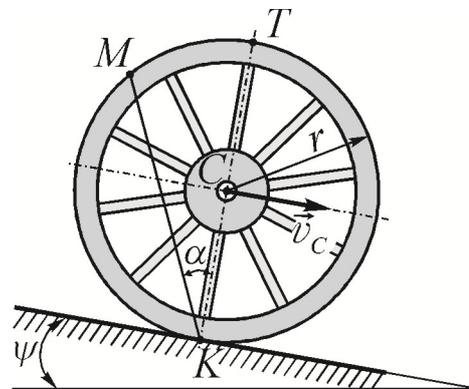
☛ Говорять, що вектор \vec{v}_K напрямлений за напрямком кутової швидкості ω_3 .

ЗАДАЧА № 124

Колесо радіусом $r = 45 \text{ см}$ котиться без ковзання вниз по похилій до горизонту під кутом $\psi = 10^\circ$ нерухомій прямолінійній ділянці шляху так, що центр C колеса рухається зі сталою швидкістю

$$v_C = 90 \frac{\text{см}}{\text{сек}} \quad (\text{рис. 124z.1}).$$

Установити швидкість довільної точки M обода колеса залежно від значення кута $MKT = \alpha$, де KT – діаметр колеса, що проходить через точку K дотику колеса до нерухомого шляху. Знайти швидкість \vec{v}_M при $\alpha = 60^\circ$.

**Рис. 124z.1****РОЗВ'ЯЗУВАННЯ****1. ПОПЕРЕДНІЙ КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ**

Колесо виконує особливий вид плоскопаралельного руху – кочення без ковзання по нерухомій площині, яка у заданій задачі похилена до горизонту під кутом ψ .

Оскільки точка C є центром колеса, яке, як і всі інші розглядувані у теоретичній механіці тіла, є абсолютно твердим тілом, то ця точка при коченні колеса не може ні наблизитися, ні віддалитися від площини, по якій відбувається кочення¹; через це траєкторія руху точки C – паралельна до площини кочення пряма, котру і зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 124z.3. У такому разі дотична (c) до траєкторії руху точки C повністю збігається з самою траєкторією, а вектор \vec{v}_C швидкості цієї точки, звичайно, розташований на цій дотичній (див. рис. 124z.3).

2. РОЗГЛЯНЕМО ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ КОЛЕСА

Визначимо швидкість \vec{v}_M точки M . Оскільки швидкість \vec{v}_C відома та точка C належить колесу, що виконує плоскопаралельний рух, то, обираючи її за полюс, за формулою (15.3) маємо, що

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \vec{v}_{CM}, \quad (124.1)$$

¹ Важливо розуміти, що зазначену властивість має центр кожного колеса (або будь-якого круглого тіла) при його коченні по будь-якій площині чи поверхні.

де \vec{v}_{CM} – вектор обертальної швидкості точки M в обертальному русі колеса навколо обраного полюса C , модуль якої згідно з формулою (15.4)

$$v_{CM} = MC \cdot \omega, \quad (124.2)$$

де MC – радіус обертання точки M в обертальному русі колеса навколо полюса C , ω – кутова швидкість колеса; сам же вектор \vec{v}_{CM} перпендикулярний до відрізка MC ($\vec{v}_{CM} \perp MC$) і напрямлений за напрямком кутової швидкості ω , яка поки що невідома.

Оскільки точка M – це точка обода колеса, то, безсумнівно,

$$MC = r = 45 \text{ см.}$$

Кутову швидкість ω знайдемо, дослідивши кінематику точки K колеса. Так само, як і для точки M за формулою (15.3)

$$\vec{v}_K = \vec{v}_C + \vec{v}_{CK}, \quad (124.3)$$

де \vec{v}_{CK} – вектор обертальної швидкості точки K в обертальному русі колеса навколо полюса C , модуль якої згідно з формулою (15.4)

$$v_{CK} = KC \cdot \omega, \quad (124.4)$$

де $MC = r$ – радіус обертання точки K в обертальному русі колеса навколо полюса C , а вектор \vec{v}_{CK} згідно з формулою (15.5) проходить перпендикулярно до відрізка KC ($\vec{v}_{CK} \perp KC$) і напрямлений за напрямком кутової швидкості ω .

Через те що за умовою задачі точка K колеса *не ковзає по нерухомому шляхові*, то у цьому положенні колеса швидкість

$$v_K = 0,$$

з урахуванням чого формула (124.3) приводить до рівності

$$0 = \vec{v}_C + \vec{v}_{CK},$$

виконання якої можливе лише за умови однакових значень модулів v_C і v_{CK} та протилежності векторів \vec{v}_C і \vec{v}_{CK} , тобто за умови

$$\vec{v}_{CK} = -\vec{v}_C.$$

На розрахунковій схемі на рисунку 124z.3: а) від точки K зображуємо вектори \vec{v}_C й \vec{v}_{CK} ; б) відповідно до напрямку вектора \vec{v}_{CK} зображуємо дугову стрілку, яка визначає напрямок обертання колеса у розглядуваному положенні, позначивши (підписавши) її літерою ω .

Зауваження № 124.1. Знову розглянемо більш ретельно питання, пов'язане зі встановленням напрямку обертання колеса за знайденим напрямком обертальної швидкості \vec{v}_{CK} точки K в обертальному русі колеса навколо полюса C (див. також **зауваження № 123.9** до задачі 123 на с. 48). Отже, пам'ятаючи, що плоскопаралельний рух (у цьому разі – кочення по нерухомій поверхні) колеса у розглядуваному його положенні можна розкласти та сприймати цей складний рух як суму двох простих рухів: поступального руху разом з обраною за полюс точкою C й обертального руху навколо цього полюса, напрямком обертання колеса встановлюємо за напрямком обертальної швидкості \vec{v}_{CK} точки K в обертальному русі колеса навколо полюса C , умовно вважаючи, що полюс C не рухається (див. відповідне зображення уявної шарнірно-нерухоми опори на рис. 124z.2).

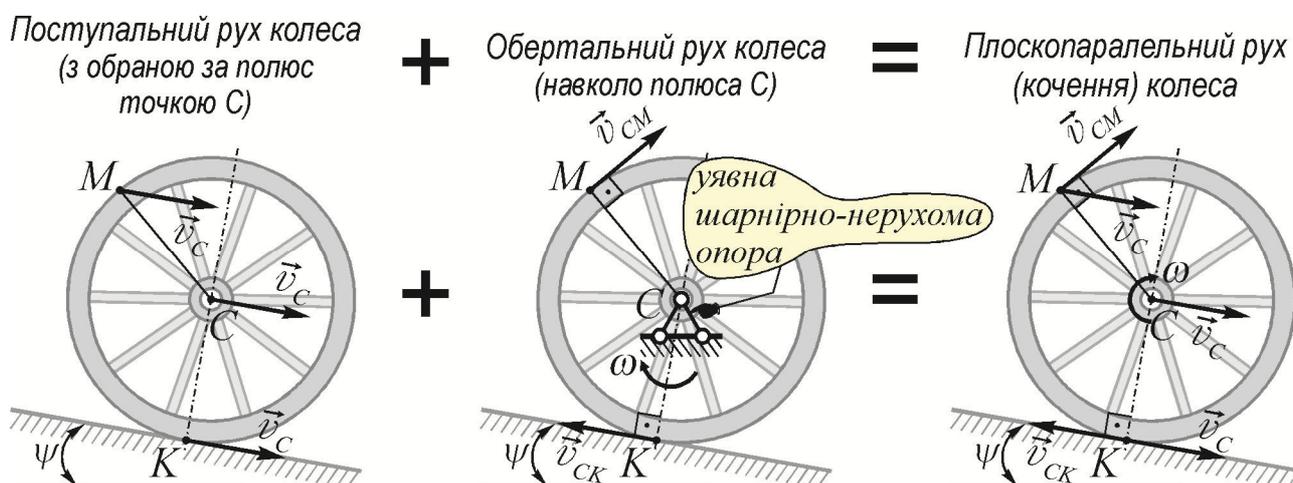


Рис. 124z.2. Розкладання плоскопаралельного руху колеса

Значення кутової швидкості встановлюємо з формули (124.4)

$$\omega = \frac{v_{CK}}{KC} = \frac{v_C}{r}.$$

Зауважимо, що, оскільки за умовою задачі $v_C = const$, то у такому разі й кутова швидкість колеса – стала величина, а саме:

$$\omega = \frac{v_C}{r} = \frac{90}{45} = 2 \left(\frac{рад}{сек} \right) = const.$$

У результаті за формулою (124.2) знаходимо, що

$$v_{CM} = MC \cdot \omega = r \cdot \frac{v_C}{r} = v_C.$$

Як відомо (див. відповідне місце підпункту **3.1** задачі 123) подальше розв'язування задачі, пов'язане з дослідженням кочення

колеса, можна виконати *декількома способами*. Застосуємо графоаналітичний спосіб розв'язування², для чого на підставі векторної рівності (124.1)

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \vec{v}_{CM},$$

яка з точки зору векторної алгебри є *векторною сумою*, побудуємо *графічне* зображення відповідного векторного паралелограма.

❶ Отримане в результаті побудови графічне зображення називається **паралелограмом швидкостей**, логіка та правила побудови якого абсолютно тотожні до логіки та правил побудови *паралелограма сил* – див. відповідні положення статистики.

Через те що векторна сума (124.1) визначає швидкість точки M , то *від цієї точки* на розрахунковій схемі на рисунку 124z.3:

- враховуючи знайдене значення $v_{CM} = v_C$, відкладаємо вектори \vec{v}_C і \vec{v}_{CM} , направляючи \vec{v}_{CM} перпендикулярно до відрізка MC за напрямком кутової швидкості ω (див. також рис. 124z.2);
- будуємо на векторах \vec{v}_C і \vec{v}_{CM} , як на сторонах, паралелограм;
- зображуємо вектор \vec{v}_M як діагональ збудованого паралелограма швидкостей.

❷ Оскільки у розглядуваній задачі паралелограм швидкостей має сторони однакової довжини, то у такому разі він, звісно, є *ромбом*.

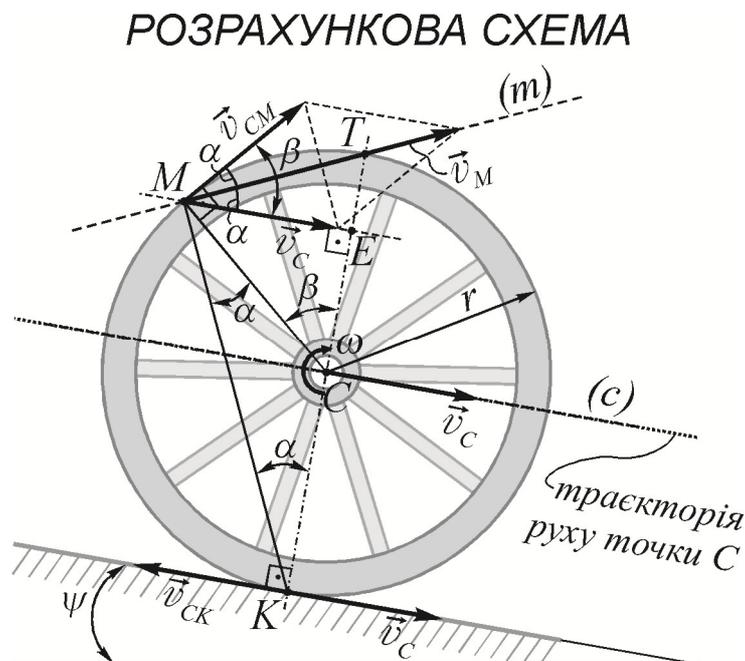


Рис. 124z.3

² Розв'язування цієї задачі методом проєкцій охочі можуть виконати самостійно.

Умовно прийнявши, що $\angle MCT = \beta$ (див. рис. 124z.3), виконаємо геометричний аналіз елементів розрахункової схеми³:

- оскільки $\vec{v}_{CM} \perp MC$, а $\vec{v}_C \perp TC$, то кут між векторами \vec{v}_{CM} і \vec{v}_C дорівнює куту між відрізками MC та TC ; отже, кут між векторами \vec{v}_{CM} і \vec{v}_C також дорівнює β ;
- оскільки $\angle MCT = \beta$ – це *центральний* кут, який спирається на дугу MT кола, що утворює обід розглядуваного колеса, а $\angle MKT = \alpha$ – *вписаний* кут, що спирається на ту ж дугу MT , то згідно з властивостями таких кутів

$$\beta = 2\alpha.$$

Відповідно до основних властивостей ромба його діагоналі є бісектрисами кутів і розташовані перпендикулярно одна до одної. Таким чином, у побудованому ромбі швидкостей *діагональ*, яка визначає вектор \vec{v}_M , ділить кут β між векторами \vec{v}_{CM} та \vec{v}_C навпіл, через що кути між векторами \vec{v}_{CM} і \vec{v}_M та між векторами \vec{v}_M і \vec{v}_C дорівнюють

$$\frac{\beta}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha.$$

Певна річ, що модуль (величину) швидкості руху точки M визначає довжина зазначеної *діагонали*; тоді

$$v_M = 2 \cdot (v_C \cdot \cos \alpha) = 2 \cdot v_C \cdot \cos \alpha. \quad (124.5)$$

Узявши до уваги, що за умовою задачі $v_C = \text{const}$, бачимо, що формула (124.5) містить сталий множник $2v_C$ і змінний множник $\cos \alpha$, який власне і визначає положення розглядуваної точки на ободі колеса. З рисунка 124z.3 неважко зрозуміти, що кут α змінюється у межах $[0; 90^\circ]$, що зумовлює відповідні зміни множника $\cos \alpha$ у межах $[1; 0]$ і значення v_M у межах $[2v_C; 0]$.

Оскільки значення $\alpha = 0$ визначає положення точки T , то порівняно зі швидкостями інших точок обода колеса швидкість цієї точки має найбільше значення

$$v_T = 2 \cdot v_C.$$

³ Зазначений аналіз можна здійснювати, використовуючи будь-які необхідні для цього положення елементарних геометрії та тригонометрії.

Значення ж $\alpha = 90^\circ$ визначає положення точки K дотику колеса до нерухомого шляху; тоді формула (124.5), природно, приводить до значення

$$v_K = 0.$$

Продовживши геометричний аналіз елементів розрахункової схеми, уточнимо положення вектора \vec{v}_M (або, що те саме, уточнимо положення відповідної діагоналі ромба швидкостей):

- умовно позначимо точку перетину діаметра KT з прямою, на якій знаходиться відкладений від точки M вектор \vec{v}_C , як E (див. рис. 124z.3);
- з прямокутного трикутника TEM , урахувавши, що сума трьох кутів будь-якого трикутника дорівнює 180° , знаходимо, що $\angle MTE = 180^\circ - \angle MET - \angle EMT = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$;
- тоді з трикутника KTM маємо, що $\angle KMT = 180^\circ - \angle MKT - \angle MTD = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ$;
- оскільки *вписаний* кут KMT виявився прямим, то згідно з властивостями таких кутів він обов'язково має *спиратися на діаметр* кола, що утворює обід розглядуваного колеса.

Отже, вектор \vec{v}_M швидкості руху точки M обода колеса проходить через верхню точку T діаметра KT цього колеса, де K – точка дотику його до нерухомої поверхні.

Оскільки ж за умовою задачі M – це довільна точка обода, то отримані результати дозволяють сформулювати важливий **ВИСНОВОК**:

① **вектор \vec{v} швидкості будь-якої точки обода** колеса, що котиться без ковзання по нерухомій поверхні, у кожному положенні колеса **утворює прямий кут** із відрізком, який сполучає цю точку з *точкою дотику* колеса до нерухомої поверхні, та лежить на прямій, котра **проходить через** цю точку й **верхню точку T діаметра**, що проходить через зазначену *точку дотику* колеса до нерухомої поверхні.

На рисунку 124z.4 зображено довільні точки A , B та D обода колеса (положення яких визначають відповідні кути α_A , α_B і α_D) та вектори \vec{v}_A , \vec{v}_B і \vec{v}_D швидкостей цих точок. Указані вектори відповідно утворюють прямі кути з відрізками AK , BK та DK і лежать на відрізках AT , BT та DT . Вектори \vec{v}_A , \vec{v}_B і \vec{v}_D зображені

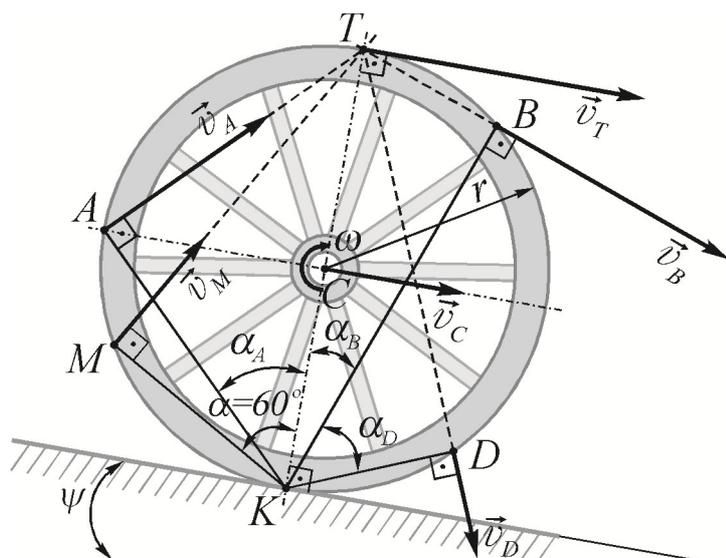


Рис. 124z.4

з урахуванням того, що згідно з формулою (124.5) їх модулі v_A , v_B та v_D пропорційні значенням $\cos \alpha_A$, $\cos \alpha_B$ і $\cos \alpha_D$ ⁴.

Також на цьому рисунку зображені вектори швидкостей точок T та M обода (положення останньої точки визначає заданий в умові задачі кут $\alpha = 60^\circ$). Певна річ, вектор $\vec{v}_T \perp TK$, а вектор $\vec{v}_M \perp MK$ і лежить на від-

різку MT . За формулою (124.5) при $\alpha = 60^\circ$ модуль

$$v_M = 2 \cdot v_C \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot v_C \cdot \frac{1}{2} = v_C = 90 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right).$$

Загостримо увагу на тому, що всі встановлені значення та висновки виявилися ніяк не залежними від кута ψ нахилу до горизонту прямолінійного шляху, по якому котиться розглядуване колесо. Тобто

❶ у кожному випадку кочення того чи іншого колеса (круга) по будь-як розташованій нерухомій поверхні розподіл швидкостей точок обода цього колеса (круга) буде аналогічним до отриманого у цій задачі.

❷ Розв'язування розглянутої задачі міститься на майже шести сторінках. Надалі будуть викладені та розглянуті методи, які дозволяють розв'язувати цю й аналогічні задачі суттєво простіше і швидше (див., наприклад, далі задачу 135).

⁴ Неважко довести, що швидкості v_A , v_B і v_D точок A , B та D (і швидкості всіх інших точок обода колеса) пропорційні віддалям від цих точок до точки K дотику колеса нерухомої поверхні. За бажання можна самостійно довести вказану властивість; у разі відсутності бажання, часу чи вміння – див. далі задачу 135.

ЗАДАЧА № 125

Циліндрична втулка 1 багатоланкового механізму ковзає праворуч по нерухомій горизонтальній циліндричній **штанзі AE** зі швидкістю $v_1 = 15 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$. Для зображеного на рисунку 125z.1 положення механізму знайти швидкості точок B , D і C та кутові швидкості ланок 2 і 3, якщо $BD = 24 \text{ см}$, $BC = CD$, $O_3D = 10 \text{ см}$ та в цю мить $\sin \alpha = \cos \beta = 0,6$. Розв'язуючи задачу, при дослідженні плоскопаралельного руху застосовувати теорему про швидкості точок тіла при плоскопаралельному русі й *метод проєкцій*.

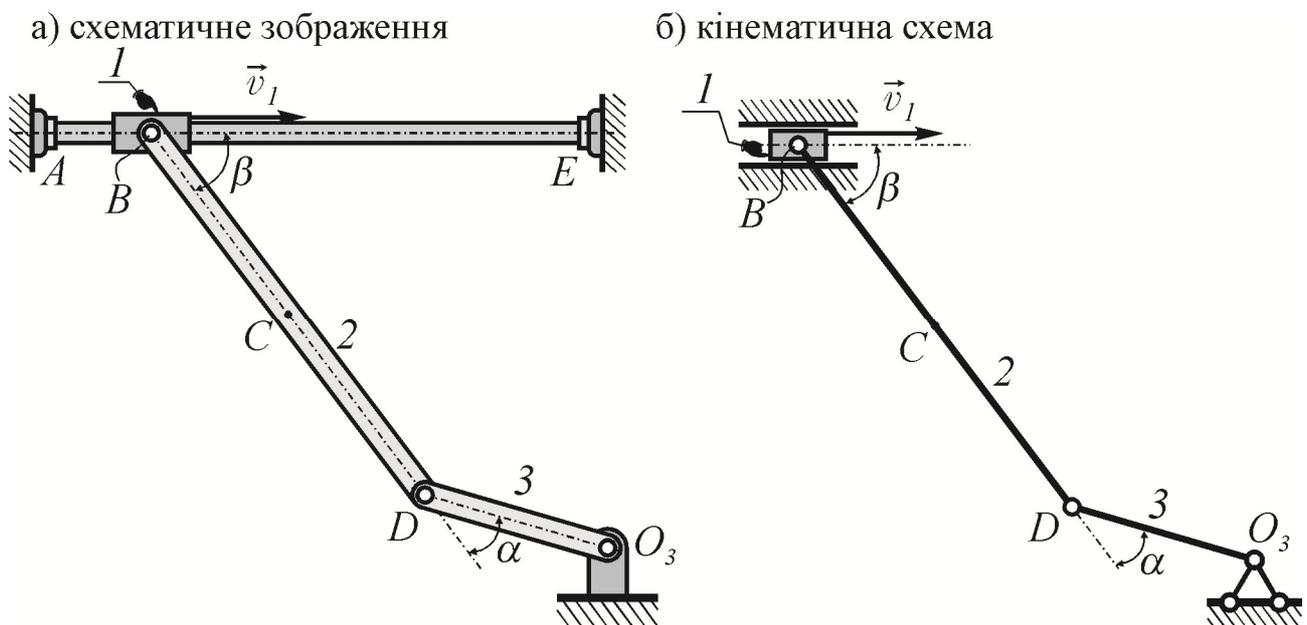


Рис. 125z.1. Багатоланковий механізм

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Пропонується розв'язати задачу самостійно та звірити власний розв'язок із наведеним.

1. ПОПЕРЕДНІЙ КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМУ

Зі схематичного зображення механізму видно, що він складається з трьох ланок. Ланка 1 (циліндрична втулка) рухається *поступально прямолінійно* по штанзі AE , яка з точки зору теоретичної механіки є в'яззю, що обмежує та визначає рух втулки. Ланка 3 (кривошип O_3D), рух якої обмежено шарнірно-нерухомою опорою O_3 , виконує *обертальний* рух навколо нерухомої осі, що про-

ходить через точку O_3 перпендикулярно до площини знаходження механізму. Ланка 2 (шатун BD) виконує *плоскопаралельний* рух¹.

Зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 125z.2:

- 1) траєкторію руху точки B – *пряму*, що збігається з поздовжньою віссю штанги AE ;
- 2) траєкторію руху точки D – коло радіуса $R_D = DO_3$ з центром у точці O_3 ;
- 3) дотичну (b), яка повністю збігається з траєкторію руху точки B , і дотичну (d), що утворює прямий кут з радіусом DO_3 .

Оскільки точка C належить *тільки* ланці 2, яка виконує *складний* плоскопаралельний рух, то вказати будь-які кінематичні характеристики цієї точки без використання відповідних формул та обчислень *неможливо*.

2. РОЗГЛЯНЕМО ПОСТУПАЛЬНИЙ РУХ ЛАНКИ 1

Оскільки за умовою задачі ланка 1 виконує поступальний прямолінійний рух зі швидкістю $v_1 = 15 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$, а точка B належить цій ланці, то

$$\vec{v}_B = \vec{v}_1 \quad \text{і} \quad v_B = v_1 = 15 \frac{\text{см}}{\text{сек}}.$$

Зображуємо на розрахунковій схемі на дотичній (b) вектор \vec{v}_B швидкості точки B (див. рис. 125z.2).

3. РОЗГЛЯНЕМО ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ЛАНКИ 2

3.1. Визначимо швидкість \vec{v}_D точки D . Оскільки швидкість \vec{v}_B відома та точка B , крім ланки 1, належить і ланці 2, що виконує плоскопаралельний рух, то, обираючи точку B за полюс, за формулою (15.3) встановлюємо, що

$$\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{v}_{BD}, \quad (125.1)$$

де \vec{v}_{BD} – вектор обертальної швидкості точки D в обертальному русі ланки 2 навколо обраного полюса B , модуль якої згідно з формулою (15.4)

$$v_{BD} = DB \cdot \omega_2, \quad (125.2)$$

¹ У разі відсутності розуміння, чому ланка 2 виконує саме плоскопаралельний рух, див. відповідні пояснення стосовно руху ланки 2 у задачі 123 на с.7.

