МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ПОЛТАВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА ІМЕНІ ЮРІЯ КОНДРАТЮКА»

КАФЕДРА БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ

СЕРГІЙ ЖИГИЛІЙ

КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

КУРС ЛЕКЦІЙ

з дисципліни «Теоретична механіка»
для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання

ПОЛТАВА 2024

УДК531/534(07)

Ж68

Рецензент:
***В.В. Соловйов**, завідувач кафедри хімії та фізики, доктор хімічних наук, професор, Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка».*

Рекомендовано до друку навчально-методичною радою Навчально-наукового інституту архітектури, будівництва та землеустрою Протокол № 6 від лютого 2024 р.

Жигилій С.М.
Кінематика точки: курс лекцій з дисципліни «Теоретична механіка» для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти / С.М. Жигилій. – Полтава: Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка», 2024. – 194 с.: іл. 58, табл. 3, бібліогр. 8

До лекцій «Кінематика точки» (які є складовою частиною загального курсу лекцій з теоретичної механіки) входять лекції на теми «Вступ до кінематики точки», «Швидкість руху точки» та «Прискорення руху точки». Усебічно розглянуто та пояснено низку положень і питань теоретичної механіки, які є базовими та належне знання яких визначає успішне засвоєння наступних розділів і тем теоретичної механіки та готовність до розв'язування практичних задач.

Для самоконтролю студентами своїх знань лекції супроводжено розбитими на два окремі блоки питаннями, досить простими за своїм змістом, які у повному обсязі охоплюють і контролюють зміст лекцій.

Для студентів (усіх форм навчання) та викладачів вищих технічних навчальних закладів.

У авторській редакції

41.14.02.01

ЗМІСТ

Передмова 5
Вступ до кінематики 8
Тема 10. Вступ до кінематики точки 13
§10.1. Основні поняття та кінематичні характеристики руху точки. Види рухів точки 13
§10.2. Способи визначення руху точки 21
§10.3. Зв'язок між векторним та координатним способами визначення руху точки 31
Тема 11. Швидкість руху точки 33
§11.1. Швидкість руху точки при векторному способі визначення її руху 34
§11.2. Швидкість руху точки при координатному способі визначення її руху 37
§11.3. Швидкість руху точки при координатному способі визначення її прямолінійного руху 41
§11.4. Швидкість руху точки при натуральному способі визначення її руху 49
§11.5. Зв'язок між натуральним та координатним способами визначення руху точки 63
Питання для самоконтролю та експрес-тестування Кт-1 66
Тема 12. Прискорення руху точки 75
§12.1. Прискорення руху точки при векторному способі визначення її руху 75

§12.2. Прискорення руху точки при координатному способі визначення її руху 79

§12.3. Прискорення руху точки при координатному способі визначення її прямолінійного руху 83

§12.4. Графіки руху, шляху, швидкості та прискорення прямолінійного руху точки. 94

§12.5. Система натуральних осей 106

§12.6. Прискорення руху точки при натуральному способі визначення її руху 109

§12.7. Нормальне та дотичне (тангенціальне) прискорення руху точки 118

§12.8. Механічні змісти нормального та дотичного (тангенціального) прискорень точки. Класифікація рухів точки за її прискореннями 144

§12.9. Зв'язок між натуральним та координатним способами визначення руху точки 163

§12.10. Рівняння рівномірного та рівнозмінного рухів точки 167

Питання для самоконтролю та експрес-тестування Кт-2 176

Додаток 192

Літературні джерела 193

ПЕРЕДМОВА

Через певні події й явища, що останніми роками відбуваються в Україні та системі її вищої освіти, суттєвих змін зазнають і робочі програми курсів тих чи інших навчальних дисциплін. Часто-густо викладач уже не має бажаної кількості аудиторних годин для прискіпливого та скрупульозного викладання необхідного матеріалу, значна частина вивчення та засвоєння якого відводиться на *самостійну роботу студентів* – надзвичайно важливої складової загального навчального процесу, яка набуває особливої актуальності у теперішній час запровадження новітніх навчальних технологій (наприклад, *дистанційної освіти*), що пов'язано зі світовими інтеграційними процесами (в тому числі в галузі освіти), упровадженням європейських норм і стандартів у систему вищої освіти нашої країни. З іншого боку, рівень шкільної підготовки й уявлення про самостійну роботу сучасних студентів суттєво різняться у надзвичайно широкому діапазоні. Тому постає потреба у різноманітній навчальній літературі (підручниках, посібниках, курсах і конспектах лекцій та ін.), за допомогою яких студенти різних форм навчання могли б самостійно якісно навчатися.