де DB – радіус обертання точки D в обертальному русі ланки 2 навколо полюса B , а сам вектор \vec{v}_{BD} перпендикулярний до відрізка DB та напрямлений за напрямком кутової швидкості ω_2 .

Оскільки кутова швидкість ω_2 поки що невідома, то і скористатися формулами (125.2) та (125.1) поки що можливості немає.

Для продовження розв’язування проведемо через точку B ортогональні координатні осі так, щоб вісь Bx проходила через точку D^2 (див. рис. 125z.2). З нескладного аналізу елементів розрахункової схеми видно, що вектор \vec{v}_B проходить під кутом β до осі Bx , а пряма (d) , на якій обов’язково має бути розташований шуканий вектор \vec{v}_D , утворює з віссю Bx кут $(90^\circ - \alpha)$. Спроектувавши обидві частини векторної рівності (125.1) на осі Bx і Bu , дістанемо

$$\pm v_D \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = v_B \cdot \cos \beta; \quad (125.3)$$

$$\pm v_D \cdot \sin(90^\circ - \alpha) = v_B \cdot \sin \beta \pm v_{BD}. \quad (125.4)$$

При проектуванні враховано, що вектор \vec{v}_{BD} розташований перпендикулярно до відрізка DB , уздовж якого проходить вісь Bx , внаслідок чого проекція $v_{BDx} = 0$, а проекція $v_{BDy} = \pm v_{BD}$ через невизначеність напрямку вектора \vec{v}_{BD} .

Оскільки права частина рівняння (125.3) виявилася додатною, то і в лівій частині його обираємо знак «плюс», а врахувавши, що $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, дістанемо рівність

$$+ v_D \cdot \sin \alpha = v_B \cdot \cos \beta,$$

з якої

$$v_D = \frac{v_B \cdot \cos \beta}{\sin \alpha} = \frac{v_B \cdot 0,6}{0,6} = v_B = 15 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right).$$

З’ясований у рівності (125.3) знак «плюс» її лівої частини, котра визначає проекцію v_{Dx} вектора \vec{v}_D на вісь Bx , означає, що напрямок цього вектора збігається з додатним напрямком осі Bx ; зобразивши його відповідно на прямій (d) на рисунку 125z.2, бачимо, що напрямок вектора \vec{v}_D є протилежним до додатного напрямку осі Bu ; тоді проекція

² Див. зауваження 123.2 до задачі 123 на с. 40.

$$v_{Dy} = -v_D \cdot \sin(90^\circ - \alpha) = -v_D \cdot \cos \alpha,$$

з урахуванням чого рівняння (125.4) набуває вигляду

$$-v_D \cdot \cos \alpha = v_B \cdot \sin \beta \pm v_{BD},$$

звідки³

$$-v_D \cdot \cos \alpha - v_B \cdot \sin \beta = \pm v_{BD}.$$

Оскільки ліва частина отриманої рівності є сумою двох від'ємних доданків, то і в правій частині вибираємо знак «мінус»:

$$-v_D \cdot \cos \alpha - v_B \cdot \sin \beta = -v_{BD},$$

звідки модуль обертальної швидкості точки D в обертальному русі ланки 2 навколо полюса D

$$v_{BD} = v_D \cdot \cos \alpha + v_B \cdot \sin \beta = v_D \cdot 0,8 + v_B \cdot 0,8 = 15 \cdot 0,8 + 15 \cdot 0,8 = 24 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right).$$

При обчисленні враховано, що, як відомо з елементарної тригонометрії, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ та знайдені значення $\cos \alpha$ та $\sin \beta$, яких не задано в умові задачі,

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,6^2} = \sqrt{1 - 0,36} = \sqrt{0,64} = 0,8;$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - 0,6^2} = \sqrt{1 - 0,36} = \sqrt{0,64} = 0,8.$$

З'ясований у правій частині рівності (125.4) знак «мінус» її доданка v_{BD} , який визначає проекцію v_{BDy} вектора \vec{v}_{BD} на вісь Bu , означає, що вектор \vec{v}_{BD} за напрямком протилежний до додатного напрямку осі Bu ; зображуємо відповідно вектор \vec{v}_{BD} на розрахунковій схемі (див. рис. 125z.2).

3.2. Визначимо кутову швидкість ω_2 ланки 2. З формули (125.2)

$$\omega_2 = \frac{v_{BD}}{DB} = \frac{24}{24} = 1 \left(\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right).$$

Зображуємо на розрахунковій схемі навколо полюса B дугову стрілку, яка визначає кутову швидкість ω_2 ланки 2 у розглядуваному положенні механізму; напрямок цієї дугової стрілки встановлюємо за напрямком обертальної швидкості \vec{v}_{BD} точки D в обер-

³ Див. зауваження № 123.5 до задачі 123 на с. 44.

тальному русі ланки 2 навколо полюса B – за рухом годинникової стрілки⁴ (див. рис. 125z.2).

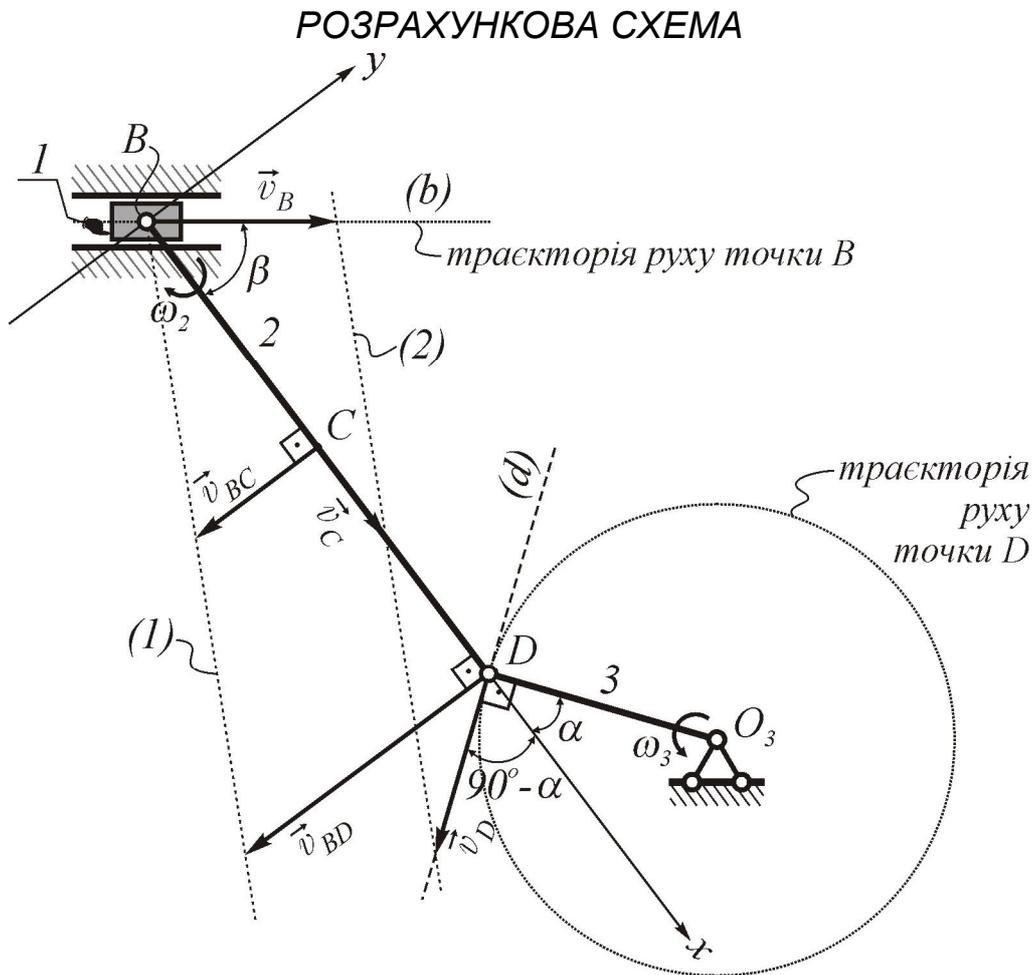


Рис. 125z.2

3.3. Визначимо швидкість \vec{v}_C точки C . Оскільки точка C належить ланці 2, то, беручи точку B за полюс (хоча можна було б за полюс взяти і точку D , адже її швидкість уже відома), за формулою (15.3) матимемо

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{BC}, \quad (125.5)$$

де \vec{v}_{BC} – обертальна швидкість точки C в обертальному русі ланки 2 навколо обраного полюса B , модуль якої згідно з формулою (15.4)

$$v_{BC} = CB \cdot \omega_2 = 12 \cdot 1 = 12 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right),$$

⁴ Див. зауваження № 123.9 до задачі 123 на с. 48.

де $CB = BD/2 = 24/2 = 12(\text{см})$ – відповідний радіус обертання точки C навколо полюса B .

Зображуємо на розрахунковій схемі від точки C вектор \vec{v}_{BC} , спрямовуючи його перпендикулярно до відрізка CB ($\vec{v}_{BC} \perp CB$) за напрямком кутової швидкості ω_2 (див. рис. 125z.2). Додатково на розрахунковій схемі зображено пряму (1), яка свідчить, що модулі v_{BC} і v_{BD} пропорційні віддалям CB та DB від цих точок до полюса B (на підставі того, що $v_{BC} = CB \cdot \omega_2$ і $v_{BD} = DB \cdot \omega_2$).

Таким чином, обидва доданки правої частини векторного рівняння (125.5) визначені повністю та однозначно.

Далі врахуємо, що:

- вісь Bx системи координат Bxu , уведеної у підпункті **3.1** задачі, проходить через точку C , і тому немає потреби застосувати іншу систему відліку;
- відповідно до **наслідку 1** з теореми про швидкості точок при плоскопаралельному русі тіла (див. § 15.3)

$$v_{Cx} = v_{Bx};$$

- з урахуванням відповідних значень і розрахункової схеми (див. рис. 125z.2)

$$v_{Bx} = v_B \cdot \cos \beta = 15 \cdot 0,6 = 9 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right).$$

Тоді, спроектувавши обидві частини рівняння (125.5) на обрані осі (по суті, виникає потреба у проектуванні тільки на вісь Bu), отримаємо

$$v_{Cx} = 9 \text{ см/сек};$$

$$v_{Cy} = v_B \cdot \sin \beta - v_{BC} = 15 \cdot 0,8 - 12 = 12 - 12 = 0,$$

де v_{Cx} і v_{Cy} – відповідно проекції на осі Bx та Bu вектора \vec{v}_C .

Оскільки виявилось, що проекція $v_{Cy} = 0$, то це однозначно свідчить (як має бути відомо будь-кому з тих, хто правильно засвоїв процес проектування) про те, що в розглядуваному положенні вектор \vec{v}_C :

- спрямований перпендикулярно до осі Bu ;

- проектується на вісь Bx у дійсну (натуральну) величину;
- має модуль, що дорівнює абсолютному значенню проекції v_{Cx} :

$$v_C = |v_{Cx}| = |g| = 9 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right).$$

Отримане ж значення

$$v_{Cx} = 9 > 0$$

однозначно свідчить, що напрямок вектора \vec{v}_C збігається з додатним напрямком осі Bx . Зображуємо відповідно цей вектор на розрахунковій схемі (див. рис. 125z.2).

❗ Якщо відкласти всі знайдені значення швидкостей з дотриманням масштабу швидкостей, то відповідно до **наслідку 2** з теореми про швидкості точок при плоскопаралельному русі тіла (див. §15.3) кінці векторів \vec{v}_B , \vec{v}_C та \vec{v}_D швидкостей відповідних точок відрізка BD обов'язково мають знаходитися на одній прямій (див. на розрахунковій схемі на рисунку 125z.2 пряму (2))⁵.

4. РОЗГЛЯНЕМО ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ ЛАНКИ 3

Визначимо кутову швидкість ω_3 ланки 3. Оскільки точка D , крім ланки 2, належить і ланці 3, яка виконує обертальний рух навколо нерухомої осі, то відповідно до формули (14.9)

$$v_D = DO_3 \cdot \omega_3,$$

звідки, маючи вже значення v_D , знаходимо

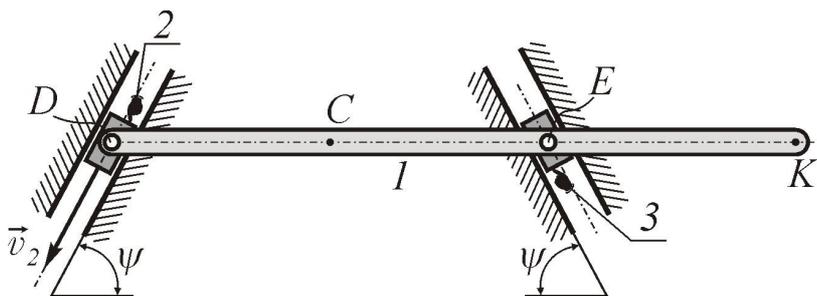
$$\omega_3 = \frac{v_D}{DO_3} = \frac{15}{10} = 1,5 \left(\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right)$$

та зображуємо на розрахунковій схемі навколо точки O_3 дугову стрілку, котра визначає кутову швидкість ω_3 ланки 3 у розглядуваному положенні, встановлюючи напрямком цієї дугової стрілки за напрямком вектора \vec{v}_D – проти руху годинникової стрілки (див. рис. 125z.2).

⁵ Див. **зауваження № 123.11** до задачі 123 на с. 51.

ЗАДАЧА № 126

Брус I довжиною $DK = 94\text{см}$ приєднаний шарнірами D й E відповідно до повзунів 2 та 3 , рух яких обмежено напрямними, похиленими під кутом ψ до горизонту кожна. Знайти швидкості точок D , E , C і K бруса та його кутову швидкість ω_1 і швидкість \vec{v}_3 повзуна 3 для моменту часу, коли брус перебуває у горизонтальному положенні,

**Рис. 126z.1**

якщо в цю мить повзун 2 ковзає вздовж своїх напрямних зі швидкістю $v_2 = 68 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$

(див. рис. 126z.1), а $DE = 60\text{см}$, $DC = CE$,

$$\sin \psi = \frac{15}{17}.$$

Розв'язуючи задачу, при дослідженні плоскопаралельного руху застосовувати теорему про швидкості точок тіла при плоскопаралельному русі та *графоаналітичний спосіб розв'язування*.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Пропонується розв'язати задачу самостійно та звірити власний розв'язок із наведеним.

1. ПОПЕРЕДНІЙ КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМУ

Зі схематичного зображення механізму видно, що він складається з трьох ланок: ланки 2 і 3 (**повзуни**) виконують *поступальні прямолінійні* рухи (кожна вздовж своїх напрямних), а ланка I (брус DK) виконує *плоскопаралельний* рух; зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 126z.2 траєкторії рухів точки D (як такої, що належить ланці 2) і точки E (як такої, що належить ланці 3) та відповідні дотичні (d) й (e) , які повністю збігаються з траєкторіями рухів точок D і E , розуміючи, що обов'язково на дотичній (d) має бути розташованим вектор \vec{v}_D , а на дотичній (e) – вектор \vec{v}_E . Оскільки точки C і K належать *тільки* ланці 2 , яка виконує *складний* плоскопаралельний рух, то вказати будь-які кінема-

тичні характеристики цих точок без використання відповідних формул і обчислень *неможливо*.

2. РОЗГЛЯНЕМО ПОСТУПАЛЬНИЙ РУХ ЛАНКИ 2

Оскільки за умовою задачі ланка 2 виконує поступальний прямолінійний рух зі швидкістю v_2 , а точка D належить цій ланці, то

$$v_D = v_2 = 68 \frac{\text{см}}{\text{сек}} \quad \text{і} \quad \vec{v}_D = \vec{v}_2.$$

Зображуємо на розрахунковій схемі від точки D на дотичній (d) вектор \vec{v}_D швидкості точки D (див. рис. 126z.2).

3. РОЗГЛЯНЕМО ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ЛАНКИ 1

3.1. Визначимо швидкість \vec{v}_E точки E . Оскільки швидкість \vec{v}_D відома та точка D , крім ланки 2, належить і ланці 1, що виконує плоскопаралельний рух, то, обираючи точку D за полюс, відповідно до формули (15.3) запишімо швидкість точки E , яка також належить ланці 1; отже,

$$\vec{v}_E = \vec{v}_D + \vec{v}_{DE}, \quad (126.1)$$

де \vec{v}_{DE} – вектор обертальної швидкості точки E в обертальному русі ланки 1 навколо полюса D .

Згідно з формулою (15.4) модуль

$$v_{DE} = ED \cdot \omega_1, \quad (126.2)$$

де ED – радіус обертання точки E в обертальному русі ланки 1 навколо полюса D , а сам вектор \vec{v}_{DE} згідно з формулою (15.5) проходить перпендикулярно до відрізка ED ($\vec{v}_{DE} \perp ED$) та напрямлений за напрямком кутової швидкості ω_1 ланки 1.

Оскільки кутова швидкість ω_1 поки що невідома, то і скористатися формулами (126.2) та (126.1) поки що можливості немає.

Для продовження розв'язування побудуємо *трикутник швидкостей*, що відповідає векторній сумі (126.1), для чого на розрахунковій схемі на рисунку 126z.2:

- від точки E відкладаємо вектор \vec{v}_D ;
- відповідно до формули (126.1) від кінця вектора \vec{v}_D необхідно відкласти вектор \vec{v}_{DE} , модуль v_{DE} якого обчислити неможливо через відсутність значення ω_1 , але відомо, що $\vec{v}_{DE} \perp ED$; тоді

через кінець вектора \vec{v}_D перпендикулярно до відрізка ED проводимо пряму (e'); очевидно, що вектор \vec{v}_{DE} , початок якого визначається кінцем вектора \vec{v}_D , лежить на прямій (e');

- оскільки, як з'ясовано ще в пункті **1** розв'язуваної задачі, вектор \vec{v}_E знаходиться на дотичній (e), то точка перетину прямих (e) та (e') і визначає кінці векторів \vec{v}_{DE} на прямій (e') та \vec{v}_E на прямій (e); зображуємо ці вектори¹.

❏ По обходу контуру трикутника швидкостей вектори \vec{v}_D і \vec{v}_{DE} розташовані в одному напрямку (що визначається напрямком відомого вектора \vec{v}_D), а вектор \vec{v}_E – у протилежному.

Аналізуємо та визначаємо відповідні кути й сторони побудованого трикутника швидкостей², який умовно позначимо EE_1E_2 :

- умовно позначимо пряму, котра проходить через точку E та на якій відкладено вектор \vec{v}_D , як (l);
- не викликає сумніву, що пряма (d), котра проходить через точку D , паралельна до прямої (l); якщо ж розглядати відрізок DE як січну між цими паралельними прямими, то $\angle DEE_1 = \psi$ (див. будь-який довідник з елементарної геометрії);
- позначимо точку перетину сторони E_1E_2 трикутника швидкостей з відрізком DE як E_3 (умовно);
- з трикутника EE_1E_3 видно, що $\angle EE_1E_3 = 90^\circ - \psi$, а з трикутника EE_2E_3 – $\angle EE_2E_3 = 90^\circ - \psi$;
- оскільки в трикутнику EE_1E_2 два його кути виявилися однаковими ($\angle EE_1E_2 = \angle EE_2E_1 = 90^\circ - \psi$), то він є рівнобедреним і $EE_1 = EE_2$; якщо враховувати, що довжини сторін трикутника швидкостей визначають модулі відповідних швидкостей, то

$$v_E = v_D = 68 \frac{\text{см}}{\text{сек}};$$

¹ Див. **зауваження № 123.8** до задачі 123 на с. 46.

² Зазначену задачу можна розв'язувати, використовуючи будь-які необхідні для цього положення елементарних геометрії та (або) тригонометрії.

$$\omega_1 = \frac{v_{DE}}{ED} = \frac{120}{60} = 2 \left(\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right).$$

Зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 126z.2 навколо полюса D дугову стрілку, що визначає кутову швидкість ω_1 ланки I у розглядуваному положенні механізму; напрямок цієї дугової стрілки встановлюємо за напрямком вектора \vec{v}_{DE} – проти руху годинникової стрілки⁴.

3.3. Визначимо швидкість \vec{v}_C точки C . Оскільки точка C належить ланці I , то, обираючи точку D за полюс (хоча можна було б за полюс взяти і точку E , адже її швидкість уже відома), відповідно до формули (15.3) отримуємо, що

$$\vec{v}_C = \vec{v}_D + \vec{v}_{DC}, \quad (126.3)$$

де \vec{v}_{DC} – вектор обертальної швидкості точки C в обертальному русі ланки I навколо обраного полюса D , модуль якої згідно з формулою (15.4)

$$v_{DC} = CD \cdot \omega_1 = \frac{DE}{2} \cdot \omega_1 = \frac{60}{2} \cdot 2 = 30 \cdot 2 = 60 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right),$$

де CD – радіус обертання точки C навколо полюса D .

На розрахунковій схемі на рисунку 126z.2 від точки C відповідно до векторної суми, що визначається формулою (126.3), будемо *трикутник швидкостей*:

- відкладаємо вектор \vec{v}_D , позначивши його кінець як C_1 ;
- від точки C_1 відкладаємо вектор \vec{v}_{DC} , урахувавши, що $\vec{v}_{DC} \perp CD$, та обираючи напрямок \vec{v}_{DC} за напрямком кутової швидкості ω_1 ; кінець вектора \vec{v}_{DC} позначаємо як C_2 ;
- зображуємо вектор \vec{v}_C , направляючи його з точки C у точку C_2 .

По обходу контуру отриманого трикутника швидкостей вектори \vec{v}_D і \vec{v}_{DC} розташовані в одному напрямку, а вектор \vec{v}_C – у протилежному.

Аналізуємо побудований трикутник швидкостей CC_1C_2 :

- оскільки за розрахунками $v_{DE} = 120 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$, а $v_{DC} = 60 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$, то

⁴ Див. **зауваження № 123.9** до задачі 123 на с. 48.

$$v_{DC} = \frac{v_{DE}}{2};$$

- урахувавши, що довжини сторін трикутника швидкостей визначають модулі відповідних швидкостей, матимемо

$$C_1 C_2 = \frac{E_1 E_2}{2} = E_1 E_3;$$

- з елементарного геометричного аналізу елементів розрахункової схеми зрозуміло, що

$$\angle C C_1 C_2 = \angle E E_1 E_3 = 90^\circ - \psi;$$

- тоді $\Delta C C_1 C_2 = \Delta E E_1 E_3$, що одночасно визначає розташування точки C_2 і вектора \vec{v}_C на поздовжній осі ланки I ;
- з урахуванням викладеного

$$v_C = v_D \cdot \cos \psi = 68 \cdot \frac{8}{17} = 32 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right).$$

3.4. Визначимо швидкість \vec{v}_K точки K . Оскільки точка K належить ланці I , то, вибираючи точку C за полюс, за формулою (15.3) записуємо

$$\vec{v}_K = \vec{v}_C + \vec{v}_{CK}, \quad (126.4)$$

де \vec{v}_{CK} – вектор обертальної швидкості точки K в обертальному русі ланки I навколо обраного полюса C , модуль якої згідно з формулою (15.4)

$$v_{CK} = KC \cdot \omega_I = (DK - CD) \cdot \omega_I = (94 - 30) \cdot 2 = 64 \cdot 2 = 128 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right),$$

де KC – радіус обертання точки K навколо полюса C .

На розрахунковій схемі на рисунку 126.z.2 від точки K відповідно до формули (126.4) будуємо *трикутник швидкостей*: відкладаємо вектор \vec{v}_C ; від кінця вектора \vec{v}_C відкладаємо вектор \vec{v}_{CK} , враховуючи, що $\vec{v}_{CK} \perp KC$, та обираючи напрямок \vec{v}_{CK} за напрямком кутової швидкості ω_I ; зображуємо вектор \vec{v}_K , направляючи його з точки K у кінець вектора \vec{v}_{CK} .

☛ По обходу контуру трикутника швидкостей вектори \vec{v}_C і \vec{v}_{CK} розташовані в одному напрямку, а вектор \vec{v}_K – у протилежному.

Оскільки побудований трикутник швидкостей виявився прямокутним, то за теоремою Піфагора

$$v_K = \sqrt{(v_C)^2 + (v_{CK})^2} = \sqrt{32^2 + 128^2} = \sqrt{17408} = 32 \cdot \sqrt{17} \approx 131,94 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right).$$

☛ Відповідно до **наслідку 2** з теореми про швидкості точок при плоскопаралельному русі тіла (див. §15.3) кінці векторів \vec{v}_D , \vec{v}_C , \vec{v}_E та \vec{v}_K швидкостей точок D , C , E і K ланки l , котрі належать відрізьку DK , знаходяться на одній прямій; тоді, якщо провести через кінці векторів \vec{v}_D та \vec{v}_K пряму, наприклад, (2), то кінці векторів \vec{v}_C і \vec{v}_E також мають бути на цій прямій (див. рис. 126.z.2)⁵.

4. РОЗГЛЯНЕМО ПОСТУПАЛЬНИЙ РУХ ЛАНКИ 3

Оскільки точка E , швидкість \vec{v}_E якої вже відома, крім ланки l , належить і ланці 3 , котра за умовою задачі виконує поступальний прямолінійний рух, то

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_E$$

і

$$v_3 = v_E = 68 \frac{\text{см}}{\text{сек}},$$

де \vec{v}_3 і v_3 – вектор і модуль швидкості поступального руху повзуна 3 відповідно.

☛ На розрахунковій схемі на рисунку 126.z.2 можна зобразити вектор \vec{v}_3 швидкості поступального руху ланки 3 від будь-якої точки цієї ланки (можна цього і не робити, розуміючи, що вектор \vec{v}_E однозначно визначає \vec{v}_3).

⁵ Див. **зауваження № 123.11** до задачі 123 на с. 51.

ЗАДАЧА № 127

Для зображеного на рисунку 127z.1 положення багатоланкового механізму визначити швидкості точок F , B й A та кутові швидкості ланок 2 і 3, якщо $O_1F = R_1 = 2,5 \text{ см}$, $FB = O_3B = 20 \text{ см}$, $AB = AF$ і в цю мить приводне колесо 1 обертається за рухом годинникової стрілки з кутовою швидкістю $\omega_1 = 8 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$.

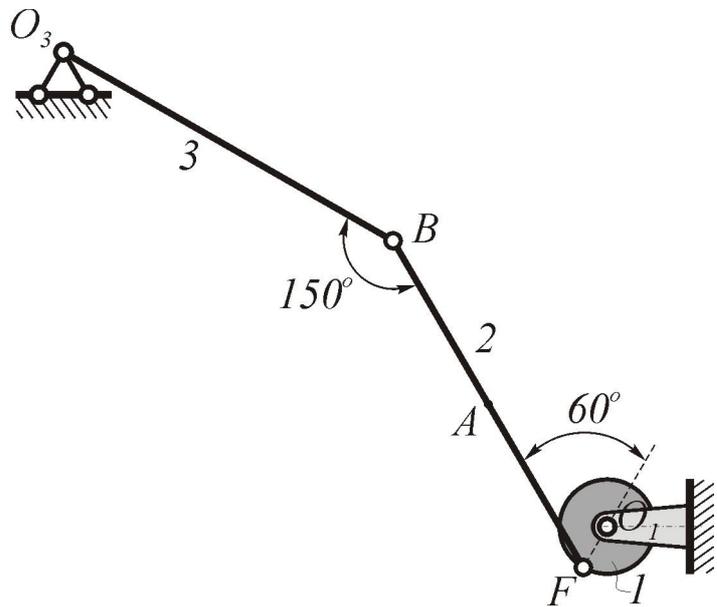


Рис. 127z.1.

Розв'язуючи задачу, при дослідженні плоскопаралельного руху застосовувати *теорему про швидкості точок тіла при плоскопаралельному русі*.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Пропонується розв'язати задачу самостійно та звірити власний розв'язок із наведеним.

1. ПОПЕРЕДНІЙ КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМУ

Зі схематичного зображення механізму видно, що він складається з трьох ланок. Рух ланки 1 (приводного колеса, котре за своєю конструктивною суттю є кривошипом, до якого пальцем F приєднано шатун FB) обмежено шарнірно-нерухомою опорою O_1 , а ланки 3 (коромисла BO_3) – аналогічною опорою O_3 , через що зазначені ланки виконують *обертальні* рухи навколо нерухомих осей, які відповідно проходять через точки O_1 і O_3 перпендикулярно до площини знаходження механізму.

Після розгляду й аналізу руху ланки 2 (шатуну FB) стає зрозумілим, що ця ланка виконує *плоскопаралельний* рух.

Оскільки **палець** F , який за поняттями теоретичної механіки є **точковим шарніром**, належить ланці 1, котра виконує *обертальний* рух, то траєкторією руху точки F є коло радіуса O_1F , а вектор \vec{v}_F швидкості цієї точки лежить на дотичній (f) до її траєк-

торії руху. На підставі аналогічних міркувань траєкторією руху точки B механізму, як такої, що належить ланці 3, є певна дуга кола радіуса O_3B , а вектор \vec{v}_B швидкості цієї точки лежить на дотичній (b) до її траєкторії руху. Зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 127z.2 траєкторії рухів точок F і B та дотичні (f) і (b) , кожна з яких у розглядуваному положенні проходить під прямим кутом до відповідного радіуса: $(f) \perp O_1F$ та $(b) \perp O_3B$. Звісно, що зображені дотичні (f) і (b) однозначно встановлюють «місця розташування» векторів \vec{v}_F та \vec{v}_B відповідно.

Оскільки точка A належить тільки ланці 2, що виконує складний плоскопаралельний рух, то вказати будь-які кінематичні характеристики цієї точки без використання необхідних формул і обчислень неможливо.

2. РОЗГЛЯНЕМО ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ ЛАНКИ 1

Оскільки кутова швидкість ω_1 обертання ланки 1 відома, то за формулою (14.9) знаходимо модуль v_F швидкості точки F

$$v_F = FO_1 \cdot \omega_1 = 2,5 \cdot 8 = 20 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right),$$

а напрямок вектора \vec{v}_F на дотичній (f) визначаємо за напрямком кутової швидкості ω_1 , зображуючи відповідно \vec{v}_F на розрахунковій схемі на рисунку 127z.2.

3. РОЗГЛЯНЕМО ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ЛАНКИ 2

Зауваження № 127.1. У задачі 123 зазначалося, що дослідження плоскопаралельного руху ланки 2 можна виконати декількома способами, та в процесі розв'язування вказаної задачі розглянуто два з можливих – метод проєкцій і графоаналітичний спосіб, які з навчальною метою застосовувалися незалежно один від одного (по суті, одну задачу було розв'язано двічі). **Важливо розуміти**, що для будь-якої задачі (навчальної, виробничої чи наукової) на будь-якому етапі її розв'язування можна (і навіть бажано) застосовувати той чи інший можливий спосіб, свідомо обираючи симбіоз цих способів за умови максимального спрощення процесу розв'язування. Звісно, що зазначене вміння свідомо обирати симбіоз з'являється лише після набуття достатнього необхідного досвіду. Розглянемо один з можливих варіантів подальшого розв'язування розглядуваної задачі.

3.1. Визначимо швидкість \vec{v}_B точки B . Проведімо через точку B ортогональні координатні осі так, щоб одна з осей, наприклад вісь Bx , проходила б через точку F^1 (див. рис. 127z.2).

Оскільки точки F , A та B ланки 2 знаходяться на осі Bx , то згідно з **наслідком 1** з теореми про швидкості точок при плоскопаралельному русі тіла (див. у § 15.3 с. 24) проекції v_{Fx} , v_{Ax} і v_{Bx} швидкостей \vec{v}_F , \vec{v}_A і \vec{v}_B цих точок на вісь Bx рівні:

$$v_{Fx} = v_{Ax} = v_{Bx}. \quad (127.1)$$

З розрахункової схеми (див. рис. 127z.2) з урахуванням відповідних значень очевидно, що

$$v_{Fx} = v_F \cdot \cos 30^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10 \cdot \sqrt{3} \approx 17,32 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right).$$

Тоді згідно з рівністю (127.1)

$$v_{Bx} = v_{Ax} = v_{Fx} = 10 \cdot \sqrt{3} \approx 17,32 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right).$$

Відкладаємо від точки B знайдену проекцію v_{Bx}^2 , після чого через відповідний кінець проекції v_{Bx} проводимо під прямим кутом до осі Bx пряму (b') до її перетину з прямою (b); знайдена в такий спосіб точка їх перетину і визначає кінець вектора \vec{v}_B , який зображуємо на рисунку 127z.2 на розрахунковій схемі, з нескладного аналізу елементів котрої встановлюємо, що

$$v_{Bx} = v_B \cdot \cos 60^\circ,$$

звідки, підставляючи встановлене вище значення v_{Bx} , отримаємо

$$v_B = \frac{v_{Bx}}{\cos 60^\circ} = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{0,5} = 20 \cdot \sqrt{3} \approx 34,64 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right).$$

❏ Якби за умовою необхідно було б визначити тільки швидкість \vec{v}_B , то розв'язування задачі можна було б закінчувати в цьому місці.

3.2. Визначимо кутову швидкість ω_2 ланки 2. Обираючи точку F за полюс, запишемо за *теоремою про швидкості точок при плоскопаралельному русі тіла* (див. формулу (15.3) у §15.3) швидкість точки B :

¹ Див. **зауваження 123.2** до задачі 123 на с. 40.

² Значення проекцій v_{Ax} і v_{Bx} збігаються як за величиною, так і за знаком.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_F + \vec{v}_{FB}, \quad (127.2)$$

де \vec{v}_{FB} – вектор обертальної швидкості точки B в обертальному русі ланки 2 навколо обраного полюса F , модуль якого згідно з формулою (15.4)

$$v_{FB} = BF \cdot \omega_2, \quad (127.3)$$

де BF – радіус обертання точки B в обертальному русі ланки 2 навколо полюса F .

Відповідно до формули (15.5) вектор \vec{v}_{FB} розташований перпендикулярно до вказаного радіуса ($\vec{v}_{FB} \perp BF$) та напрямлений за напрямком кутової швидкості ω_2 , яка на цьому етапі розв'язування задачі невідома, а тому визначити модуль v_{FB} за формулою (127.3) і вказати напрямок вектора \vec{v}_{FB} поки що можливості немає.

Для продовження розв'язування спроектуємо обидві частини векторної рівності (127.2) тільки на вісь Bu^3 :

$$v_B \cdot \sin 60^\circ = -v_F \cdot \sin 30^\circ \pm v_{FB}. \quad (127.4)$$

При проектуванні враховано, що вектор \vec{v}_{FB} розташований перпендикулярно до відрізка BF , уздовж якого проходить вісь Bx , внаслідок чого проекція $v_{FBx} = 0$, а проекція $v_{FBu} = \pm v_{FB}$ через невизначеність напрямку вектора \vec{v}_{FB} .

Лишивши у рівнянні (127.4) невизначений доданок $\pm v_{FB}$ у правій частині⁴, перетворимо це рівняння до вигляду

$$v_B \cdot \sin 60^\circ + v_F \cdot \sin 30^\circ = \pm v_{FB}.$$

Оскільки ліва частина отриманої рівності є сумою двох додатних доданків, то і в правій частині обираємо знак «плюс»:

$$v_B \cdot \sin 60^\circ + v_F \cdot \sin 30^\circ = +v_{FB},$$

звідки модуль обертальної швидкості точки B в обертальному русі ланки 2 навколо полюса F

$$v_{FB} = v_B \cdot \sin 60^\circ + v_F \cdot \sin 30^\circ = 20\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 20 \cdot \frac{1}{2} = 30 + 10 = 40 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right).$$

³ У цьому полягає **різниця** в процесі розв'язування розглядуваної задачі порівняно із задачею 123, де відповідну векторну рівність необхідно було проектувати на обидві координатні осі.

⁴ Див. **зауваження № 123.5** до задачі 123 на с. 44.

З'ясований у правій частині рівності (127.4) знак «плюс» її доданка v_{FB} , який визначає проекцію v_{FB_y} вектора \vec{v}_{FB} на вісь B_y , означає, що цей вектор за напрямком збігається з додатним напрямком осі B_y ; зображуємо відповідно вектор \vec{v}_{FB} на розрахунковій схемі (див. рис. 127z.2).

РОЗРАХУНКОВА СХЕМА

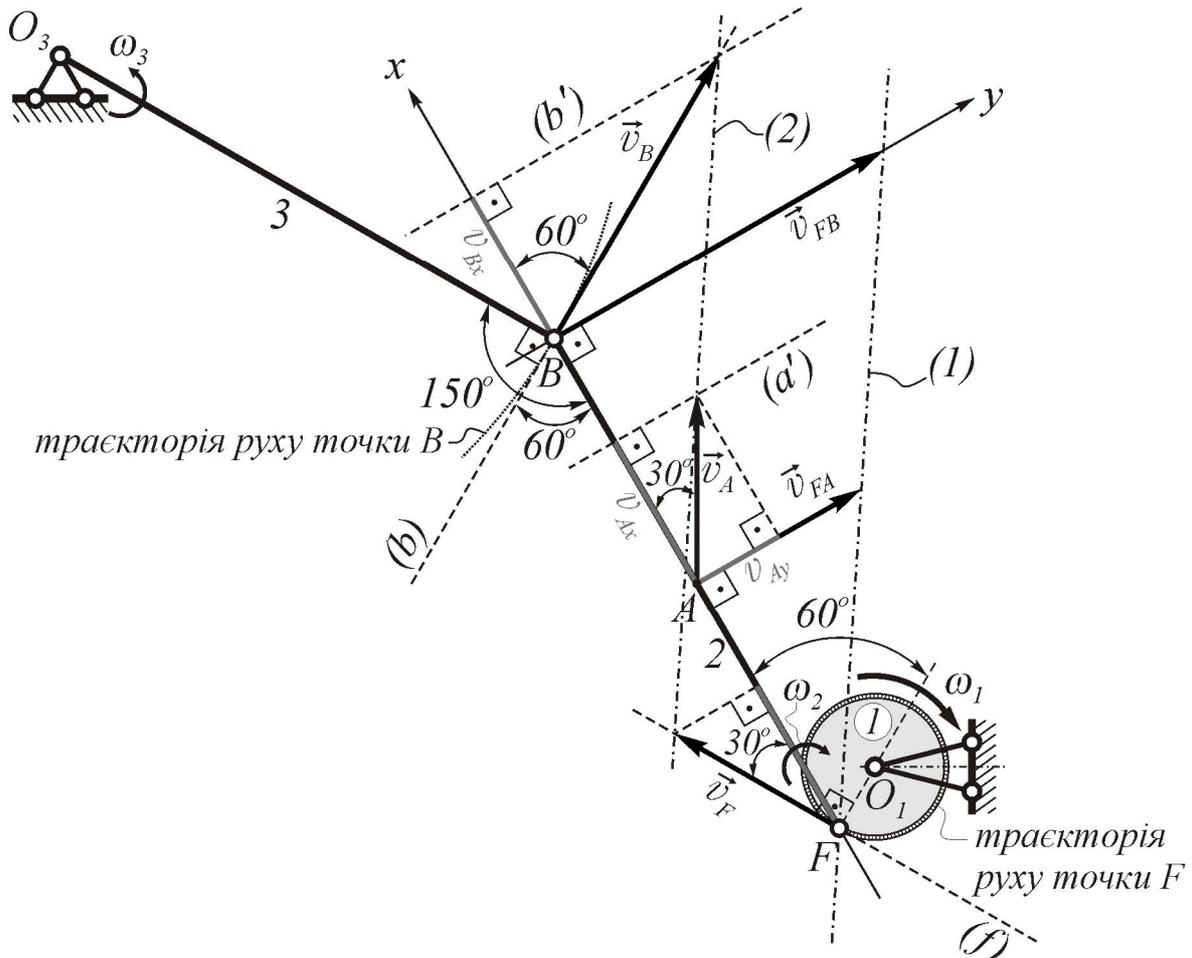


Рис. 127z.2

Тепер з формули (127.3) отримуємо, що

$$\omega_2 = \frac{v_{FB}}{BF} = \frac{40}{20} = 2 \left(\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right).$$

Зображуємо на розрахунковій схемі навколо полюса F дугову стрілку, яка визначає кутову швидкість ω_2 ланки 2 у розглядуваному положенні механізму; напрямком цієї дугової стрілки встановлюємо за напрямком обертальної швидкості \vec{v}_{FB} точки B в обер-

тальному русі ланки 2 навколо полюса F – за рухом годинникової стрілки⁵ (див. рис. 127z.2).

3.3. Визначимо швидкість \vec{v}_A точки A . Оскільки, як уже встановлено вище,

$$v_{Ax} = v_{Fx} = 10 \cdot \sqrt{3} \approx 17,32 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right),$$

то відкладаємо від точки A проекцію v_{Ax} (ураховуючи, що значення її збігається з проекціями v_{Fx} та v_{Bx} і за величиною, і за знаком) та через відповідний кінець проекції v_{Ax} проводимо під прямим кутом до осі Bx пряму (a') (див. рис. 127z.2); очевидно, що кінець вектора \vec{v}_A знаходиться на прямій (a'). На відміну від ситуації з вектором \vec{v}_B , для якого його місце розташування (а саме дотична (b)) було відоме ще з попереднього кінематичного аналізу, для вектора \vec{v}_A така інформація відсутня.

❏ Якщо відкласти всі знайдені значення швидкостей з дотриманням масштабу швидкостей, то положення кінця вектора \vec{v}_A на прямій (a') можна визначити графічно, скориставшись **наслідком 2** з теореми про швидкості точок при плоскопаралельному русі тіла (див. §15.3): оскільки точки F , A та B ланки 2 належать відрізку FB , то кінці векторів \vec{v}_F , \vec{v}_A і \vec{v}_B швидкостей точок F , A та B знаходяться на одній прямій; тоді проводимо через кінці векторів \vec{v}_F і \vec{v}_B пряму, наприклад, (2); точка перетину прямої (2) з прямою (a') й визначає кінець вектора \vec{v}_A – зображуємо його на розрахунковій схемі (див. рис. 127z.2). Інколи, розв'язуючи аналогічні задачі, параметри вектора \vec{v}_A можна легко встановити з геометричного аналізу необхідних елементів розрахункової схеми⁶.

Визначимо вектор \vec{v}_A за допомогою кінематичного аналізу. Оскільки точка A належить ланці 2, то, беручи точку F за полюс (хоча можна було б за полюс взяти і точку B , адже її швидкість уже відома), за формулою (15.3) матимемо

$$\vec{v}_A = \vec{v}_F + \vec{v}_{FA}, \quad (127.5)$$

⁵ Див. **зауваження № 123.9** до задачі 123 на с. 48.

⁶ Див. **зауваження № 123.11** до задачі 123 на с. 51.

де \vec{v}_{FA} – вектор обертальної швидкості точки A в обертальному русі ланки 2 навколо обраного полюса F , модуль якої згідно з формулою (15.4)

$$v_{FA} = AF \cdot \omega_2 = 10 \cdot 2 = 20 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right),$$

де $AF = \frac{BF}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ (см)}$ – відповідний радіус обертання точки A навколо полюса F .

Зображуємо на розрахунковій схемі від точки A вектор \vec{v}_{FA} , спрямовуючи його перпендикулярно до відрізка AF ($\vec{v}_{FA} \perp AF$) за напрямком кутової швидкості ω_2 (див. рис. 127z.2). Додатково на розрахунковій схемі зображено пряму (1), яка свідчить, що модулі v_{FB} і v_{FA} пропорційні віддалям BF та AF від цих точок до полюса F (на підставі того, що $v_{FB} = BF \cdot \omega_2$ і $v_{FA} = AF \cdot \omega_2$).

Таким чином, обидва доданки правої частини векторної рівності (127.5) визначені повністю й однозначно.

Далі врахуємо, що:

- вісь Vx системи координат Vxy , уведеної у підпункті **3.1** задачі, проходить через точку A і тому немає потреби застосовувати іншу систему відліку;
- як вже встановлено вище, проекція

$$v_{Ax} = 10 \cdot \sqrt{3} \approx 17,32 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right);$$

- спроектувавши обидві частини векторної рівності (127.5) на вісь Vy , дістанемо і значення проекції вектора \vec{v}_A на цю вісь

$$v_{Ay} = -v_F \cdot \sin 30^\circ + v_{FA} = -20 \cdot 0,5 + 20 = 10 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right).$$

Оскільки обидві проекції виявилися додатними, то це однозначно свідчить, що в розглядуваному положенні механізму напрямок вектора \vec{v}_A збігається з додатними напрямками координатних осей Vx і Vy ⁷, а згідно з формулами (11.7) і (11.9) [1]

$$\vec{v}_A = \vec{i} \cdot v_{Ax} + \vec{j} \cdot v_{Ay} \approx 17,32\vec{i} + 10\vec{j}$$

⁷ Звісно, що отримане свідчення про напрямок вектора \vec{v}_A повністю збігається з його напрямком, установленим вище, з використанням **наслідку 2** з теореми про швидкості точок при плоскопаралельному русі тіла.

та

$$v_A = \sqrt{(v_{Ax})^2 + (v_{Ay})^2} = \sqrt{(10 \cdot \sqrt{3})^2 + (10)^2} = \sqrt{10^2 \cdot (\sqrt{3})^2 + 100} = \\ = \sqrt{100 \cdot 3 + 100} = \sqrt{400} = 20 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right).$$

Зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 127z.2 проекцію v_{Ay} (можна цього і не робити, тому що вектор \vec{v}_A у розглядуваній задачі вже визначений однозначно, але в будь-якому разі зображення вектора \vec{v}_A має відповідати його обчисленим проекціям v_{Ax} та v_{Ay}).

У разі потреби положення вектора \vec{v}_A аналітично можна визначити за допомогою напрямних косинусів: наприклад, відповідно до формули (11.10) [1]

$$\cos\left(\vec{i}; \hat{\vec{v}}_A\right) = \frac{v_{Ax}}{v_A} = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

оскільки ж

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ,$$

то, звісно, вектор \vec{v}_A утворює кут 30° з віссю Bx (див. рис. 127z.2).

4. РОЗГЛЯНЕМО ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ ЛАНКИ 3

Визначимо кутову швидкість ω_3 ланки 3. Оскільки точка B , крім ланки 2, належить і ланці 3, що виконує обертальний рух навколо нерухомої осі, то відповідно до формули (14.9)

$$v_B = BO_3 \cdot \omega_3,$$

звідки, маючи вже значення v_B , знаходимо

$$\omega_3 = \frac{v_B}{BO_3} = \frac{20 \cdot \sqrt{3}}{20} = \sqrt{3} \approx 1,732 \left(\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right).$$

Зображуємо на розрахунковій схемі навколо точки O_3 , через яку проходить нерухома вісь обертання ланки 3, дугову стрілку, котра визначає кутову швидкість ω_3 ланки 3 у розглядуваному положенні механізму; напрямом цієї дугової стрілки встановлюємо за напрямком швидкості \vec{v}_B точки B – проти руху годинникової стрілки (див. рис. 127z.2).

ЗАДАЧА № 133

Для зображеного на рисунку 133z.1 положення плоского механізму, рух якого відбувається завдяки обертанню кривошипа 1 зі сталою кутовою швидкістю ω_1 за рухом годинникової стрілки навколо нерухомої осі, що проходить через точку O_1 перпендикулярно до площини знаходження механізму, знайти швидкості точок A, B, D, E, K, C і F та кутові швидкості ланок 2, 3, 4 і 5,

якщо $O_1A = 0,5 \text{ м}$,

$AB = BD = 2 \text{ м}$,

$AE = 1,6 \text{ м}$,

$DE = 3,4 \text{ м}$,

$O_3B = O_3K = 1 \text{ м}$,

$KC = \ell_4 = 1,5 \text{ м}$,

$$\omega_1 = 6\sqrt{3} \left(\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right)^1.$$

Ланка 5 – диск радіуса $r_5 = 0,4 \text{ м}$, що котиться без ковзання по горизонтальній площині та центр симетрії якого пальцем C з'єднаний з ланкою 4.