Лекції на тему «Кінематика точки» (котрі є складовою частиною загального курсу лекцій з теоретичної механіки) відповідають робочим програмам навчальної дисципліни «Теоретична механіка» для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання Полтавського національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка» і є одним із результатів багаторічної праці автора на декількох викладацьких посадах кафедри теоретичної механіки. Набутий досвід зумовив і становить зміст лекцій, при написанні яких автор прагнув до максимально повного й доступного подання розглядуваних питань.

До курсу входять лекції на теми «Вступ до кінематики точки», «Швидкість руху точки» і «Прискорення руху точки». У лекціях усебічно розглянуто та пояснено низку положень і питань теоретичної механіки, які є базовими та належне знання яких визначає успішне засвоєння наступних розділів і тем теоретичної механіки (як-то: «Кінематика твердого тіла», «Динаміка матеріальної точки», «Динаміка механічної системи» тощо) та готовність до розв'язування відповідних задач (на практичних заняттях чи самостійно). Усі лекції містять приклади практичного застосування теоретичних положень, викладених у цих лекціях.

Нумерація тем і формул лекцій відповідає тому курсу теоретичної механіки, що викладає автор; для читачів, котрі не є студентами автора, зазначену нумерацію слід сприймати за умовну. Основні поняття, визначення та висновки, які *бажано* (насправді, мається на увазі – *обов'язково треба*) вивчити *напам'ять*, позначені в тексті символом ⓘ. Рекомендації, зауваження, поради й уточнення позначено символом 🚑. Поняття з відповідних розділів вищої математики, що застосовуються при розгляді та доведенні тих чи інших питань теоретичної механіки, позначено символом 🕸, а приклади (які по суті є нескладними задачами) – символом ⚒.

Для самоконтролю студентами своїх знань лекції супроводжені ***питаннями***, котрі також використовуються в білетах для проведення запланованих робочою програмою дисципліни протягом відповідного змістового модуля визначеної кількості експрес-тестувань. Особливістю цих запитань є те, що кожне з них оцінене певною кількістю балів, які студент має можливість отримати при написанні експрес-тестування (кількість балів залежить від складності самого питання і точності відповіді на нього). Білети для експрес-тестувань, на проведення кожного з котрих відводиться 15 хв., містять по 15 запитань і складені таким чином, що правильні й повні відповіді на всі питання білету оцінюються у 100 балів (отримані бали за кожне експрес-тестування з урахуванням їх вагомого множника входять окремими доданками до загальної рейтингової оцінки знань студентів). Приклад одного з білетів для проведення експрес-тестування міститься у додатку А.

Автор

ВСТУП ДО КІНЕМАТИКИ

Слово *«кінематика»* походить від грецького слова *kinëmatos*, що в перекладі означає *рух.*

У діалектичному матеріалізмі рух – це об'єктивний спосіб існування матерії, її абсолютний невід'ємний атрибут, без якого матерія існувати не може і який не може існувати без неї. Для руху (як для основи буття) постулюються незнищуваність і вічність, як і для самого буття. З'явившись разом з буттям, рух не зупиняється, через що неможливо знову створити його.

У загальному розумінні ***рух*** є надзвичайно широким поняттям. Згідно з видатним німецьким філософом Фрідріхом Енгельсом (28.11.1820 ÷ 05.8.1895) рух є *«... способом існування матерії»* й охоплює всілякі зміни й перетворення, починаючи від *«... простого переміщення й закінчуючи мисленням»*. На різних рівнях системної організації матерії Енгельс виділив такі основні форми руху: а) механічний; б) фізичний (тепловий, електромагнітний, гравітаційний, атомний та ядерний); в) хімічний; г) біологічний; ґ) соціальний; д) географічний; е) математичний. Також Енгельс вказує на спадкоємний зв'язок між усіма формами руху матерії: вищі форми не зводяться до нижчих, але обов'язково їх припускають.

У теоретичній механіці (та її окремих розділах) якраз і вивчають найпростішу форму руху матерії – *механічний рух.*

> ⓘ ***Механічним рухом матеріального тіла*** називають процес переходу розглядуваного тіла з одного положення в просторі в інше певним способом у певній залежності від часу.

Рух у більш загальному значенні – це не тільки *зміна положення* матеріальних тіл, але й усіляка *зміна* живих організмів чи істот, суспільно-економічних формацій тощо. Різні види рухів є об'єктами вивчення різних наук. Але, наприклад, теплові, хімічні, електричні форми руху матерії, пов'язані з механічним переміщенням молекул, атомів, електронів. Тому немало законів механічного руху діють та широко використовуються в науках, які вивчають і немеханічні форми руху матерії. Найбільш складні форми руху матерії вивчають у фізіології, психології, соціології, бо вищою формою руху матерії є мислення та свідомість; оскільки такі форми руху матерії приводять і до зміни її якості, то закони простого механічного руху навряд чи можуть бути використаними в цьому випадку.

> ⓘ ***Кінематика*** – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчають *механічні рухи* різних *матеріальних тіл* без урахування сил, котрі спричиняють (або спричинили) ці рухи.

Хоча в кінематиці розглядають рухи *матеріальних тіл*, але маси їх не враховують. Тобто фактично вивчають рухи *геометричних тіл*, які мають певні форми. Можна сказати, що кінематика розглядає, досліджує та встановлює залежності *тільки між просторово-часовими характеристиками механічного руху* розглядуваних тіл.

Як випливає з наведеного раніше визначення, всякий механічний рух відбувається в просторі й у часі. Простір і час є формами існування (буття) матерії; ці поняття нерозривно пов'язані, їх єдність проявляється в русі.

У класичній механіці ***простір*** і ***час*** постулюють як ***абсолютні поняття***, властивості яких не пов'язані одне з одним та не залежать від матеріальних тіл (об'єктів), що перебувають у русі. Такі уявлення про простір і час були сформульовані засновником класичної механіки Ісааком Ньютоном (04.01.1643 ÷ 31.3.1727) у його загальновідомій фундаментальній праці «Математичні початки натуральної філософії» («Початки», лат. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, видана у 1687 року) у такому вигляді: *«Абсолютний (математичний) час за самою своєю сутністю, без усякого відношення до будь-чого зовнішнього протікає рівномірно й по іншому називається тривалістю. ...Абсолютний простір за самою своєю сутністю, безвідносно до будь-чого зовнішнього, залишається завжди однаковим і нерухомим ...»*.

Таким чином, у теоретичній механіці розглядають:

- ⓘ – ***простір*** як *абсолютно нерухомий*, у всіх напрямках *однорідний* і *суцільний*, *тривимірний*, усі вимірювання в якому відповідають законам евклідової геометрії*;
- ⓘ – ***час*** як *універсальний*, тобто протікає тільки в одному напрямку, в усіх точках простору однаково та не залежить від швидкості руху тіл.

Подальший (у післяньютонівський час) розвиток філософії й фізики привів до інших уявлень про реальні простір і час. У релятивістській механіці, що базується на теорії відносності, видатний учений XX століття Альберт Ейнштейн (14.3.1879 ÷ 18.4.1955) довів, що геометричні властивості фізичного простору й властивості часу нерозривно поєднані з властивостями матерії, що рухається в просторі та часі. Але цей взаємозв'язок особливо відчутно проявляється при великих швидкостях, близьких до швидкості світла й (або) поблизу велетенських скупчень ре-

* На теперішній час, як результат виконаних численних вимірювань, у світовій науці припускають, що евклідова геометрія досить точно описує геометричні співвідношення реального світу, починаючи з відстаней, разів у *10* менших, ніж розміри ядер (тобто з відстаней 10^{-16} *м*), до відстаней, близьких до «розмірів Всесвіту» (тобто відстаней 10^{26} *м*); однак, якщо справедливі передбачення теорії відносності, то на цих відстанях (10^{26} *м ≈ 10 млрд. світлових років*) має почати виявлятися неевклідовість простору. Також вважають, що на відстанях, менших ніж 10^{-16} *м*, геометрія Евкліда продовжує бути справедливою, але невідомо до скільки малих відстаней.

човини. При звичайних швидкостях (що трапляються, наприклад, у техніці) та при русі не поблизу велетенських скупчень речовини (наприклад, у земних умовах) *простір і час знаходяться у надзвичайно малій залежності від властивостей матерії.* Тому цією залежністю у теоретичній механіці *нехтують.*

Отже, у класичній механіці час – скалярна величина, що неперервно змінюється та ні за яких умов не може бути від'ємною; час позначають літерою (символом) t і розглядають як незалежну змінну (аргумент). *Одиницею вимірювання часу* в усіх існуючих системах вимірювання фізичних величин є *секунда* (*сек*); досить поширене застосування мають і позасистемні одиниці – хвилина (*хв*) або година (*год*).