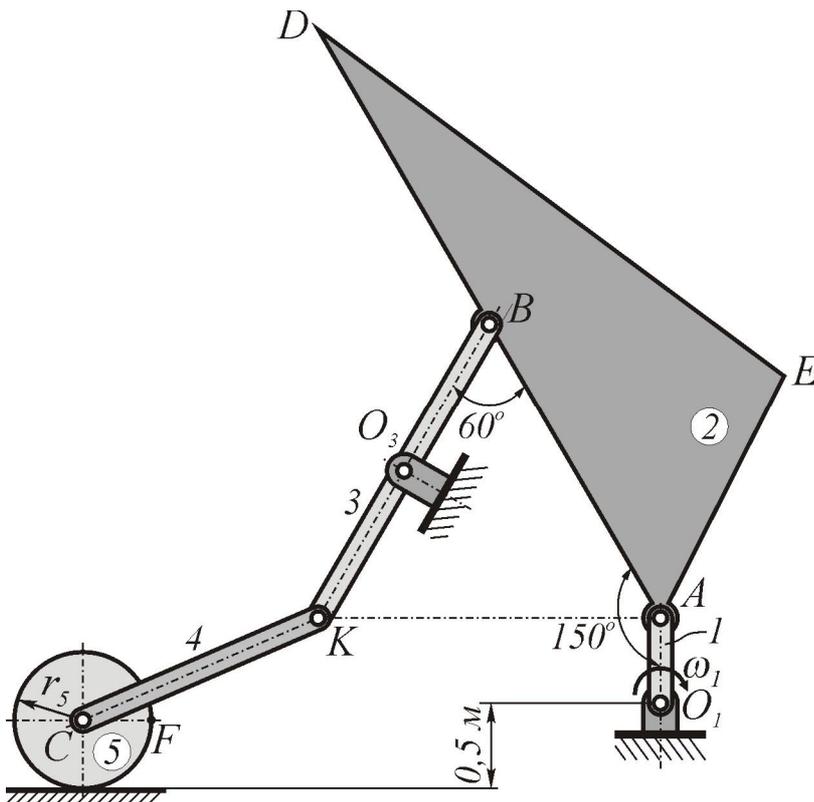


Рис. 133z.1

Досліджуючи плоскопаралельний

рух, застосовувати поняття про *миттєвий центр швидкостей* тіла, що виконує плоскопаралельний рух.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. ПОПЕРЕДНІЙ КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМУ²

Ланки 1 і 3 виконують *обертальні* рухи навколо нерухомих осей, що проходять через точки O_1 й O_3 перпендикулярно до площини знаходження механізму; ланка 2 виконує *плоскопаралельний* рух. Зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 133z.2

¹ Див. також задачу 123, де розглянуто рух механізму, який є частиною зображеного на рисунку 133z.1 механізму у тотожному положенні аналогічних ланок 1 ÷ 3.

² Див. виноску 3 до задачі 123 на с. 36.

траєкторії рухів точки A (як такої, що належить ланці 1), точок B і K (як таких, що належать ланці 3) та дотичні (a) , (b) і (k) відповідно³.

Оскільки при русі механізму: а) поздовжня вісь KC ланки 4 не лишається паралельною сама собі, то ця ланка не виконує поступальний рух; б) у ланки 4 немає нерухомої точки, через яку проходила б вісь її обертання, то ця ланка не виконує обертального руху; в) усі точки цієї ланки рухаються тільки в площині розташування механізму, то ланка 4 виконує плоскопаралельний рух.

Диск 5 котиться без ковзання по горизонтальній площині, що є особливим видом плоскопаралельного руху.

Оскільки точка C є центром абсолютно твердого диска 5 , то при його коченні ця точка не може ні наблизитися, ні віддалитися від площини, по якій відбувається кочення; тому в цьому разі траєкторією руху точки C є горизонтальна пряма, котру і зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 133z.2, усвідомлюючи, що дотична (c) повністю збігається з траєкторією руху точки C .

Тому що точка F – це точка обода диска 5 , який котиться без ковзання по нерухомій площині, то, як відомо, траєкторією руху цієї точки, як і всіх інших точок обода, є відповідна **циклоїда**⁴.

Через те, що точки E та D належать тільки ланці 2 , яка виконує складний плоскопаралельний рух, указати будь-які кінематичні характеристики цих точок без застосування відповідних формул і обчислень неможливо.

2. ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТЕЙ ТОЧОК І КУТОВИХ ШВИДКОСТЕЙ ЛАНОК

Оскільки ланка 1 виконує обертальний рух, то за формулою (14.9) обчислюємо модуль швидкості точки A

$$v_A = AO_1 \cdot \omega_1 = 0,5 \cdot 6\sqrt{3} = 3 \cdot \sqrt{3} \approx 5,196 \left(\frac{m}{сек} \right).$$

Зображуємо на розрахунковій схемі на дотичній (a) вектор \vec{v}_A обертальної швидкості точки A , визначаючи його напрямком за напрямком заданої кутової швидкості ω_1 (див. рис. 133z.2).

³ Див. також відповідний пункт задачі 123, рис. 123z.2 і зауваження до нього.

⁴ Історично *циклоїда* (від грецьк. *κυκλοειδής*; таку назву, яка означає «та, що походить від круга», ввів Галілео Галілей) виявилася однією з перших досконало схарактеризованих трансцендентних кривих (див. <http://www.etudes.ru/ru/etudes/cycloid/>).

Розглядаючи плоскопаралельний рух ланки 2, для знаходження швидкостей точок B , D й E цієї ланки оберімо за полюс не точку A (як це робилося в задачі 123), а *миттєвий центр швидкостей* ланки 2 – точку P_2 , швидкість v_{P_2} якої у розглядуваному положенні механізму дорівнює нулю ($v_{P_2} = 0$). Для визначення положення точки P_2 встановлюємо у точці A перпендикуляр (a^\perp) до вектора \vec{v}_A і в точці B перпендикуляр (b^\perp) до прямої (b) ; точка P_2 знаходиться на перетині перпендикулярів (a^\perp) та (b^\perp) , що й зображуємо на розрахунковій схемі (див. рис. 133z.2).

РОЗРАХУНКОВА СХЕМА

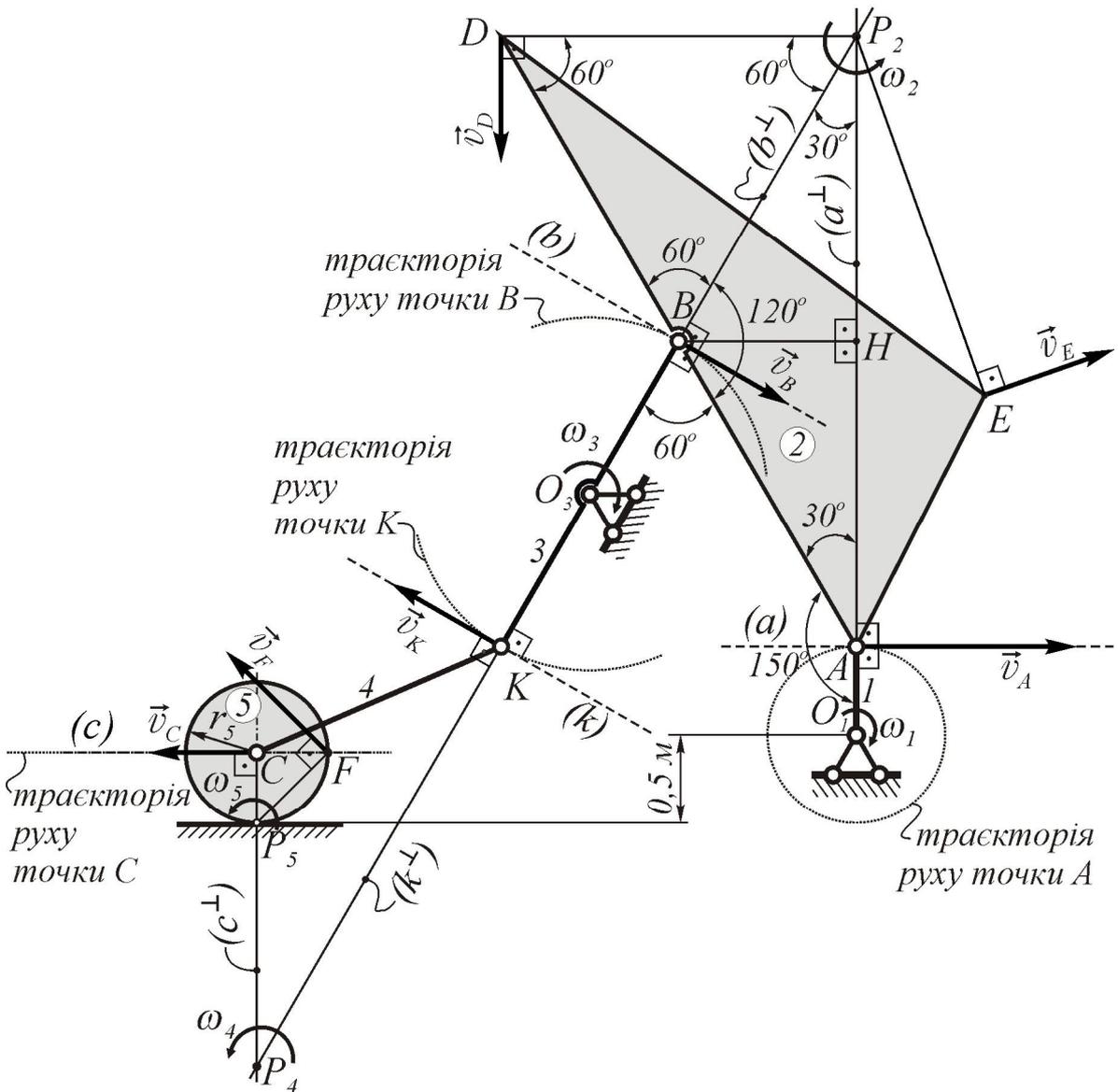


Рис. 133z.2

Зауваження № 133.1. Миттєвий центр швидкостей ланки 2 позначено як P_2 для підкреслення факту, що ця точка має відношення саме до ланки 2. **Умовимося** всім характерним точкам тієї чи іншої ланки надавати відповідні індекси (наприклад, O_3 – точка, через яку проходить вісь обертання ланки 3; P_5 – миттєвий центр швидкостей ланки 5 тощо).

За теоремою про швидкості точок при плоскопаралельному русі тіла (див. §15.3, формулу (15.3)) швидкість точки A , як такої, що належить ланці 2, визначає векторна сума

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{P_2} + \vec{v}_{P_2A}.$$

Оскільки ж $v_{P_2} = 0$, то у цьому разі теорема набуває вигляду

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{P_2A},$$

де \vec{v}_{P_2A} – вектор обертальної швидкості точки A в обертальному русі ланки 2 навколо миттєвого центра швидкостей P_2 .

Зауваження № 133.2. Аналізуючи останню формулу, доходимо висновку, що у разі обрання за полюс миттєвого центра швидкостей розглядуваного тіла його складний плоскопаралельний рух **начебто зводиться** до простого обертального руху навколо умовної осі обертання, яка у кожному положенні тіла проходить через його миттєвий центр швидкостей (див. рис. 133z.3). **Важливо розуміти**, що умовне **зведення** плоскопаралельного руху до вказаного обертального **має місце лише при визначенні швидкостей точок тіла та його кутової швидкості**.

Згідно з формулою (15.6) модуль

$$v_A = AP_2 \cdot \omega_2, \quad (133.1)$$

де AP_2 – радіус обертання точки A в обертальному русі ланки 2 навколо полюса P_2 .

Оскільки у формулі (133.1) значення модуля v_A вже відомо, то із цієї формули, попередньо знайшовши віддаль AP_2 , можна встановити значення кутової швидкості ω_2 ланки 2.

Зауваження № 133.3. При розв'язуванні задачі аналітичним способом віддаль AP_2 визначають з відповідного геометричного аналізування елементів розрахункової схеми; у разі графічного розв'язування цю віддаль (як і всі інші необхідні віддалі) визначають простим вимірюванням з урахуванням масштабу довжини. Аналітичний

спосіб розв'язування передбачає знання елементарної геометрії, а графічний – необхідність зображення розрахункової схеми із суворою дотриманням обраного масштабу довжини.

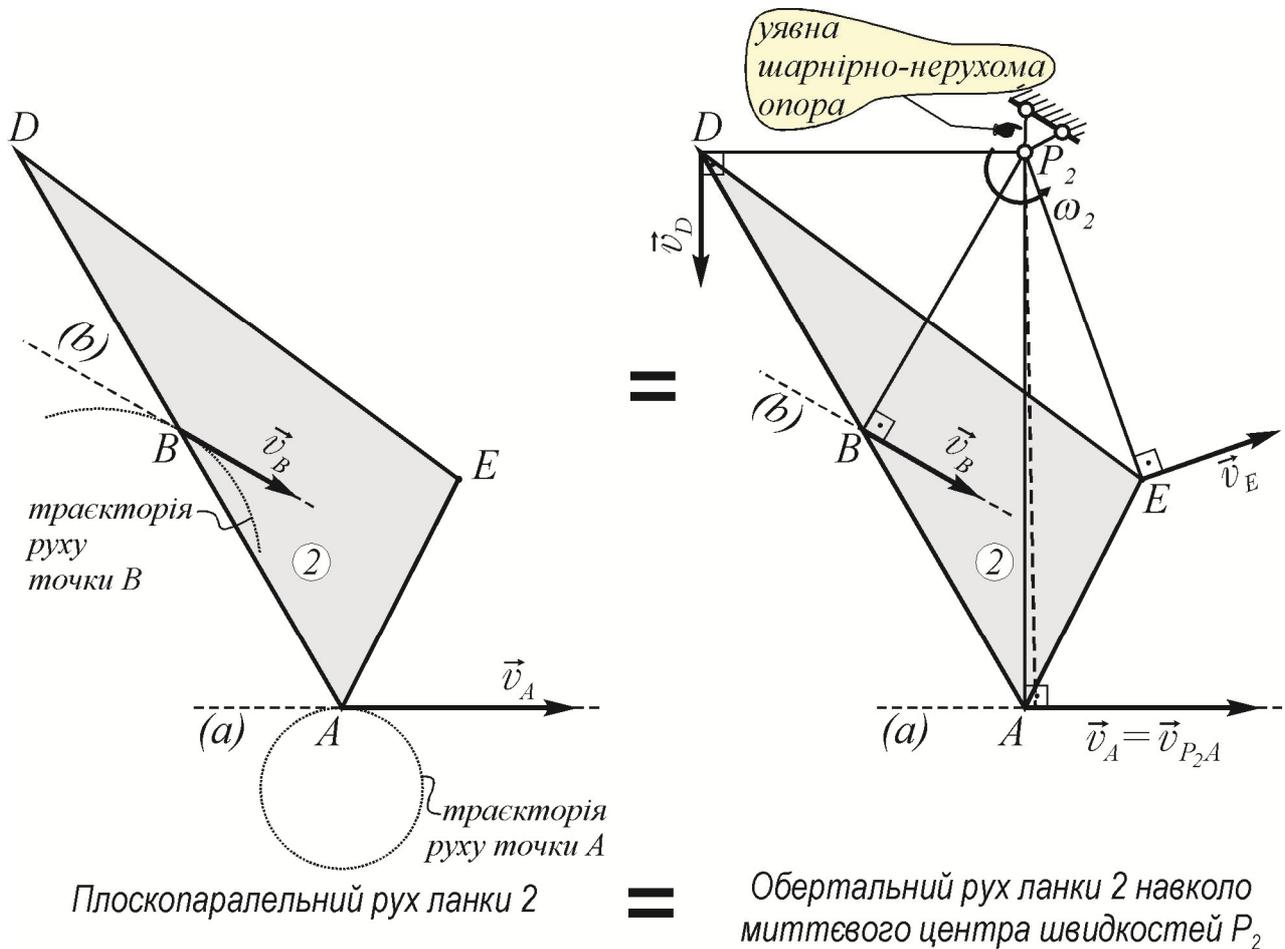


Рис. 133z.3. Зведення плоскопаралельного руху ланки 2

Довжину AP_2 визначимо з трикутника ABP_2 . З нескладного геометричного аналізу елементів розрахункової схеми (див. рис. 133z.2 та 133z.4⁵) зрозуміло, що:

$$\angle BAP_2 = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ,$$

$$\angle ABP_2 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

З урахуванням факту рівності 180° суми трьох кутів будь-якого трикутника встановлюємо, що в трикутнику ABP_2

$$\angle BP_2A = 180^\circ - \angle BAP_2 - \angle ABP_2 = 180^\circ - 30^\circ - 120^\circ = 30^\circ.$$

⁵ На рисунку 133z.4 зображені деякі елементи розрахункової схеми, які потрібні для аналітичного визначення необхідних віддалей; рисунок 133z.4 є **допоміжним** і певним **фрагментом** розрахункової схеми. При розв'язуванні будь-яких практичних задач немає ніякої потреби зображувати такий фрагмент окремим рисунком.

Оскільки виявилось, що
 $\angle BAP_2 = \angle BP_2A = 30^\circ$,

то розглядуваний трикутник ABP_2 є рівнобедреним. Опустивши у цьому трикутнику з його вершини B висоту BH та усвідомлюючи, що зазначена висота одночасно є і бісектрисою, і медіаною (див. будь-який довідник з елементарної геометрії), встановлюємо, що

$$AP_2 = 2 \cdot AH,$$

де

$$AH = AB \cdot \cos 30^\circ,$$

як катет, прилеглий до кута 30° у прямокутному трикутнику AHB . Тоді

$$AP_2 = 2 \cdot AB \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \sqrt{3} \text{ (м)}^6,$$

а з формули (133.1)

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP_2} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{3}} = 1,5 \left(\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right).$$

Урахувавши напрямок вектора \vec{v}_A (який, як це встановлено вище, одночасно є і вектором \vec{v}_{P_2A} швидкості точки A в обертальному русі ланки 2 навколо полюса P_2), зображуємо на розрахунковій схемі навколо полюса P_2 дугову стрілку, котра визначає кутову швидкість ω_2 ланки 2 у розглядуваному положенні; неважко зрозуміти, що для відповідності напрямку вектора \vec{v}_A цю дугову стрілку необхідно спрямувати проти руху годинникової стрілки (див. рис. 133z.2).

Зауваження № 133.4. На прикладі розв'язуваної задачі більш широко розглянемо ті прості міркування, які мають зняти всі труднощі

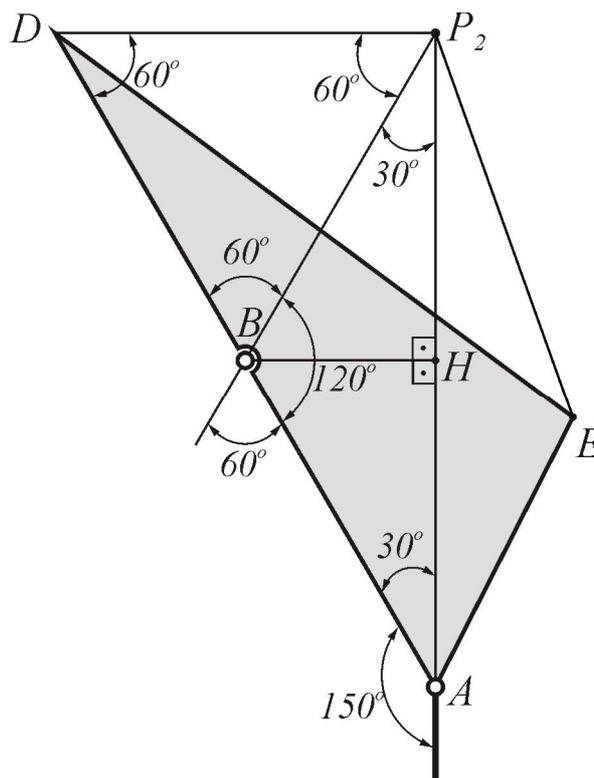


Рис. 133z.4

⁶ Звісно, що цю віддаль можна знайти й за допомогою інших положень елементарних геометрії та (чи) тригонометрії й відповідних допустимих дій.

та сумніви, що виникають у деяких студентів при встановленні напрямку обертання розглядуваної ланки за знайденим напрямком обертальної швидкості певної точки навколо миттєвого центра швидкостей цієї ланки. Отже, для встановлення напрямку обертання ланки 2 за напрямком вектора $\vec{v}_A \equiv \vec{v}_{P_2A}$ необхідно: а) аналізуючи кінематику цієї ланки, зосереджувати увагу тільки на її русі, ніяк не розглядаючи рухи інших ланок та в'язі, що обмежують та визначають ці рухи; б) уявити, що у точці P_2 розташована шарнірно-нерухома опора, через відповідний шарнір якої перпендикулярно до площини розташування механізму проходить вісь умовного миттєвого обертання цієї ланки; в) усвідомити, що напрямком вектора \vec{v}_A однозначно встановлює для радіуса AP_2 необхідність обертатися навколо вказаної уявної осі проти руху годинникової стрілки (див. також відповідне зображення на рис. 133z.3)⁷.

✎ Порівнявши встановлені значення кутової швидкості ω_2 та її напрямок із цими ж характеристиками, встановленими у задачі 123, де при дослідженні плоскопаралельного руху ланки 2 за полюс було обрано точку A , бачимо, що вибір полюса ніяк не вплинув на характеристики обертальної частини плоскопаралельного руху.

Сполучаємо точки D та E ланки 2 з полюсом P_2 відрізками DP_2 й EP_2 відповідно (див. рис. 133z.2). Згідно з формулою (15.6) модулі швидкостей точок B , D та E визначають залежності:

$$v_B = BP_2 \cdot \omega_2, \quad (133.2)$$

$$v_D = DP_2 \cdot \omega_2, \quad (133.3)$$

$$v_E = EP_2 \cdot \omega_2. \quad (133.4)$$

Оскільки трикутник ABP_2 виявився рівнобедреним, то

$$BP_2 = AB = 2 \text{ м.}$$

Довжину DP_2 визначимо, наприклад, з трикутника DBP_2 , в якому (див. рис. 133z.2 та 133z.4):

- $DB = BP_2$, і, отже, він є рівнобедреним, тоді $\angle BDP_2 = \angle BP_2D$;
- $\angle DBP_2 = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$;
- оскільки сума трьох кутів будь-якого трикутника дорівнює 180° , то в трикутнику DBP_2

⁷ Див. також **зауваження № 123.9** до задачі 123 на с. 48.

$$(\angle BDP_2 + \angle BP_2D) = 180^\circ - \angle DBP_2 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ;$$

$$\bullet \angle BDP_2 = \angle BP_2D = \frac{(\angle BDP_2 + \angle BP_2D)}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ;$$

- оскільки три кути виявилися рівними, то трикутник DBP_2 є не тільки рівнобедреним, але й *рівностороннім*, через що $DP_2 = DB = BP_2 = 2 \text{ м}$.

Дещо громіздко, але нескладно довести⁸, що $EP_2 \approx 2,16 \text{ м}$.

Урахувавши визначені віддалі, за формулами (133.2)÷(133.4) дістанемо:

$$v_B = BP_2 \cdot \omega_2 = 2 \cdot 1,5 = 3 \left(\frac{\text{м}}{\text{сек}} \right),$$

$$v_D = DP_2 \cdot \omega_2 = 2 \cdot 1,5 = 3 \left(\frac{\text{м}}{\text{сек}} \right),$$

$$v_E = EP_2 \cdot \omega_2 \approx 2,16 \cdot 1,5 \approx 3,24 \left(\frac{\text{м}}{\text{сек}} \right).$$

Зображуємо на розрахунковій схемі вектори: а) \vec{v}_B на дотичній (*b*); б) згідно з формулою (15.7) $\vec{v}_D \perp DP_2$ і $\vec{v}_E \perp EP_2$. Напрямки всіх векторів визначаємо та зображуємо відповідно до встановленого напрямку обертання ланки 2 (див. рис. 133z.2).

Розглядаючи обертальний рух ланки 3 й ураховуючи, що швидкість \vec{v}_B точки *B* цієї ланки вже відома, з формули

$$v_B = BO_3 \cdot \omega_3$$

знаходимо

$$\omega_3 = \frac{v_B}{BO_3} = \frac{3}{1} = 3 \left(\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right).$$

Зображуємо на розрахунковій схемі навколо точки O_3 дугову стрілку, яка визначає кутову швидкість ω_3 у розглядуваному положенні, встановлюючи її напрямом за напрямом вектора \vec{v}_B – за рухом годинникової стрілки (див. рис. 133z.2).

Згідно з формулою (14.9) модуль

$$v_K = KO_3 \cdot \omega_3 = 1 \cdot 3 = 3 \left(\frac{\text{м}}{\text{сек}} \right),$$

а напрямом вектора \vec{v}_K на дотичній (*k*) визначаємо та зображуємо

⁸ Бажаючим пропонується отримати це самостійно.

на розрахунковій схемі за напрямком кутової швидкості ω_3 ланки 3 (див. рис. 133z.2)⁹.

Розглядаючи плоскопаралельний рух ланки 4 оберімо за полюс *миттєвий центр швидкостей* цієї ланки – точку P_4 , швидкість v_{P_4} якої у розглядуваному положенні дорівнює нулю ($v_{P_4} = 0$). Для визначення положення точки P_4 , бачачи, що ланці 4 належать дві позначені (підписані) точки K і C , встановлюємо у точці K перпендикуляр (k^\perp) до вектора \vec{v}_K й у точці C перпендикуляр (c^\perp) до прямої (c) ; точка P_4 знаходиться на перетині перпендикулярів (k^\perp) та (c^\perp) , що й зображуємо на рисунку 133z.2.

Згідно з формулою (15.6) модулі швидкостей точок K і C (як таких, що належать ланці 4) визначають залежності:

$$v_K = KP_4 \cdot \omega_4, \quad (133.5)$$

$$v_C = CP_4 \cdot \omega_4. \quad (133.6)$$

Оскільки у формулі (133.5) модуль v_K вже відомий, то з неї, попередньо знайшовши віддаль KP_4 , встановлюємо, що

$$\omega_4 = \frac{v_K}{KP_4}^{10},$$

а на розрахунковій схемі зображуємо навколо полюса P_4 дугову стрілку, яка визначає кутову швидкість ω_4 ланки 4 у розглядуваному положенні; напрямком цієї дугової стрілки встановлюємо за напрямком вектора \vec{v}_K – проти руху годинникової стрілки (див. рис. 133z.2).

Тоді, маючи значення ω_4 та знайшовши віддаль CP_4 , за формулою (133.6) обчислюємо значення модуля v_C , а на розрахунковій схемі на дотичній (c) зображуємо вектор \vec{v}_C , встановлюючи його напрямком за напрямком кутової швидкості ω_4 (див. рис. 133z.2).

⁹ Розглянута до цього місця частина заданого механізму тотожна механізму задачі 123 (за винятком зовнішнього вигляду ланки 2, але не положень точок A , B і D цієї ланки). Звісно, що всі встановлені тут кінематичні характеристики точок і ланок повністю збігаються з відповідними характеристиками, знайденими у задачі 123.

¹⁰ Подальше розв'язування задачі проведемо у загальному вигляді, не знаходячи чисельних значень шуканих параметрів.

Розглядаючи кочення ланки 5 по нерухомій площині, оберімо за полюс її миттєвий центр швидкостей P_5 , визначення положення якого не потребує ніяких побудов, оскільки

❶ миттєвим центром швидкостей диска (як і будь-якого іншого абсолютно твердого матеріального тіла якої завгодно геометричної форми), що котиться без ковзання по нерухомій площині (або по поверхні), є точка дотику тіла до цієї нерухомої площини (поверхні).

Зображуємо відповідно точку P_5 на розрахунковій схемі на рисунку 133z.2. та за формулою (15.6) визначаємо, що модулі швидкостей точок C і F (як таких, що належать ланці 5):

$$v_C = CP_5 \cdot \omega_5, \quad (133.7)$$

$$v_F = FP_5 \cdot \omega_5. \quad (133.8)$$

Оскільки у формулі (133.7) модуль v_C вже відомий, а з умови задачі та розрахункової схеми (див. рис. 133z.2) очевидно, що

$$CP_5 = r_5 = 0,4 \text{ м},$$

то з формули (133.8) встановлюємо, що

$$\omega_5 = \frac{v_C}{r_5} = \frac{v_C}{0,4} \left(\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right),$$

а на розрахунковій схемі зображуємо навколо полюса P_5 дугову стрілку, що визначає кутову швидкість ω_5 ланки 5 у розглядуваному положенні, встановлюючи напрямок цієї стрілки за напрямком вектора \vec{v}_C – проти руху годинникової стрілки (див. рис. 133z.2).

Тоді, маючи значення ω_5 та знайшовши з прямокутного трикутника FCP_5 за теоремою Піфагора віддаль

$$FP_5 = \sqrt{(FC)^2 + (CP_5)^2} = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2r^2} = r \cdot \sqrt{2} = 0,4 \cdot \sqrt{2} \text{ (м)},$$

за формулою (133.8) обчислюємо значення

$$v_F = FP_5 \cdot \omega_5 = 0,4 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{v_C}{0,4} = \sqrt{2} \cdot v_C \left(\frac{\text{м}}{\text{сек}} \right),$$

а на розрахунковій схемі зображуємо вектор \vec{v}_F , згідно з формулою (15.7) спрямовуючи його перпендикулярно до FP_5 ($\vec{v}_F \perp FP_5$) за напрямком кутової швидкості ω_5 ланки 5 (див. рис. 133z.2).

ЗАДАЧА № 134

Для зображеного на рисунку 134z.1 положення плоского багатоланкового механізму визначити швидкості точок E , D , K , J та кутові швидкості ланок 2 і 3, якщо в цю мить приводне колесо 1 радіуса R_1 обертається проти руху годинникової стрілки навколо нерухомої осі, що проходить через точку O_1 перпендикулярно до площини знаходження механізму, маючи кутову швидкість ω_1 (вважати, що всі геометричні розміри елементів механізму та значення ω_1 відомі¹).

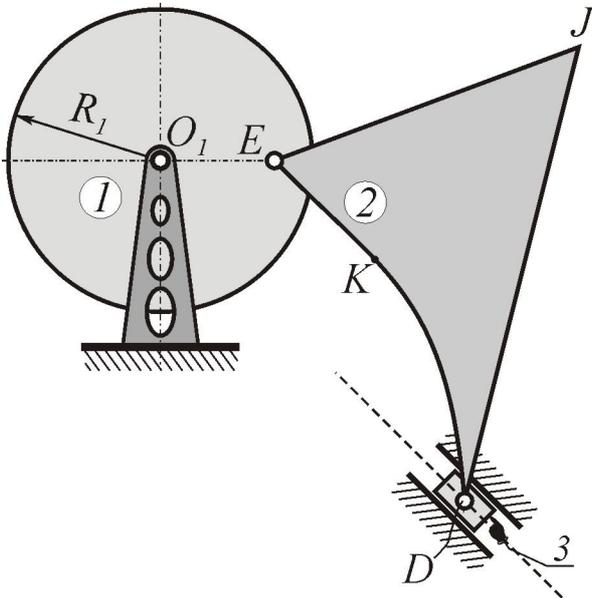


Рис. 134z.1

Досліджуючи плоскопаралельний рух, уживати поняття про *миттєвий центр швидкостей* тіла, що виконує плоскопаралельний рух.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. ПОПЕРЕДНІЙ КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМУ²

Ланка 1 виконує *обертальний* рух навколо нерухомої осі, що проходить через точку O_1 перпендикулярно до площини знаходження механізму.

Рух ланки 3 (повзуна) обмежено напрямними, які дозволяють їй рухатися лише вздовж самих напрямних, не припускаючи ніякого повороту. Через це будь-який відрізок, проведений в тілі повзуна, весь час при його русі лишається паралельним сам собі і, отже, ланка 3 виконує *поступальний* рух.

Зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 134z.2 траєкторії рухів точок E (як такої, що належить ланці 1) і D (як такої, що належить ланці 3) та відповідні дотичні (e) і (d), усвідомлюю-

¹ Розв'яжімо задачу в загальному вигляді, не знаходячи чисельних значень шуканих параметрів.

² Див. виноску 3 до задачі 123 на с. 36.

чи, що дотична (d) повністю збігається з траєкторією руху точки D , та розуміючи, що обов'язково на дотичній (e) має бути розташованим вектор \vec{v}_E , а на дотичній (d) – вектор \vec{v}_D .

Оскільки при русі механізму: а) будь-який відрізок, наприклад EJ , ланки 2 не лишається паралельним сам собі, то ця ланка не виконує поступальний рух; б) у ланки 2 немає нерухомої точки, через яку проходила б вісь її обертання, то ця ланка не виконує обертального руху; в) усі точки цієї ланки рухаються тільки в площині розташування механізму, то ланка 2 виконує плоскопаралельний рух.

Через те, що точки K та J належать тільки ланці 2, яка виконує складний плоский рух, указати будь-які кінематичні характеристики цих точок без застосування відповідних формул і обчислень неможливо.

2. ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТЕЙ ТОЧОК І КУТОВИХ ШВИДКОСТЕЙ ЛАНОК

Розглядаючи **обертальний рух ланки 1**, модуль швидкості її точки E визначаємо за формулою (14.9)

$$v_E = EO_1 \cdot \omega_1.$$

Зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 134z.2 на дотичній (e) вектор \vec{v}_E швидкості точки E , встановлюючи його напрямком за напрямком заданої в умові кутової швидкості ω_1 .

Розглядаючи **плоскопаралельний рух ланки 2**, оберімо за полюс миттєвий центр швидкостей цієї ланки – точку P_2 , швидкість v_{P_2} якої у розглядуваному положенні механізму дорівнює нулю ($v_{P_2} = 0$). Попередньо зауважуємо, що ланці 2 належать дві точки E і D , для яких вже відомі певні кінематичні характеристики: для точки E – її траєкторія руху, дотична (e) та швидкість \vec{v}_E , а для точки D – її траєкторія руху та дотична (d). Тоді для визначення положення точки P_2 встановлюємо у точці E перпендикуляр (e^\perp) до вектора \vec{v}_E й у точці D перпендикуляр (d^\perp) до дотичної (d); точка P_2 знаходиться на перетині перпендикулярів (e^\perp) та (d^\perp), що і зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 134z.2.

Відповідно до формули (15.6) модулі швидкостей точок E і D (як таких, що належать ланці 2) визначають залежності

$$v_E = EP_2 \cdot \omega_2 \quad (134.1)$$

та

$$v_D = DP_2 \cdot \omega_2. \quad (134.2)$$

Оскільки у формулі (134.1) модуль v_E вже відомий, то з неї, попередньо знайшовши віддаль EP_2 ³, встановлюємо, що

$$\omega_2 = \frac{v_E}{EP_2},$$

а на розрахунковій схемі на рисунку 134z.2 зображуємо навколо полюса P_2 дугову стрілку, яка визначає кутову швидкість ω_2 ланки 2 у розглядуваному положенні, встановлюючи напрямок цієї стрілки за напрямком вектора \vec{v}_E – за рухом годинникової стрілки⁴.

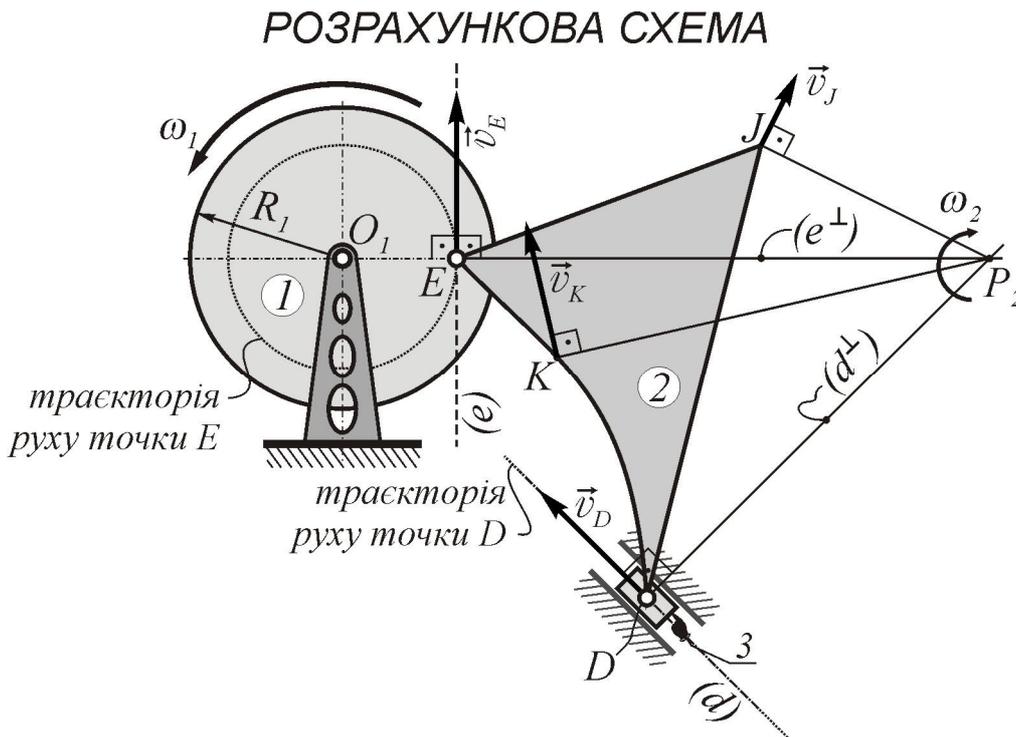


Рис. 134z.2

Тоді, маючи значення ω_2 та знайшовши віддаль DP_2 , за формулою (134.2) обчислюємо значення модуля v_D , а на розрахунко-

³ Див. **зауваження № 133.3** до задачі 133 на с. 86÷87.

⁴ Див. **зауваження № 133.4** до задачі 133 на с. 88÷89.

вій схемі на дотичній (d) зображуємо вектор \vec{v}_D , встановлюючи його напрямком за напрямком кутової швидкості ω_2 ланки 2 (див. рис. 134z.2).

Сполучивши точки K і J ланки 2 з полюсом P_2 відрізками KP_2 та JP_2 відповідно (див. рис. 134z.2), за формулою (15.6) обчислюємо модулі швидкостей цих точок

$$v_K = KP_2 \cdot \omega_2$$

і

$$v_J = JP_2 \cdot \omega_2.$$

Згідно з формулою (15.7) зображуємо на розрахунковій схемі вектори $\vec{v}_K \perp KP_2$ і $\vec{v}_J \perp JP_2$, визначаючи напрямки обох відповідно до встановленого напрямку кутової швидкості ω_2 ланки 2 (див. рис. 134z.2).

Оскільки точка D , крім ланки 2, належить і ланці 3, котра за умовою задачі виконує поступальний прямолінійний рух, то

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_D$$

та

$$v_3 = v_D,$$

де \vec{v}_3 і v_3 – вектор і модуль швидкості поступального руху повзуна 3.

ЗАДАЧА № 135

Колесо радіусом $r = 45 \text{ см}$ котиться без ковзання вниз по похилій до горизонту під кутом $\psi = 10^\circ$ нерухомій прямолінійній ділянці шляху так, що центр C колеса рухається зі сталою швидкістю $v_C = 90 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$ (див. рис. 135z.1 і задачу 124).

Використовуючи поняття про миттєвий центр швидкостей тіла, що виконує плоскопаралельний рух, установити швидкість довільної точки M обода колеса залежно від значення кута $MKT = \alpha$, де KT – діаметр колеса, що проходить через точку K дотику колеса до нерухомого шляху. Знайти швидкість \vec{v}_M при $\alpha = 60^\circ$.

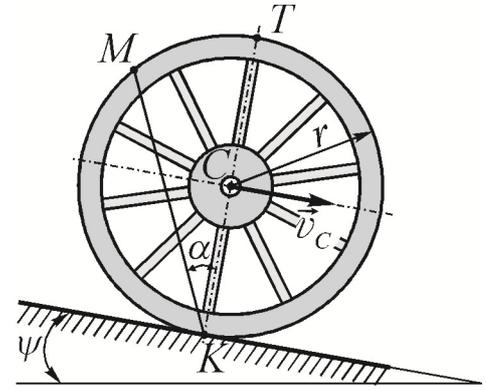


Рис. 135z.1

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Оскільки:

- точка C є центром колеса, яке виконує особливий вид плоскопаралельного руху – *кочення без ковзання нерухомим прямолінійним шляхом*, то ця точка при коченні колеса не може ні наблизитися, ні віддалитися від цього шляху¹, через що траєкторією руху точки C є паралельна до шляху, по якому котиться колесо, *пряма*;
- колесо котиться, торкаючись у заданому його положенні нерухомого шляху точкою K , то швидкість $v_K = 0$; тобто у цю мить точка K і є миттєвим центром швидкостей P колеса.

Зображуємо на розрахунковій схемі: а) траєкторією руху точки C ; б) дотичну (c) до цієї траєкторії руху, усвідомлюючи, що у цьому разі дотична (c) повністю збігається із самою траєкторією, а вектор \vec{v}_C розташований на цій дотичній; в) миттєвий центр швидкостей колеса $P \equiv K$ (див. рис. 135z.2).

Обираючи точку P за полюс, відповідно до формули (15.6) записуємо, що модуль

¹ Див. також на с. 54 відповідний пункт задачі 124.

$$v_C = CP \cdot \omega, \quad (135.1)$$

де CP – радіус обертання точки C в обертальному русі колеса відносно полюса P ; безсумнівно $CP = r$.

Тоді з формули (135.1) кутова швидкість колеса

$$\omega = \frac{v_C}{CP} = \frac{v_C}{r} \quad \text{або} \quad \omega = \frac{v_C}{r} = \frac{90}{45} = 2 \left(\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right).$$

На розрахунковій схемі на рисунку 135z.2 навколо полюса P зображуємо дугову стрілку, позначивши її ω ; вона визначає напрямок обертання колеса у розглядуваному положенні (звісно, напрямок цієї дугової стрілки узгоджуємо з напрямком вектора \vec{v}_C).

✎ Порівнявши знайдені значення кутової швидкості ω і її напрямок із цими ж характеристиками, встановленими у задачі 124, де при дослідженні кочення колеса за полюс обиралася точка C , бачимо, що вибір полюса ніяк не вплинув на характеристики обертальної частини плоскопаралельного руху.

Знову таки, згідно з формулами (15.6) і (15.7) записуємо, що модуль

$$v_M = MP \cdot \omega, \quad (135.2)$$

а вектор

$$\vec{v}_M \perp MP, \quad (*)$$

де MP – радіус обертання точки M в обертальному русі колеса навколо полюса P .

Для знаходження віддалі MP і положення вектора \vec{v}_M уявимо й проаналізуємо кут TMP . З урахуванням того, що T , M і $P \equiv K$ – це точки кола, яке утворює обід розглядуваного колеса, то відповідно до положень елементарної геометрії $\angle TMP$ – уписаний кут з вершиною у точці M ; оскільки ж цей уписаний кут спирається на півкола (чи на діаметр KT), то він є прямим (див. будь-який довідник з елементарної геометрії). Тобто

$$MT \perp MP. \quad (**)$$

Через те, що за умовою задачі M – це довільна точка обода, виконаний вище аналіз кута TMP і порівняння формул (*) та (**) дозволяють сформулювати важливий **ВИСНОВОК**:

Ⓢ **вектор \vec{v}_M швидкості будь-якої точки M обода** колеса (або **кола** круга), що котиться без ковзання по нерухомій поверхні, у кожному положенні колеса **утворює прямий кут** із

відрізком MP , котрий сполучає цю точку з *миттєвим центром швидкостей* P колеса (круга), який у кожний і в будь-який момент часу знаходиться у точці дотику колеса (круга) до нерухомої поверхні, та лежить на прямій, котра **проходить через** розглядувану точку M і **верхню точку T діаметра**, що проходить через миттєвий центр швидкостей P .

Тепер із прямокутного *трикутника TMP* (у якому TP – гіпотенуза, а MT і MP – катети) встановлюємо, що прилеглий до заданого в умові задачі кута α катет

$$MP = TP \cdot \cos \alpha = 2r \cdot \cos \alpha .$$

Остаточно за формулою (135.2) встановлюємо, що

$$v_M = MP \cdot \omega = 2r \cdot \cos \alpha \cdot \frac{v_C}{r} = 2v_C \cdot \cos \alpha \quad (135.3)$$

або

$$v_M = 2 \cdot v_C \cdot \cos \alpha = 2 \cdot 90 \cdot \cos \alpha = 180 \cdot \cos \alpha \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right). \quad (135.3)$$

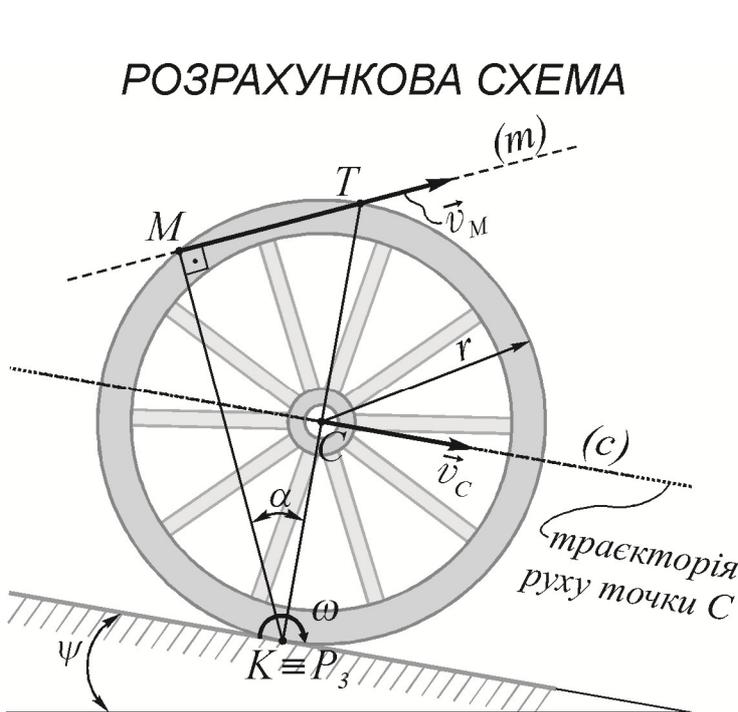


Рис. 135z.2

Узявши до уваги, що $v_C = 90 = const$, бачимо, що встановлена формула (135.3) містить сталий множник $2v_C = 180$ і змінний множник $\cos \alpha$, який власне й визначає положення розглядуваної точки на ободі колеса. З рисунка 135z.2 неважко зрозуміти, що кут α змінюється у межах $[0; 90^\circ]$, що зумовлює відповідні зміни множника $\cos \alpha$ у межах $[1; 0]$ і значення v_M у межах $[2v_C; 0]$.

Оскільки значення $\alpha = 0$ визначає положення точки T , то порівняно зі швидкостями інших точок обода колеса швидкість цієї точки має найбільше значення

$$v_T = 2 \cdot v_C .$$

На рисунку 135z.3 зображено довільні точки A , B та D обода колеса (положення яких визначають відповідні кути α_A , α_B і α_D) та вектори \vec{v}_A , \vec{v}_B і \vec{v}_D швидкостей цих точок. Згідно з формулою (15.7) указані вектори відповідно утворюють прямі кути з відрізками AP , BP і DP й, звичайно, лежать на відрізках AT , BT і DT . Вектори ж \vec{v}_A , \vec{v}_B та \vec{v}_D , зображені з урахуванням того, що за формулою (15.6) їх модулі

$$v_A = AP \cdot \omega,$$

$$v_B = BP \cdot \omega,$$

$$v_D = DP \cdot \omega,$$

тобто пропорційні найкоротшим віддалям AP , BP і DP від цих точок до миттєвого центра швидкостей P .

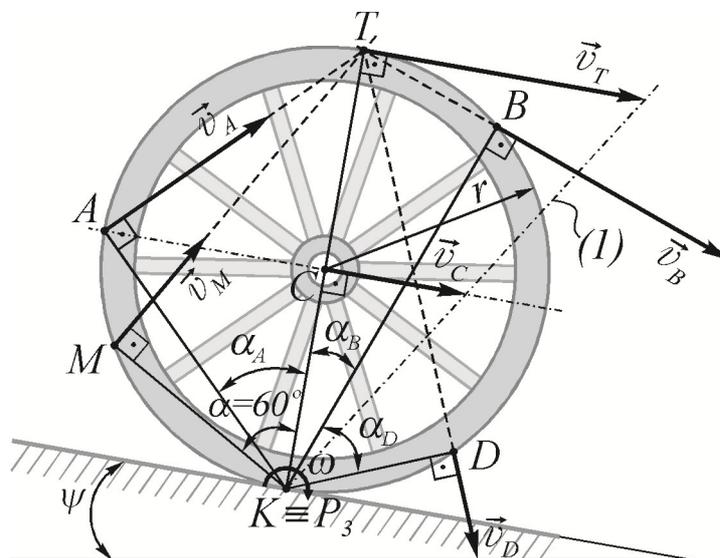


Рис. 135z.3

Також на цьому рисунку зображені вектори швидкостей точок T та M обода (положення останньої точки визначає заданий в умові задачі кут $\alpha = 60^\circ$). Певна річ, вектор $\vec{v}_T \perp TP$, а вектор $\vec{v}_M \perp MK$ і лежить на відрізку MT . За формулою (135.3) при $\alpha = 60^\circ$ модуль

$$v_M = 2 \cdot v_C \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot v_C \cdot \frac{1}{2} = v_C = 90 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right).$$

Загостримо увагу на тому, що всі встановлені значення та висновки виявилися ніяк не залежними від кута ψ нахилу до горизонту прямолінійного шляху, по якому котиться розглядуване колесо. Тобто

❶ у кожному випадку кочення того чи іншого колеса (круга) по будь-як розташованій нерухомій поверхні розподіл швидкостей точок обода цього колеса (круга) буде аналогічним до отриманого у цій задачі.

ЗАДАЧА № 136

Для зображеного на рисунку 136z.1 положення багатоланкового механізму знайти швидкості точок F , B , C й A та кутові швидкості ланок 2 і 3, якщо $O_1F = 2,5\text{ см}$, $FB = 20\text{ см}$, $AB = AF$, $BC = 10\text{ см}$, $O_3B = 20\text{ см}$ і в цей момент часу приводне колесо 1 радіуса $R_1 = 6\text{ см}$ обертається за рухом годинникової стрілки з кутовою швидкістю $\omega_1 = 8 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$ (див. також задачу 127).

При розв'язуванні задачі, досліджуючи плоскопаралельний рух, застосувати поняття про *миттєвий центр швидкостей* тіла, що виконує плоскопаралельний рух.

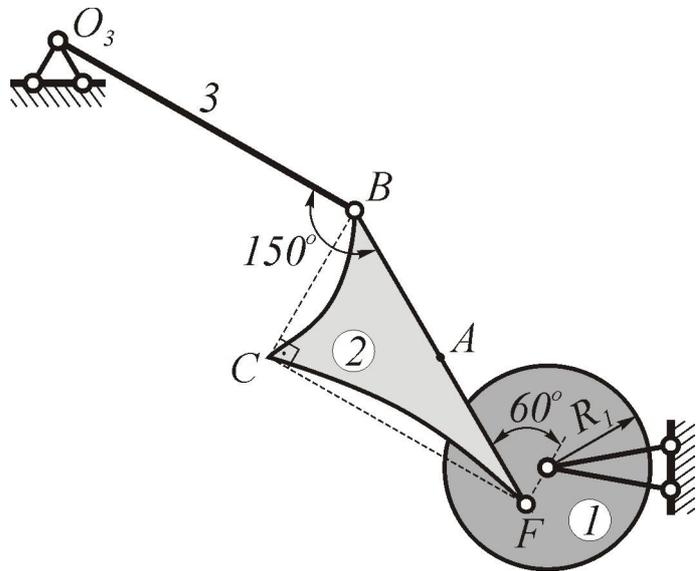


Рис. 136z.1

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Пропонується розв'язати задачу самостійно та звірити власний розв'язок із наведеним.

1. ПОПЕРЕДНІЙ КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМУ

Механізм складається з трьох ланок. Ланки 1 та 3 виконують обертальні рухи навколо нерухомих осей, які проходять через нерухомі точки O_1 й O_3 перпендикулярно до площини знаходження механізму, а ланка 2 виконує плоскопаралельний рух; зображуємо на розрахунковій схемі на рис. 136z.2 траєкторії рухів точок F та B і відповідні дотичні (f) та (b)¹.

2. ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТЕЙ ТОЧОК І КУТОВИХ ШВИДКОСТЕЙ ЛАНОК

Оскільки ланка 1 виконує обертальний рух, то за формулою (14.9) знаходимо модуль v_F швидкості точки F

$$v_F = FO_1 \cdot \omega_1 = 2,5 \cdot 8 = 20 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right).$$

¹ Див. також на с. 75 ÷ 76 відповідний пункт задачі 127.

Зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 136z.2 на дотичній (f) вектор \vec{v}_F обертальної швидкості точки F , устанавлюючи його напрямком за напрямком кутової швидкості ω_1 .

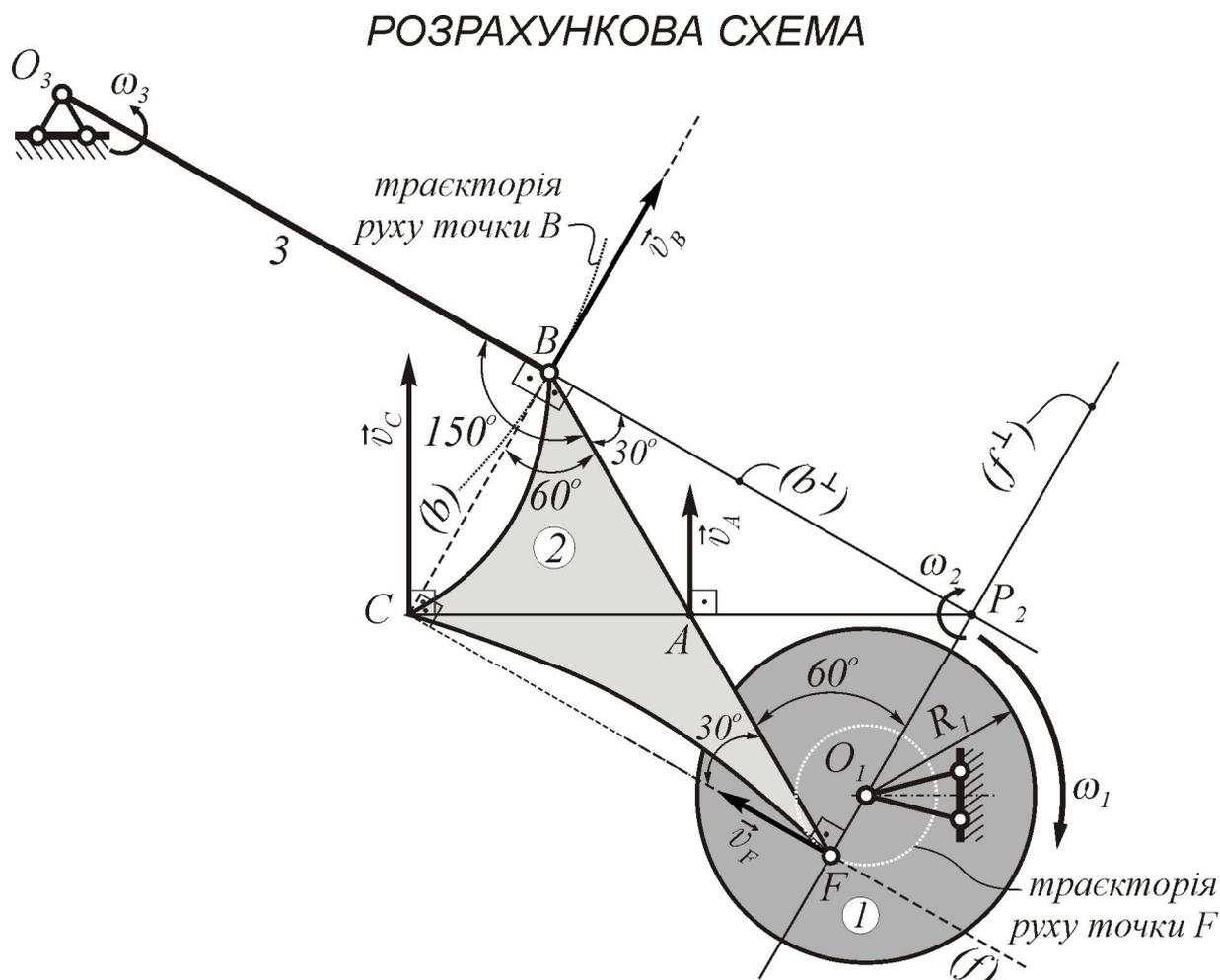


Рис. 136z.2

Для ланки 2, яка виконує плоскопаралельний рух, знайдемо положення її миттєвого центра швидкостей P_2 , для чого: встановлюємо у точці F перпендикуляр (f^\perp) до вектора \vec{v}_F та у точці B перпендикуляр (b^\perp) до прямої (b) ; точка P_2 , швидкість v_{P_2} котрої у розглядуваному положенні механізму дорівнює нулю ($v_{P_2} = 0$), знаходиться на перетині перпендикулярів (f^\perp) і (b^\perp). Зображуємо точку P_2 на розрахунковій схемі та сполучаємо її з точками A й C відрізками AP_2 та CP_2 відповідно (див. рис. 136z.2).

Тоді відповідно до формули (15.6) модулі швидкостей точок F , A , B і C визначають відповідно залежності:

$$v_F = FP_2 \cdot \omega_2 \quad (136.1)$$

та

$$\left. \begin{aligned} v_A &= AP_2 \cdot \omega_2, \\ v_B &= BP_2 \cdot \omega_2, \\ v_C &= CP_2 \cdot \omega_2, \end{aligned} \right\} \quad (136.2)$$

де, наприклад, FP_2 – радіус обертання точки F в обертальному русі ланки 2 навколо полюса P_2 .

З нескладного геометричного аналізу³ трикутника P_2FB (див. рис. 136z.2) зрозуміло, що:

- $\angle FBP_2 = 30^\circ$, $\angle FP_2B = 90^\circ$;
- $FP_2 = \frac{FB}{2} = \frac{20}{2} = 10(\text{см})$ – як катет у прямокутному трикутнику P_2FB , що лежить проти кута 30° ;
- $BP_2 = \sqrt{(FB)^2 - (FP_2)^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \approx 17,32(\text{см})$ – за теоремою Піфагора.

Аналізуючи довжини сторін та кути чотирикутника P_2FCB , доходимо висновку, що він є *прямокутником*, діагоналі якого

$$CP_2 = FB = 20 \text{ см},$$

а

$$AP_2 = \frac{CP_2}{2} = \frac{20}{2} = 10(\text{см}).$$

Тоді з формули (136.1) знаходимо модуль

$$\omega_2 = \frac{v_F}{FP_2} = \frac{20}{10} = 2 \left(\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right).$$

Зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 136z.2 навколо точки P_2 дугову стрілку, яка визначає кутову швидкість ω_2 ланки 2 у розглядуваному положенні; напрямок цієї дугової стрілки (за рухом годинникової стрілки) встановлюємо за напрямком вектора \vec{v}_F , розуміючи, що цей вектор безперечно визначає і век-

² Див. **зауваження № 133.2** до задачі 133 на с. 86.

³ Див. **зауваження № 133.3** до задачі 133 на с. 86÷87.

тор \vec{v}_{P_2F} обертальної швидкості точки F в обертальному русі ланки 2 навколо полюса P_2 .

Зауваження № 136.1. Іще раз розглянемо «труднощі та сумніви» при встановленні напрямку обертання ланки 2 за напрямком вектора $\vec{v}_F \equiv \vec{v}_{P_2F}$. Тож, для вирішення цього питання необхідно: а) аналізуючи кінематику цієї ланки, не звертати ніякої уваги на рухи інших ланок та в'язі, що обмежують і визначають ці рухи; б) уявити, що через точку P_2 перпендикулярно до площини розташування механізму проходить вісь умовного миттєвого обертання цієї ланки; в) усвідомити, що напрямок вектора \vec{v}_F однозначно встановлює для радіуса FP_2 необхідність обертатися навколо зазначеної осі за рухом годинникової стрілки (див. рис. 136z.3)⁴.

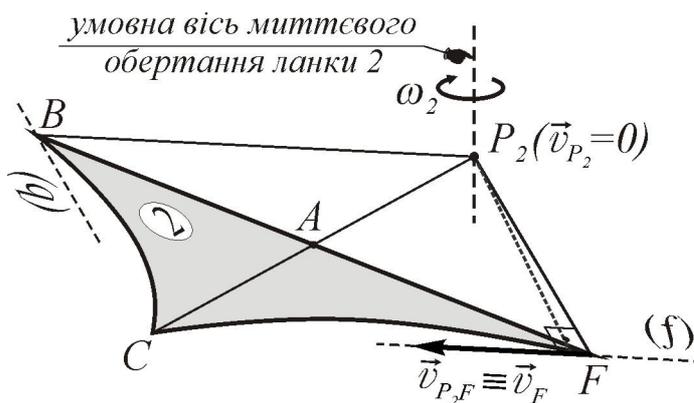


Рисунок 136z.3

✎ Порівнявши встановлені значення кутової швидкості ω_2 та її напрямок із цими ж характеристиками, встановленими в у задачі 127, де при дослідженні плоскопаралельного руху ланки 2 за полюс обиралася точка F , бачимо, що **вибір полюса ніяк не вплинув на характеристики обертальної частини плоскопаралельного руху.**

Маючи значення ω_2 , за формулами (136.2) встановлюємо, що модулі

$$v_A = AP_2 \cdot \omega_2 = 10 \cdot 2 = 20 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right),$$

$$v_B = BP_2 \cdot \omega_2 = 10\sqrt{3} \cdot 2 = 20\sqrt{3} \approx 34,64 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right),$$

$$v_C = CP_2 \cdot \omega_2 = 20 \cdot 2 = 40 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right).$$

⁴ Див. також **зауваження № 133.4** до задачі 133 на с. 88÷89.

Зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 136z.2 за напрямком кутової швидкості ω_2 ланки 2:

1) вектор \vec{v}_A , згідно з формулою (15.7) спрямовуючи його перпендикулярно до відрізка AP_2 ($\vec{v}_A \perp AP_2$);

2) вектор \vec{v}_B (на дотичній (b));

3) вектор \vec{v}_C , згідно з формулою (15.7) спрямовуючи його перпендикулярно до відрізка CP_2 ($\vec{v}_C \perp CP_2$).

Оскільки ланка 3 виконує обертальний рух, то за формулою (14.9)

$$v_B = BO_3 \cdot \omega_3,$$

звідки модуль кутової швидкості ланки 3

$$\omega_3 = \frac{v_B}{BO_3} = \frac{20\sqrt{3}}{20} = \sqrt{3} \approx 1,73 \left(\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right).$$

Зображуємо на розрахунковій схемі навколо точки O_3 дугову стрілку, яка визначає кутову швидкість ω_3 ланки 3 у розглядуваному положенні механізму; напрямок цієї дугової стрілки встановлюємо за напрямком вектора \vec{v}_B – проти руху годинникової стрілки (див. рис. 136z.2)⁵.

⁵ Безсумнівно, встановлені тут кінематичні характеристики усіх точок і ланок механізму повністю збігаються з відповідними характеристиками, знайденими у задачі 127 (див. с. 75 ÷ 82).

ЗАДАЧА № 137

Циліндрична втулка I багатоланкового механізму ковзає праворуч по нерухомій горизонтальній циліндричній штанзі AE зі швидкістю $v_1 = 15 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$. Для зображеного на рисунку 137z.1 положення механізму знайти швидкості точок B , D і C та кутові швидкості ланок 2 і 3 , якщо $BD = 24 \text{ см}$, $BC = CD$, $O_3D = 10 \text{ см}$ і в цю мить $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{3}{5}$ (див. також задачу 125).

Розв'язуючи задачу, при дослідженні плоскопаралельного руху застосовувати поняття про *миттєвий центр швидкостей* тіла, що виконує плоскопаралельний рух.

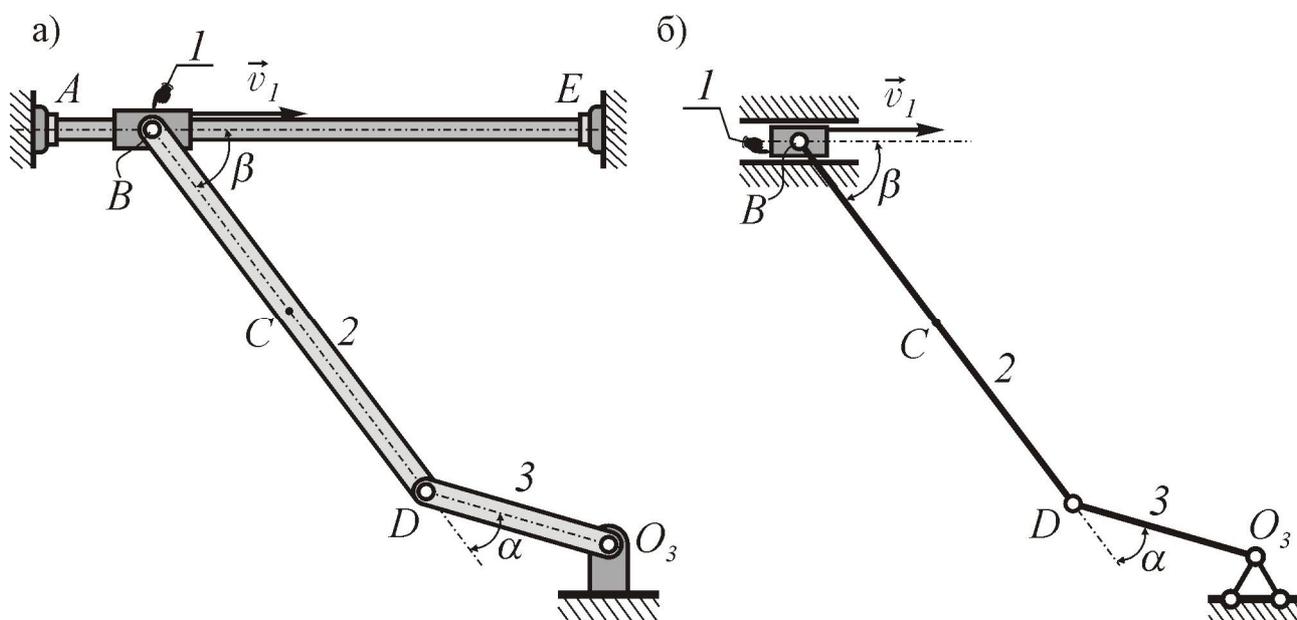


Рис. 137z.1. Багатоланковий механізм:

а) схематичне зображення; б) кінематична схема

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Пропонується розв'язати задачу самостійно та звірити власний розв'язок із наведеним.

1. ПОПЕРЕДНІЙ КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМУ

Механізм складається з трьох ланок. Ланка I (циліндрична втулка) рухається поступально прямолінійно по штанзі AE . Ланка 3 (кривошип O_3D) виконує обертальний рух навколо нерухомої осі, що проходить через точку O_3 перпендикулярно до площини

знаходження механізму. Ланка 2 (шатун BD) виконує плоскопаралельний рух. Зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 137z.2 траєкторії рухів точки B (як такої, що належить ланці 1) і точки D (як такої, що належить ланці 3) та відповідні дотичні (b) і (d), розуміючи, що обов'язково на дотичній (b) має бути розташованим вектор \vec{v}_B , а на дотичній (d) – вектор \vec{v}_D ¹.

2. ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТЕЙ ТОЧОК І КУТОВИХ ШВИДКОСТЕЙ ЛАНОК

Оскільки за умовою задачі ланка 1 виконує поступальний прямолінійний рух зі швидкістю $v_1 = 15 \frac{см}{сек}$, а точка B належить цій ланці, то

$$\vec{v}_B = \vec{v}_1$$

і

$$v_B = v_1 = 15 \frac{см}{сек}.$$

Зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 137z.2 на дотичній (b) вектор \vec{v}_B швидкості точки B .

Для ланки 2, яка виконує плоскопаралельний рух, знайдемо положення її миттєвого центра швидкостей P_2 : встановлюємо у точці B перпендикуляр (b^\perp) до вектора \vec{v}_B та у точці D перпендикуляр (d^\perp) до прямої (d); точка P_2 , швидкість v_{P_2} якої у розглядуваному положенні механізму дорівнює нулю ($v_{P_2} = 0$), знаходиться на перетині перпендикулярів (b^\perp) та (d^\perp). Зображуємо точку P_2 на розрахунковій схемі та сполучаємо її з точкою C відрізком CP_2 (див. рис. 137z.2).

Згідно з формулою (15.6) модулі швидкостей точок B , D і C визначають відповідно залежності:

$$v_B = BP_2 \cdot \omega_2 \quad (137.1)$$

й

$$\left. \begin{aligned} v_D &= DP_2 \cdot \omega_2, \\ v_C &= CP_2 \cdot \omega_2, \end{aligned} \right\} \quad (137.2)$$

¹ Див. також на с. 61 ÷ 62 відповідний пункт задачі 125.

де, наприклад, BP_2 – радіус обертання точки B в обертальному русі ланки 2 навколо полюса P_2 ².

Розглянемо на рисунку 137z.2 необхідні геометричні об'єкти розрахункової схеми та знайдемо³ довжини відповідних відрізків, потрібних для подальшого розв'язування задачі.

Аналіз трикутника P_2DB приводить до висновків:

- $\angle BDP_2 = \alpha$, як вертикальний кут до заданого в умові задачі кута α ;
- $\angle DBP_2 = 90^\circ - \beta$;
- оскільки $\sin(90^\circ - \beta) = \cos \beta$ (див. будь-який довідник з елементарної тригонометрії), а за умовою задачі $\sin \alpha = \cos \beta$, то в нашому разі $(90^\circ - \beta) = \alpha$, і, отже, в розглядуваному трикутнику P_2DB

$$\angle DBP_2 = \alpha;$$

- трикутник P_2DB є рівнобедреним і його сторони

$$BP_2 = DP_2;$$

- оскільки за умовою задачі $BC = CD = \frac{BD}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ см}$, то в рівнобедреному трикутнику P_2DB відрізок P_2C є медіаною та одночасно висотою і бісектрисою.

Розглядаючи прямокутний трикутник P_2CD , очевидно, що:

- оскільки прилеглий до кута α катет $CD = DP_2 \cdot \cos \alpha$, то

$$DP_2 = \frac{CD}{\cos \alpha} = \frac{12}{\frac{4}{5}} = 3 \cdot 5 = 15(\text{см});$$

- $CP_2 = \sqrt{(DP_2)^2 - (CD)^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9(\text{см})$ – за теоремою Піфагора.

При обчисленні враховано, що, як відомо з елементарної тригонометрії, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, та знайдено значення $\cos \alpha$, якого не задано в умові задачі,

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25 - 9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

² Див. зауваження № 133.2 до задачі 133 на с. 86.

³ Див. зауваження № 133.3 до задачі 133 на с. 86 ÷ 87.

Тоді з формули (137.1) встановлюємо, що

$$\omega_2 = \frac{v_B}{BP_2} = \frac{15}{15} = 1 \left(\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right).$$

Зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 137z.2 навколо точки P_2 дугову стрілку, яка визначає кутову швидкість ω_2 ; напрямок цієї дугової стрілки (за рухом годинникової стрілки) встановлюємо за напрямком вектора \vec{v}_B , розуміючи, що цей вектор однозначно визначає і вектор \vec{v}_{P_2B} обертальної швидкості точки B в обертальному русі ланки 2 навколо полюса P_2 ⁴.

✎ Порівнявши встановлені значення кутової швидкості ω_2 та її напрямок із цими ж характеристиками, встановленими у задачі 125, де при дослідженні плоскопаралельного руху ланки 2 за полюс обиралася точка B , бачимо, що **вибір полюса ніяк не вплинув на характеристики обертальної частини плоскопаралельного руху.**

РОЗРАХУНКОВА СХЕМА

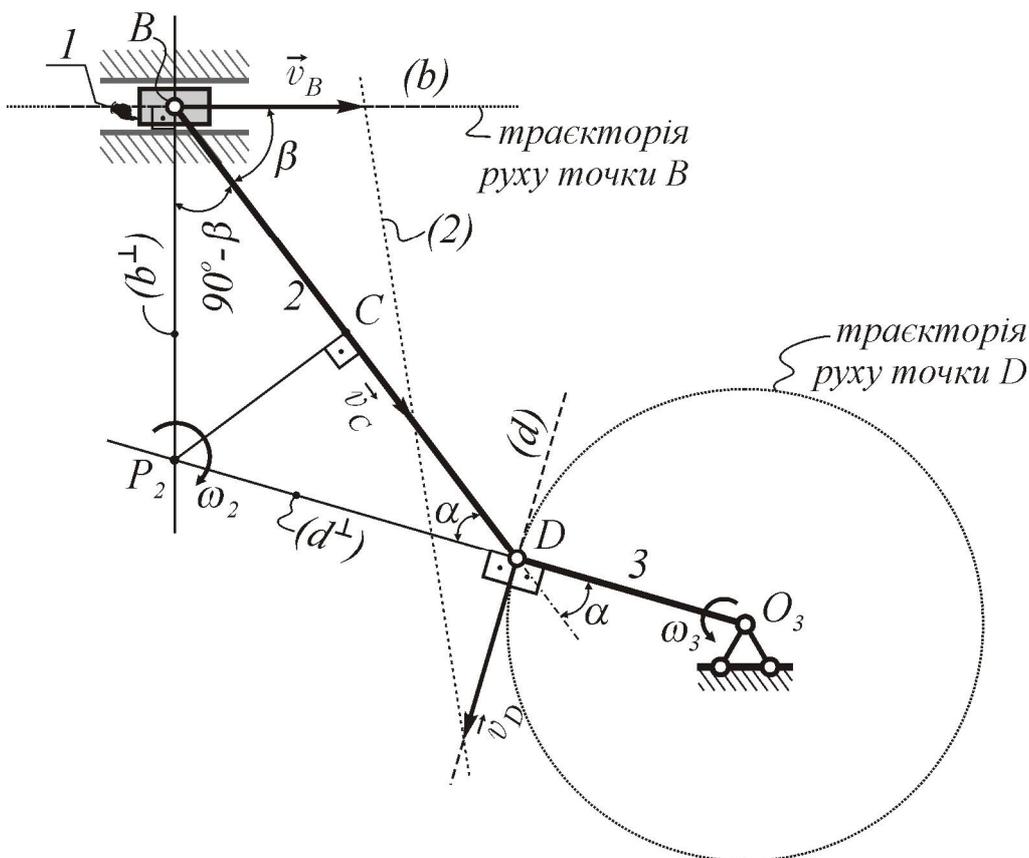


Рис. 137z.2

⁴ Див. зауваження № 136.1 до задачі 136 на с. 104.

Маючи значення ω_2 , за формулами (137.2) дістанемо:

$$v_D = DP_2 \cdot \omega_2 = 15 \cdot 1 = 15 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right),$$

$$v_C = CP_2 \cdot \omega_2 = 9 \cdot 1 = 9 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right).$$

Зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 137z.2 за напрямком кутової швидкості ω_2 :

- вектор \vec{v}_D (на дотичній (d));
- вектор \vec{v}_C , спрямовуючи його згідно з формулою (15.7) перпендикулярно до відрізка CP_2 ($\vec{v}_C \perp CP_2$).

❏ Якщо відкласти всі знайдені значення швидкостей з дотриманням масштабу швидкостей, то відповідно до **наслідку 2** з теореми про швидкості точок при плоскопаралельному русі тіла (див. §15.3) кінці векторів \vec{v}_B , \vec{v}_C та \vec{v}_D швидкостей відповідних точок відрізка BD обов'язково мають знаходитися на одній прямій (див. на розрахунковій схемі на рисунку 137z.2 пряму (2))⁵.

Оскільки ланка 3 виконує обертальний рух, то відповідно до формули (14.9)

$$v_D = DO_3 \cdot \omega_3,$$

звідки, маючи вже значення v_D , встановлюємо

$$\omega_3 = \frac{v_D}{DO_3} = \frac{15}{10} = 1,5 \left(\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right).$$

Зображуємо на розрахунковій схемі навколо точки O_3 дугову стрілку, яка визначає кутову швидкість ω_3 ланки 3 у розглядуваному положенні механізму; напрямок цієї дугової стрілки встановлюємо за напрямком вектора \vec{v}_D – проти руху годинникової стрілки (див. рис. 137z.2)⁶.

⁵ Див. **зауваження № 123.10** до задачі 123 на с. 49 ÷ 50.

⁶ Звісно, що всі встановлені тут кінематичні характеристики точок і ланок повністю збігаються з відповідними характеристиками, знайденими у задачі 125.

ЗАДАЧА № 138

Пластина ADE невідомого технологічного призначення, яку сприймати за ланку 1 , приєднана шарнірами D й E відповідно до повзунів 2 та 3 , рух яких обмежено напрямними, похиленими під кутом ψ до горизонту

кожна.

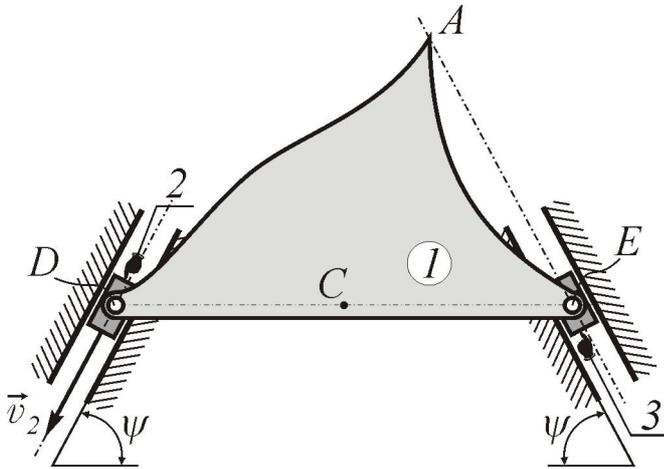


Рис. 138z.1.

Використовуючи поняття про *миттєвий центр швидкостей* тіла, що виконує плоскопаралельний рух, знайти швидкості точок D , E , A і C пластини та її кутову швидкість ω_1 для моменту часу, коли сторона DE пластини перебуває у горизонтальному положенні, якщо в цю мить

повзун 2 ковзає вздовж своїх напрямних зі швидкістю $v_2 = 68 \text{ см/сек}$ (див. рис. 138z.1), а $DE = 60 \text{ см}$, $DC = CE$, $EA = 40 \text{ см}$, $\sin \psi = \frac{15}{17}$ (див. також задачу 126).

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Пропонується розв'язати задачу самостійно та звірити власний розв'язок із наведеним.

1. ПОПЕРЕДНІЙ КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМУ

Зі схематичного зображення механізму видно, що він складається з трьох ланок: ланки 2 і 3 (повзуни) виконують поступальні прямолінійні рухи (кожна вздовж своїх напрямних), а ланка 1 виконує плоскопаралельний рух; зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 138z.2 траєкторії рухів точки D (як такої, що належить ланці 2) й точки E (як такої, що належить ланці 3) і відповідні дотичні (d) та (e), які повністю збігаються з траєкторіями рухів точок D і E , розуміючи, що обов'язково на дотичній (d) має бути розташованим вектор \vec{v}_D , а на дотичній (e) – вектор \vec{v}_E ¹.

¹ Див. також на с. 68 ÷ 69 відповідний пункт задачі 126.

2. ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТЕЙ ТОЧОК І КУТОВИХ ШВИДКОСТЕЙ ЛАНОК

Оскільки за умовою задачі ланка 2 виконує поступальний прямолінійний рух зі швидкістю \vec{v}_2 , а точка D належить цій ланці, то

$$\vec{v}_D = \vec{v}_2$$

і

$$v_D = v_2 = 68 \frac{\text{см}}{\text{сек}}.$$

Зображуємо на розрахунковій схемі від точки D на дотичній (d) вектор \vec{v}_D (див. рис. 138z.2).

Для ланки 2, яка виконує плоскопаралельний рух, знайдемо положення її миттєвого центра швидкостей P_2 : встановлюємо у точці D перпендикуляр (d^\perp) до вектора \vec{v}_D та у точці E перпендикуляр (e^\perp) до прямої (e); точка P_2 , швидкість v_{P_2} якої у розглядуваному положенні механізму дорівнює нулю ($v_{P_2} = 0$), знаходиться на перетині перпендикулярів (d^\perp) та (e^\perp). Зображуємо точку P_2 на розрахунковій схемі й сполучаємо її з точками A та C відрізками AP_2 і CP_2 відповідно (див. рис. 138z.2).

Тоді, обираючи миттєвий центр швидкостей P_2 ланки 2 за полюс, відповідно до формули (15.6) встановлюємо, що модулі

$$v_D = DP_2 \cdot \omega_2, \quad (138.1)$$

$$\left. \begin{aligned} v_E &= EP_2 \cdot \omega_2, \\ v_C &= CP_2 \cdot \omega_2, \\ v_A &= AP_2 \cdot \omega_2, \end{aligned} \right\} \quad (138.2)$$

де, наприклад, DP_2 – радіус обертання точки D в обертальному русі ланки 2 навколо полюса P_2 .

Розглянемо на рисунку 138z.2 необхідні геометричні об'єкти розрахункової схеми та встановимо³ відповідні значення, потрібні для подальшого розв'язування задачі.

² Див. зауваження № 133.2 до задачі 133 на с. 86.

³ Див. зауваження № 133.3 до задачі 133 на с. 86 ÷ 87.

Аналізуючи трикутник P_2DE , неважко зрозуміти, що:

- $\angle EDP_2 = 90^\circ - \psi$;
- $\angle DEP_2 = 90^\circ - \psi$;
- отже, розглядуваний трикутник P_2DE є *рівнобедреним* і його сторони

$$EP_2 = DP_2;$$

- оскільки за умовою задачі

$$DC = CE = \frac{DE}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ см},$$

то в рівнобедреному трикутнику P_2DE відрізок P_2C є медіаною та одночасно *висотою* і *бісектрисою*.

З прямокутного трикутника P_2CD встановлюємо таке:

- $\angle CDP_2 = \angle EDP_2 = 90^\circ - \psi$;
- оскільки $DC = DP_2 \cdot \cos(\angle CDP_2) = DP_2 \cdot \cos(90^\circ - \psi)$ (як катет, прилеглий до кута CDP_2), а $\cos(90^\circ - \psi) = \sin \psi$ (див. будь-який довідник з елементарної тригонометрії), то

$$DP_2 = \frac{DC}{\cos(\angle CDP_2)} = \frac{DC}{\cos(90^\circ - \psi)} = \frac{DC}{\sin \psi} = \frac{30}{\frac{15}{17}} = \frac{30 \cdot 17}{15} = 34 \text{ (см)};$$

- $CP_2 = \sqrt{(DP_2)^2 - (DC)^2} = \sqrt{34^2 - 30^2} = \sqrt{256} = 16 \text{ (см)}$ – за теоремою Піфагора.

Нарешті, з прямокутного трикутника P_2EA за теоремою Піфагора знаходимо віддаль

$$AP_2 = \sqrt{(EP_2)^2 + (EA)^2} = \sqrt{34^2 + 40^2} = \sqrt{2756} \approx 52,50 \text{ (см)}.$$

Тоді з формули (138.1) отримуємо

$$\omega_2 = \frac{v_D}{DP_2} = \frac{68}{34} = 2 \left(\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right).$$

Зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 138z.2 навколо точки P_2 дугову стрілку, яка визначає кутову швидкість ω_2 ланки 2 у розглядуваному положенні; напрямок цієї дугової стрілки (проти руху годинникової стрілки) встановлюємо за напрямком вектора \vec{v}_D , розуміючи, що цей вектор безумовно визначає і век-

тор \vec{v}_{P_2D} обертальної швидкості точки D в обертальному русі ланки 2 навколо полюса P_2 ⁴.

РОЗРАХУНКОВА СХЕМА

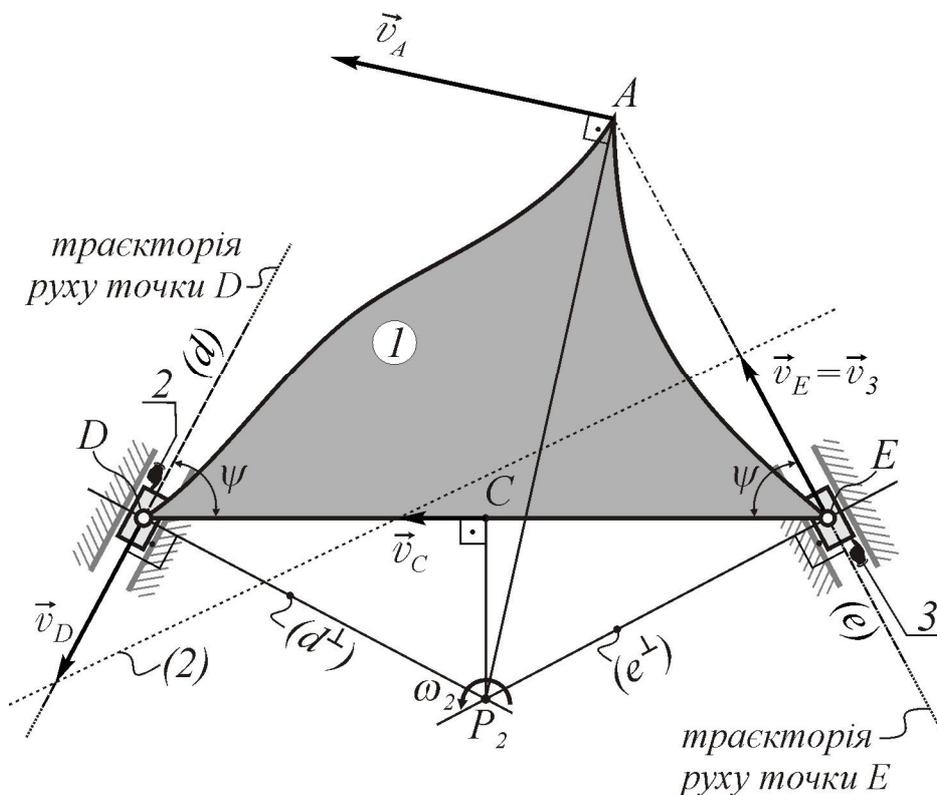


Рис. 138z.2

Порівнявши встановлені значення кутової швидкості ω_2 та її напрямок із цими ж характеристиками, встановленими у задачі 126, де при дослідженні плоскопаралельного руху ланки 2 за полюс обиралася точка D , бачимо, що **вибір полюса ніяк не вплинув на характеристики обертальної частини плоскопаралельного руху.**

Тепер за формулами (138.2) обчислюємо:

$$v_E = EP_2 \cdot \omega_2 = 34 \cdot 2 = 68 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right),$$

$$v_E = EP_2 \cdot \omega_2 = 34 \cdot 2 = 68 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right),$$

$$v_A = AP_2 \cdot \omega_2 \approx 52,50 \cdot 2 \approx 105 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right).$$

⁴ Див. зауваження № 136.1 до задачі 136 на с. 104.

Зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 138z.2 за напрямком кутової швидкості ω_2 :

- вектор \vec{v}_E (на дотичній (e));
- вектори \vec{v}_C і \vec{v}_A , спрямовуючи їх згідно з формулою (15.7) перпендикулярно до відрізків CP_2 й AP_2 відповідно ($\vec{v}_C \perp CP_2$, а $\vec{v}_A \perp AP_2$).

❏ Якщо відкласти всі знайдені значення швидкостей з дотриманням їх масштабу, то відповідно до **наслідку 2** з теореми про швидкості точок при плоскопаралельному русі тіла (див. §15.3) кінці векторів \vec{v}_D , \vec{v}_C та \vec{v}_E швидкостей точок D , C і E відрізка DE обов'язково мають перебувати на одній прямій (див. на розрахунковій схемі на рисунку 138z.2 пряму (2))⁵.

Оскільки точка E , швидкість \vec{v}_E якої вже відома, крім ланки I , належить і ланці 3 , котра за умовою задачі виконує поступальний прямолінійний рух, то

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_E$$

та

$$v_3 = v_E = 68 \frac{\text{см}}{\text{сек}},$$

де \vec{v}_3 і v_3 – вектор і модуль швидкості поступального руху повзуна 3 відповідно.

❏ На розрахунковій схемі на рисунку 138.z.2 від довільної точки ланки 3 зображено вектор \vec{v}_3 швидкості поступального руху цієї ланки (можна цього і не робити, розуміючи, що вектор \vec{v}_E швидкості руху точки E однозначно задає й вектор \vec{v}_3).

⁵ Див. **зауваження № 123.10** до задачі 123 на с. 49 ÷ 50.

ЗАДАЧА № 139

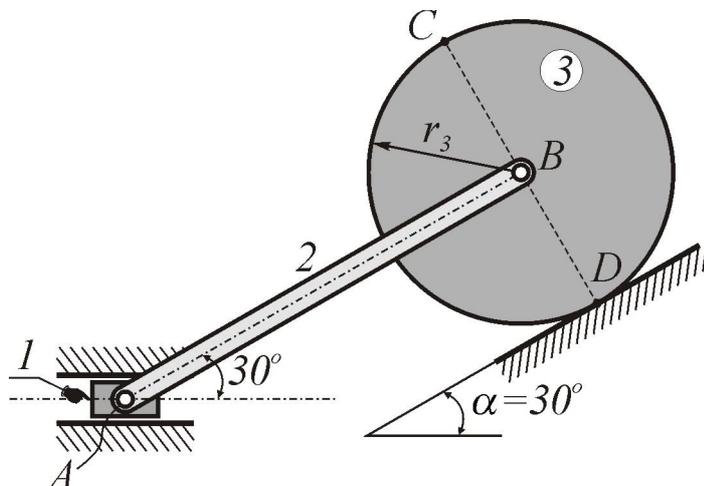


Рис. 139z.1

Повзун 1 багатоланкового механізму з'єднаний шарніром A з брусом 2 довжиною $l_2 = 3\text{ м}$. Зазначений брус шарніром B з'єднаний з колесом 3 , радіус якого $r_3 = 1\text{ м}$ та яке котиться без ковзання по похилій до горизонту під кутом $\alpha = 30^\circ$ площині (див. рис. 139z.1).

Використовуючи поняття про *миттєвий центр швидкостей* тіла, що виконує плоскопаралельний рух, знайти швидкості точок A , B , C і D й кутові швидкості ланок 2 і 3 для того моменту часу, коли брус AB утворює кут 30° з горизонталлю, якщо в цю мить повзун 1 ковзає праворуч уздовж своїх горизонтальних напрямних зі швидкістю $v_1 = 6\text{ м/сек}$.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Пропонується розв'язати задачу самостійно та звірити власний розв'язок із наведеним.

1. ПОПЕРЕДНІЙ КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМУ

Механізм складається з трьох ланок: ланка 1 (повзун) виконує поступальний прямолінійний рух уздовж своїх напрямних, які з точки зору теоретичної механіки є в'яззю, що обмежує та визначає рух цього повзуна.

Ланки 2 (брус AB) і 3 (колесо) виконують плоскопаралельні рухи. При цьому колесо 3 виконує особливий вид плоскопаралельного руху – кочення без ковзання по нерухомій площині. Оскільки точка B є центром абсолютно твердого колеса 3 і при його коченні не може ні наблизитися, ні віддалитися від площини, по якій відбувається кочення, то траєкторією руху точки B є паралельна до цієї площини пряма.

Зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 139z.2 траєкторії рухів точки A (як такої, що належить ланці 1) і точки B (як

такої, що є центром колеса 3) та дотичні (a) і (b), усвідомлюючи, що: а) обидві дотичні повністю збігаються з траєкторіями рухів відповідних точок; б) на дотичній (a) має бути розташованим вектор \vec{v}_A , а на дотичній (b) – вектор \vec{v}_B .

2. ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТЕЙ ТОЧОК І КУТОВИХ ШВИДКОСТЕЙ ЛАНОК

Оскільки за умовою задачі ланка 1 виконує поступальний рух і має швидкість \vec{v}_1 , а точка A належить цій ланці, то

$$\vec{v}_A = \vec{v}_1 \quad \text{і} \quad v_A = v_1 = 6 \text{ м/сек};$$

зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 139z.2 на дотичній (a) від точки A вектор \vec{v}_A її швидкості.

Для ланки 2, яка виконує плоскопаралельний рух, знайдемо положення її миттєвого центра швидкостей P_2 : встановлюємо у точці A перпендикуляр (a^\perp) до вектора \vec{v}_A та у точці B перпендикуляр (b^\perp) до дотичної (b); точка P_2 знаходиться на перетині перпендикулярів (a^\perp) та (b^\perp) .

Тоді, обираючи миттєвий центр швидкостей P_2 ланки 2 за полюс, відповідно до формули (15.6) встановлюємо, що модулі:

$$v_A = AP_2 \cdot \omega_2, \quad (139.1)$$

$$v_B = BP_2 \cdot \omega_2, \quad (139.2)$$

де AP_2 і BP_2 – віддалі від точок A та B до точки P_2 відповідно, які визначають радіуси обертання цих точок в обертальному русі ланки 2 навколо полюса P_2 ¹.

Віддалі AP_2 і BP_2 визначимо², аналізуючи на розрахунковій схемі на рисунку 139z.2 елементи трикутника P_2AB :

- $\angle BAP_2 = 60^\circ$, $\angle AP_2B = 30^\circ$;

- $AB = \frac{AP_2}{2}$ – як катет у прямокутному трикутнику P_2AB , що

лежить проти кута 30° ; тоді

$$AP_2 = 2 \cdot AB = 2 \cdot \ell_2 = 2 \cdot 3 = 6 \text{ (м)};$$

¹ Див. зауваження № 133.2 до задачі 133 на с. 86.

² Див. зауваження № 133.3 до задачі 133 на с. 86 ÷ 87.

- $BP_2 = \sqrt{(AP_2)^2 - (AB)^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3 \cdot \sqrt{3} \approx 5,196 \text{ (м)}$ – за теоремою Піфагора.

РОЗРАХУНКОВА СХЕМА

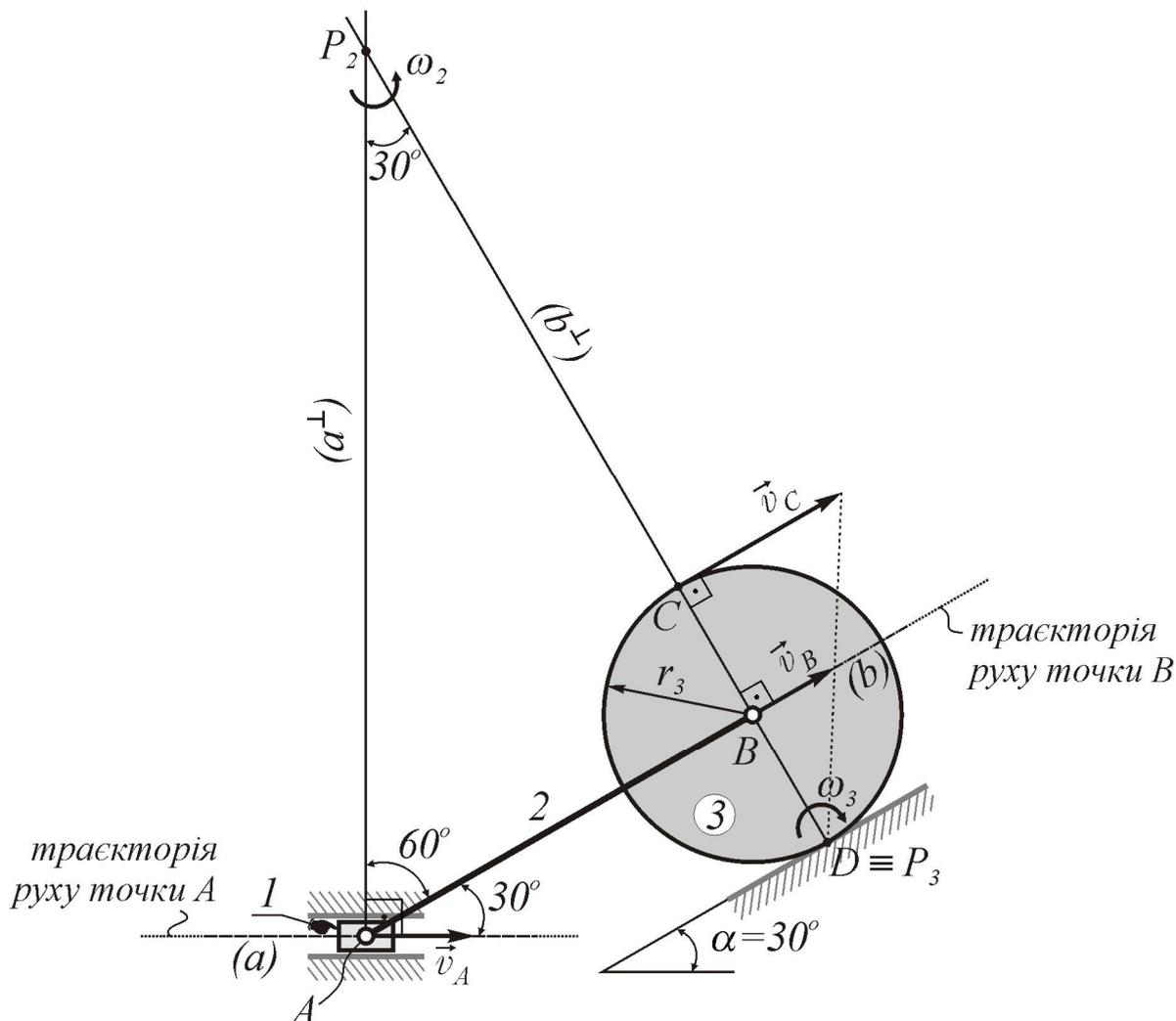


Рис. 139z.2

Урахувавши знайдені значення, з формули (139.1) знаходимо

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP_2} = \frac{6}{6} = 1 \left(\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right),$$

а за формулою (139.2) –

$$v_B = BP_2 \cdot \omega_2 = 3\sqrt{3} \cdot 1 = 3 \cdot \sqrt{3} = 5,196 \left(\frac{\text{м}}{\text{сек}} \right).$$

Зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 139z.2:

- 1) навколо полюса P_2 дугову стрілку, яка визначає кутову швидкість ω_2 ланки 2 у розглядуваному положенні механізму;

напрямок цієї дугової стрілки (проти руху годинникової стрілки) встановлюємо за напрямком вектора \vec{v}_A , розуміючи, що цей вектор, певна річ, визначає і вектор \vec{v}_{P_2A} *обертальної швидкості точки A в обертальному русі ланки 2 навколо полюса P_2* ³;

- 2) на дотичній (*b*) вектор \vec{v}_B , визначаючи його напрямок за напрямком кутової швидкості ω_2 .

Оскільки ланка 3 котиться по нерухомій площині, торкаючись її у розглядуваному положенні точкою D , то швидкість v_D цієї точки дорівнює нулю; тобто точка D і є миттєвим центром швидкостей P_3 ланки 3 ($D \equiv P_3$), що і зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 139z.2.

Беручи точку P_3 за полюс, відповідно до формули (15.6) маємо:

$$v_B = BP_3 \cdot \omega_3, \quad (139.3)$$

$$v_C = CP_3 \cdot \omega_3, \quad (139.4)$$

де $BP_3 \equiv BD = r_3$ і $CP_3 \equiv CD = 2r_3$ – *радіуси обертання точок B і C відповідно (див. рис. 139z.2) в обертальному русі ланки 3 навколо полюса P_3* .

Тоді з формули (139.3) знаходимо

$$\omega_3 = \frac{v_B}{BP_3} = \frac{v_B}{r_3} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{1} \approx 5,196 \left(\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right),$$

а за формулою (139.4)

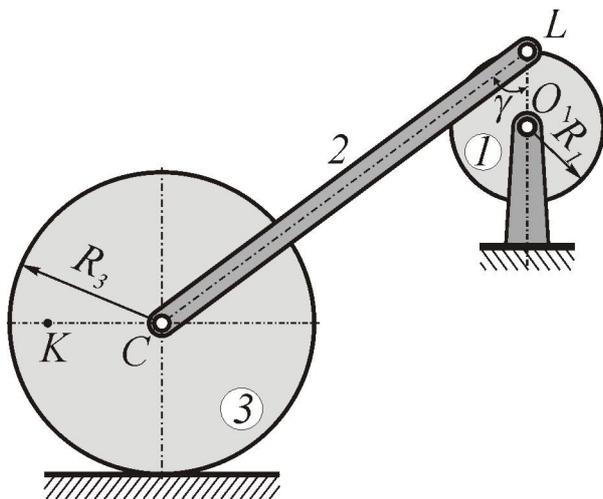
$$v_C = CP_3 \cdot \omega_3 = 2 \cdot r_3 \cdot \omega_3 = 2 \cdot 1 \cdot 3\sqrt{3} = 6 \cdot \sqrt{3} \approx 10,392 \left(\frac{\text{м}}{\text{сек}} \right).$$

Зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 139z.2: а) навколо полюса P_3 дугову стрілку, яка визначає кутову швидкість ω_3 ланки 3 у розглядуваному положенні, встановлюючи напрямок цієї дугової стрілки за напрямком вектора \vec{v}_B ; б) вектор \vec{v}_C , проводячи його згідно з формулою (15.7) перпендикулярно до віддалі CP_3 ($\vec{v}_C \perp CP_3$) і встановлюючи його напрямок за напрямком кутової швидкості ω_3 .

³ Див. **зауваження № 136.1** до задачі 136 на с. 104.

ЗАДАЧА № 140

У вертикальній площині перебуває плоский триланковий механізм, приводне колесо 1 якого обертається за рухом годинникової стрілки навколо нерухомої горизонтальної осі, яка проходить через точку O_1 перпендикулярно до площини знаходження механізму, та пальцем L з'єднано із шатуном 2 , котрий пальцем C з'єднаний із центром диска 3 , що котиться без ковзання по горизонтальній площині.

**Рис. 140z.1**

Використовуючи поняття про *миттєвий центр швидкостей* тіла, що виконує плоскопаралельний рух, визначити швидкості точок L , C і K та кутові швидкості ланок 2 і 3 для того моменту часу, коли палець L перебуває у своєму найвищому можливому положенні, якщо в цю мить шатун 2 утворює кут γ з вертикально розташованим радіусом O_1L

(див. рис. 140z.1), $\omega_1 = 12 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$, $\sin \gamma = 0,8$, а $R_1 = 0,5 \text{ м}$, $LC = \ell_2 = 3 \text{ м}$,

$R_3 = 1 \text{ м}$, $CK = 0,75 \cdot R_3$.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Пропонується розв'язати задачу самостійно та звірити власний розв'язок із наведеним.

1. ПОПЕРЕДНІЙ КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМУ

Заданий до розгляду за умовою задачі механізм складається з трьох ланок. Рух ланки 1 (приводного колеса, яке за своєю конструктивною суттю є кривошипом) обмежено шарнірно-нерухомою опорою O_1 , і тому ця ланка виконує обертальний рух навколо нерухомої осі, що проходить через точку O_1 перпендикулярно до площини знаходження механізму. Ланки 2 (шатун LC) і 3 (диск) виконують плоскопаралельні рухи; при цьому диск 3 виконує особливий вид плоскопаралельного руху – кочення без ковзання по нерухомій горизонтальній площині.

Палець L , який за поняттями теоретичної механіки є точковим шарніром, належить ланці l , котра виконує обертальний рух, тому траєкторією руху точки L є коло радіуса O_1L . Точка C – це центр абсолютно твердого диска 3 і при його коченні ця точка не може ні наблизитися, ні віддалитися від горизонтальної площини, по якій відбувається кочення; тому траєкторією руху точки C є горизонтальна пряма. Оскільки швидкість точки дотику диска 3 до нерухомої поверхні дорівнює нулю, то зазначена точка є миттєвим центром швидкостей ланки 3 .

Зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 140z.2:

- 1) траєкторії рухів точок L і C ;
- 2) дотичні (ℓ) та (c) , усвідомлюючи, що: а) $(\ell) \perp O_1L$; б) (c) повністю збігається з траєкторією руху точки C ; в) на дотичній (ℓ) має бути розташованим вектор \vec{v}_L швидкості руху точки L , а на дотичній (c) – вектор \vec{v}_C швидкості руху точки C ;
- 3) миттєвий центр швидкостей ланки 3 – точку P_3 .

Точка K належить тільки диску 3 , котрий котиться без ковзання, і не є ні його центром, ні точкою кола, що визначає контур цього диска; тому вказати будь-які кінематичні характеристики точки K без використання відповідних формул і обчислень неможливо.

2. ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТЕЙ ТОЧОК І КУТОВИХ ШВИДКОСТЕЙ ЛАНОК

Оскільки ланка l виконує обертальний рух, то за формулою (14.9) установлюємо, що модуль

$$v_L = LO_1 \cdot \omega_1 = R_1 \cdot \omega_1 = 0,5 \cdot 12 = 6 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right),$$

а на дотичній (ℓ) за напрямком кутової швидкості ω_1 зображуємо вектор \vec{v}_L обертальної швидкості точки L (див. рис. 140z.2).

Досліджуючи плоскопаралельний рух ланки 2 (якій належать дві підписані точки L і C), оберемо за полюс миттєвий центр швидкостей P_2 цієї ланки. Тоді за формулою (15.6) модулі

$$v_L = LP_2 \cdot \omega_2, \tag{140.1}$$

і

$$v_C = CP_2 \cdot \omega_2, \tag{140.2}$$

де LP_2 та CP_2 – віддалі від точок L і C до точки P_2 відповідно, котрі визначають *радіуси обертання* цих точок в обертальному русі ланки 2 навколо полюса P_2^1 , для знаходження якого виконуємо традиційні дії: встановлюємо у точці L перпендикуляр (ℓ^\perp) до вектора \vec{v}_L , а у точці C перпендикуляр (c^\perp) до дотичної (c) .

Оскільки перпендикуляри (ℓ^\perp) і (c^\perp) у розглядуваному положенні механізму виявилися *паралельними один до одного* та, отже, *не перетинаються* (або *перетинаються в нескінченності*), то:

- шуканий миттєвий центр швидкостей P_2 ланки 2 також знаходиться у нескінченності;
- віддалі

$$LP_2 = \infty \quad \text{і} \quad CP_2 = \infty;$$

- з формули (140.1)

$$\omega_2 = \frac{v_L}{AP_2} = \frac{6}{\infty} = 0^2;$$

- формула (140.2) $v_C = CP_2 \cdot \omega_2$ спричиняє математичну невизначеність $v_C = \infty \cdot 0$, що не дає можливості скористатися цією формулою.

Тоді для знаходження швидкості \vec{v}_C оберемо за полюс точку L та застосуємо формулу (15.3), відповідно до якої

$$\vec{v}_C = \vec{v}_L + \vec{v}_{LC},$$

де \vec{v}_{LC} – вектор обертальної швидкості точки C в обертальному русі ланки 2 навколо полюса L , модуль якого згідно з формулою (15.4),

$$v_{LC} = CL \cdot \omega_2.$$

Оскільки ж у нашому разі $\omega_2 = 0$, то і $v_{LC} = 0$, а

$$\vec{v}_C = \vec{v}_L \quad \text{та, звідси,} \quad v_C = v_L = 6 \frac{\text{см}}{\text{сек}}.$$

Викладені міркування й отримані значення приводять до **ВИСНОВКУ**:

¹ Див. **зауваження № 133.2** до задачі 133 на с. 86.

² Оскільки результат ділення будь-якого скінченного числа на нескінченність завжди дорівнює нулеві, то величина (модуль) швидкості точки E не має ніякого значення.

❶ у разі, коли в певному положенні розглядуваної ланки її миттєвий центр швидкостей знаходиться у нескінченності, то у цей момент часу ланка виконує **миттєво-поступальний рух**, який і характеризується тим, що у цю мить: а) не існує точки, що належить ланці 2 (або незмінно пов'язана з нею), швидкість якої дорівнює нулю; б) кутова швидкість ланки набуває нульового значення; в) швидкості руху всіх точок ланки однакові.

Зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 140z.2 на дотичній (с) вектор \vec{v}_c (ураховуючи, що $\vec{v}_c = \vec{v}_L$).

РОЗРАХУНКОВА СХЕМА

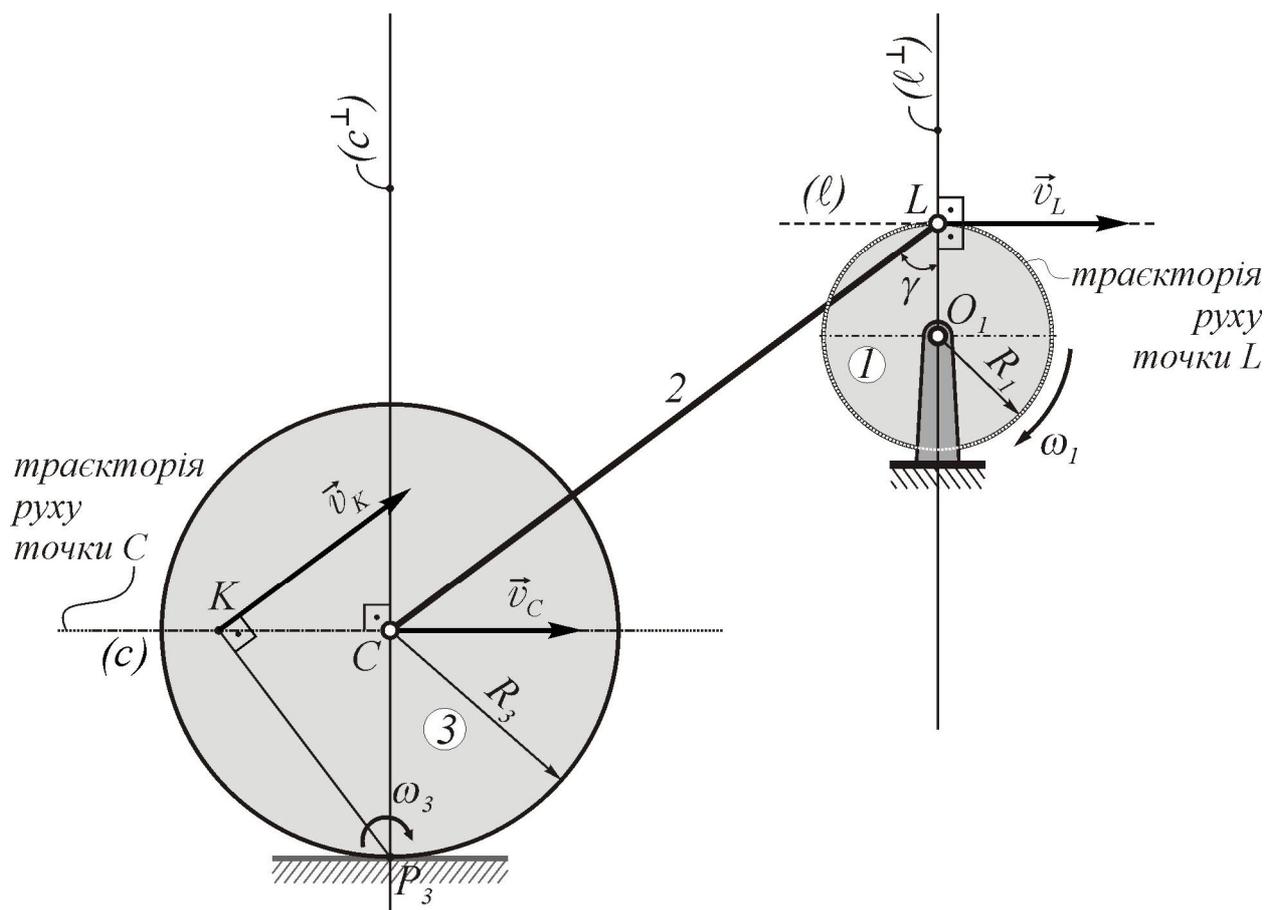


Рис. 140z.2

Зауваження № 140.1. Треба чітко розуміти різницю між *поступальним* і *миттєво-поступальним* рухами: при поступальному русі тіла швидкості та прискорення всіх його точок однакові; у разі миттєво-поступального руху тільки швидкості всіх точок тіла однакові, але їх прискорення не рівні між собою (див. далі задачу 152).

Зауваження № 140.2. Також на прикладі розв'язуваної задачі більш широко розглянемо та усвідомимо ті нюанси, які стосуються обертальної частини плоскопаралельного руху ланки 2. Як встановлено вище, у розглядуваному положенні її кутова швидкість $\omega_2 = 0$, але *необхідно знати*, що кутове прискорення ε_2 у цю мить *не дорівнює нулю* (див. далі задачу 152), адже

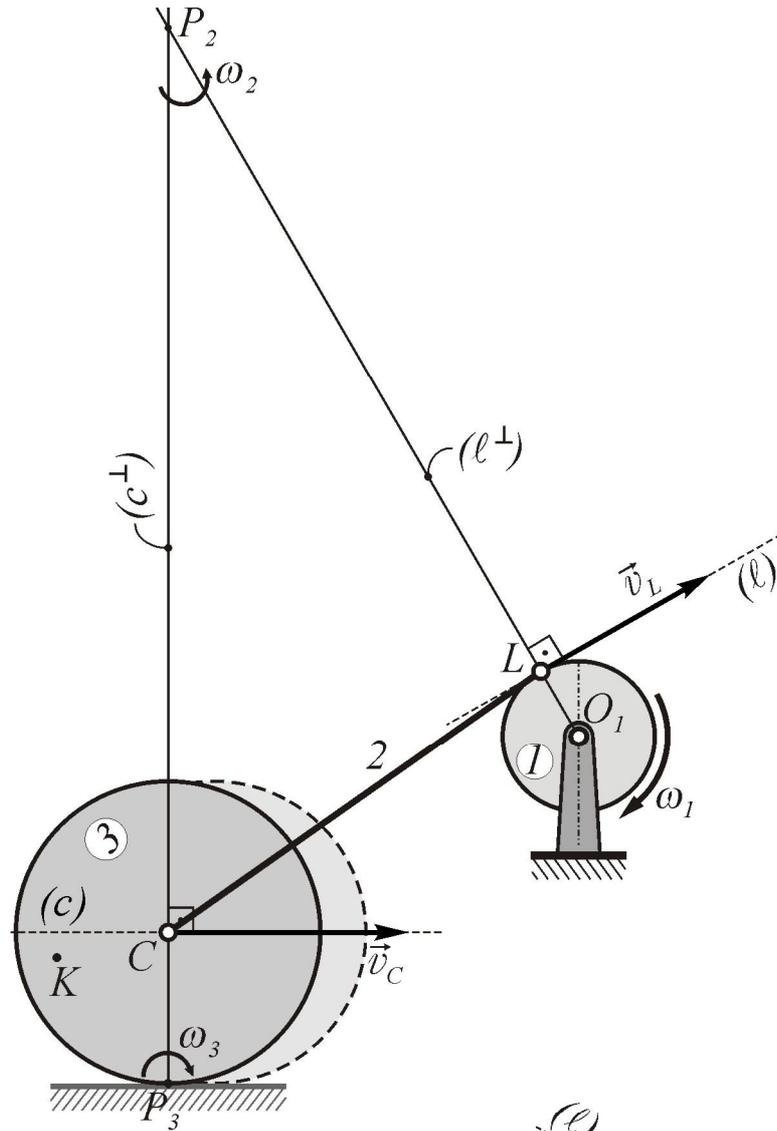
❶ **кутове прискорення ε** – це фізична величина, яка характеризує та визначає швидкість зміни кутової швидкості ω у часі (див. відповідне визначення у §14.3).

Тобто факт рівності нулеві кутового прискорення ε_2 свідчив би, що встановлена вище у розглядуваному положенні кутова швидкість $\omega_2 = 0$ «не має наміру змінюватися» і, отже, є сталою величиною $\omega_2 = 0 = const$, що притаманно лише поступальному рухові тіла. Неважко довести, що *кутова швидкість ω_2 є змінною величиною та у розглядуваному положенні лише на одну мить стає рівною нулю*. Для цього розглянемо два додаткові положення механізму: одне – за деякий незначний проміжок часу Δt до заданого в умові задачі положення (див. рис. 140z.3,а), а друге – через якийсь незначний проміжок часу Δt після заданого положення (див. рис. 140z.3,б). Установивши положення миттєвих центрів швидкостей P_2 , бачимо, що в кожному разі віддалі LP_2 та CP_2 набувають певних кінцевих значень, а формули (140.1) і (140.2) дозволяють знайти відповідні значення ω_2 й v_C ; при цьому безсумнівно, що в обох розглянутих на рисунку 140z.3 додаткових положеннях механізму $\omega_2 \neq 0$ і $v_C \neq v_L$.

Також звернімо увагу на те, що в обох положеннях на рисунку 140z.3 кутова швидкість ω_2 має *різні напрямки*. Неважко здогадатися, що: а) в заданому в умові задачі положенні (див. рис. 140z.2) відбувається *зміна напрямку обертання ланки 2* (для чого в цю мить кутовій швидкості ω_2 «необхідно стати рівною нулю»); б) на рисунку 140z.3,а ланка 2 обертається сповільнено проти руху годинникової стрілки, а на рисунку 140z.3,б – прискорено за рухом годинникової стрілки.

❷ Розглянувши положення механізму на рисунках 140z.3,а, 140z.2 і 140z.3,б у вказаній послідовності, очевидно, що за означений на цих рисунках проміжок часу при коченні диска 3 *швидкість його центра С, котрий рухається праворуч, постійно зменшується*.

a)



б)

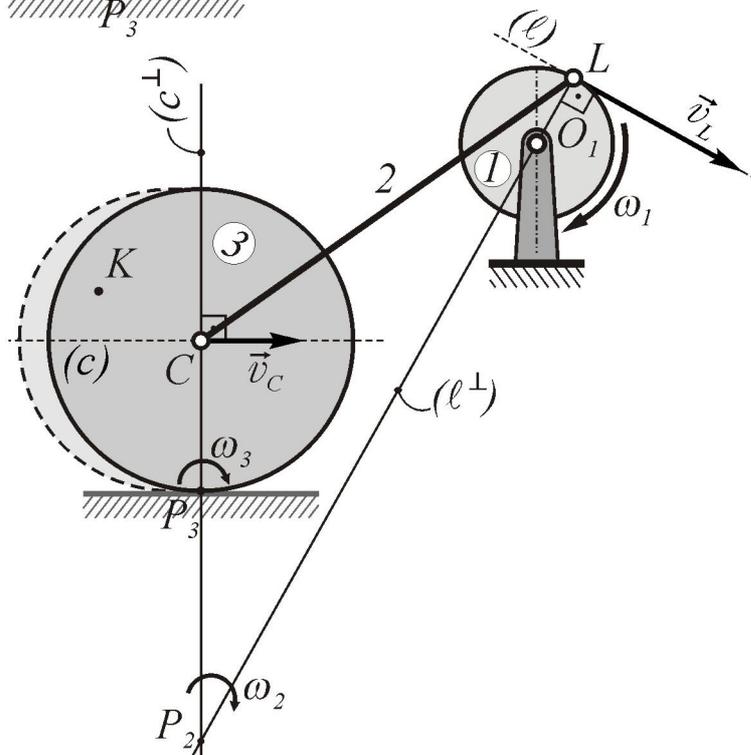


Рис. 140z.3

Розглядаючи рух ланки 3 й обираючи точку P_3 за полюс, згідно з формулою (15.6) маємо, що

$$v_C = CP_3 \cdot \omega_3, \quad (140.3)$$

$$v_K = KP_3 \cdot \omega_3, \quad (140.4)$$

де $CP_3 = R_3 = const$ і KP_3 – віддалі від точок C та K до точки P_3 (див. рис. 140z.2), які відповідно визначають радіуси обертання цих точок в обертальному русі ланки 3 навколо полюса P_3 .

Оскільки за умовою задачі $CK = 0,75 \cdot R_3 = 0,75 \cdot 1 = 0,75(м)$, то в розглядуваному положенні віддаль KP_3 визначимо за теоремою Піфагора як гіпотенузу прямокутного трикутника KCP_3

$$KP_3 = \sqrt{(KC)^2 + (CP_3)^2} = \sqrt{0,75^2 + 1^2} = \sqrt{1,5625} = 1,25(м).$$

Тоді з формули (140.1) знаходимо модуль

$$\omega_3 = \frac{v_C}{CP_3} = \frac{v_C}{R_3} = \frac{6}{1} = 6 \left(\frac{рад}{сек} \right),$$

а за формулою (140.2) – модуль

$$v_K = KP_3 \cdot \omega_3 = 1,25 \cdot 6 = 7,5 \left(\frac{м}{сек} \right).$$

Зображуємо на розрахунковій схемі на рисунку 140z.2: а) навколо полюса P_3 дугову стрілку, яка визначає кутову швидкість ω_3 ланки 3 у розглядуваному положенні, встановлюючи напрямок цієї дугової стрілки за напрямком вектора \vec{v}_C ; б) вектор \vec{v}_K , проводячи його згідно з формулою (15.7) перпендикулярно до віддалі KP_3 ($\vec{v}_K \perp KP_3$) і встановлюючи його напрямок за напрямком кутової швидкості ω_3 .

✎ Бажаючим пропонується самостійно встановити, де саме диск 3 досягне свого крайнього правого положення, на мить зупиниться (зрозуміло, що в цьому положенні $v_C = 0$ і $\omega_3 = 0$) і після цього розпочнеться кочення диска ліворуч.

ЛІТЕРАТУРНІ ДЖЕРЕЛА

1. Жигилій С.М. Кінематика точки: курс лекцій з дисципліни «Теоретична механіка» для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання / С.М. Жигилій. – Полтава : ПолтНТУ, 2017. – 194 с.
2. Яблонский А. А. Курс теоретической механики: ч.1. / А. А. Яблонский, В.М. Никифорова. – М.: Высш. школа, 1984. – 343 с.
3. Жигилій С.М. Рівновага збіжної системи сил. Методика та приклади розв'язування задач: навчальний посібник з дисципліни «Теоретична механіка» / С.М. Жигилій. – Полтава : ПолтНТУ, 2014. – 120 с.
4. Жигилій С.М. Визначення швидкостей точок і кутових швидкостей ланок багатоланкового механізму: методичні вказівки до самостійної роботи студентів з дисципліни «Теоретична механіка» / С.М. Жигилій. – Полтава: ПолтНТУ, 2018. – 52 с.
5. Ruina A. Introduction to Statics and Dynamics / Andy Ruina, Rudra Pratap. – Oxford University Press (Preprint), 2011. – 1029 p.
6. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М. : Физматгиз, 1958. – 400 с.
7. Beer F. Vector mechanics for engineers: statics and dynamics, tenth edition / Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, Jr., David F. Mazurek, Phillip J. Cornwell – New York: McGraw-Hill Companies, Inc., 2013. – 1360 p.
8. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики: т.1 / Н.А. Кильчевский. – М. : Наука, 1972. – 456 с.
9. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики: т.1. / Н.В. Бутенин, Я.А. Лунц, Д.Р. Меркин. – М. : Наука, 1976. – 272 с.
10. Павловський М.А. Теоретична механіка: підручник / М.А. Павловський. – К. : Техніка, 2002. – 512 с.
11. Timoshenko S. Engineering mechanics, fourth edition / S. Timoshenko, D. Young. – New York: McGraw-Hill book Company, Inc, 1960. – 508 p.

Навчально-методичне видання

Жигилій Сергій Михайлович

**ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА.
ШВИДКОСТІ ТОЧОК І КУТОВІ ШВИДКОСТІ ТІЛ**

Навчальний посібник

Редактор Я.В. Новічкова
Комп'ютерна верстка С.М. Жигилій

Друк RISO

—

Обл.-вид. арк. 12,2

Поліграфічний центр
Полтавського національного технічного університету
імені Юрія Кондратюка
36601, м. Полтава, Першотравневий просп., 24
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовників і
розповсюджувачів видавничої продукції
Серія ДК № 3130 від 06.03.2008

—

Віддруковано з оригінал-макета ПЦ ПолтНТУ