Відлік часу ведеться від ***початкового моменту часу*** $t_0 = 0$, який доречно обирають у кожному розглядуваному випадкові.

> Найвигідніше початковий момент часу суміщати з моментом початку досліджуваного руху, але: а) це не обов'язково; б) така можливість є не у кожному разі.

> ⓘ Час настання певного явища чи події називають ***моментом часу***; позначають момент часу як t_i (або t).

Момент часу визначають числом секунд, що пройшли від початкового моменту до розглядуваного.

> ⓘ ***Проміжком часу*** Δt називають перебіг часу між моментами t_1 та t_2 настання двох певних явищ чи подій.

Безсумнівно, що «мовою математики»

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad \text{або} \quad t_2 = t_1 + \Delta t\,.$$

> Нерідко і проміжок часу також позначають символом t.

У механіці рух досліджуваного тіла в просторі та в часі розглядають відносно якого-небудь іншого тіла або окремої його точки, яку називають *точкою відліку* (або *початком відліку*). Із цією точкою пов'язують відлік певного *метричного параметра* (чи декількох метричних параметрів), що визначає (визначають) положення точки в просторі відносно початку відліку.

Якщо до зазначених точки відліку та метричного параметра додати годинник як пристрій для відліку часу, то отримана сукупність утворює ***систему відліку*** (або називається ***системою відліку***). Система відліку може бути як *рухомою* (коли початок відліку пов'язують з рухомою точкою), так і *умовно нерухомою**. При дослідженні механічних рухів тіл поблизу поверхні Землі за умовно нерухому систему відліку обирають систему, початок відліку якої пов'язаний з певною точкою Землі – так звана ***геоцентрична система відліку***.

У загальному випадку різні точки розглядуваного рухомого тіла здійснюють різні рухи. Тому кінематичні дослідження рухів тіл починають з дослідження рухів окремих точок – з ***кінематики точки***. При цьому зовсім не переймаються питанням про те, чи належить розглядувана точка якому-небудь матеріальному тілові (тобто точка по суті є геометричним об'єктом), чи вона є окремим матеріальним тілом, розмірами якого нехтують на підставі відповідних положень. Оскільки всі кінематичні характеристики руху однакові для *матеріальних* і *геометричних* точок, то у кінематиці термін «*точка*» вживають без будь-яких пояснень та уточнень.

Іншим розділом загальної кінематики є ***кінематика твердого тіла***.

* Загальновідомо, що нерухомої системи відліку не існує, оскільки у фізичному всесвіті не існує абсолютно нерухомого тіла.

ТЕМА 10 ► ВСТУП ДО КІНЕМАТИКИ ТОЧКИ

- Основні кінематичні поняття та характеристики руху точки. Види рухів точки.
- Способи визначення руху точки.
- Зв'язок між векторним і координатним способами визначення руху точки.

§ 10.1. ОСНОВНІ КІНЕМАТИЧНІ ПОНЯТТЯ ТА ХАРАКТЕРИСТИКИ РУХУ ТОЧКИ. ВИДИ РУХІВ ТОЧКИ

До основних кінематичних понять і характеристик точки належать певні величини (параметри), які тим чи іншим чином визначають (характеризують) її рух. Розглянемо деякі з них.

ⓘ ***Траєкторія руху*** точки (або ***траєкторія*** точки) – це геометричне місце послідовних положень рухомої точки в просторі та часі.

Неважко усвідомити й уявити, що зазначені *послідовні положення точки в просторі утворюють певну* ***лінію***, за виглядом якої *рух точки розподіляється* на:

- ***прямолінійний***, коли траєкторією руху точки є пряма лінія;
- ***криволінійний***, коли траєкторія точки – крива лінія.

У задачах небесної механіки траєкторію іменують також ***орбітою*** руху точки (***орбітою*** точки).

Інколи траєкторія руху точки – це лінія, яку можна бачити (видима лінія). Наприклад, якщо викладач (або будь-хто інший) якийсь проміжок часу, торкаючись дошки кінчиком шматочка крейди, що знаходиться в його руці, рухає задля певної мети цією рукою, то точка дотику шматочка крейди та дошки, лишає на останній ту чи іншу *видиму* лінію, яка і є траєкторією руху цієї точки за означений проміжок часу. Коли ж викладач, відірвавши шматочок крейди від дошки та продовжуючи тримати його у руці, як завгодно жестикулює, то всі точки шматочка крейди (котрих безліч) рухаються певним чином у просторі; у цьому разі ніякої видимої лінії немає, але кожна точка шматочка крейди безумовно має свою *невидиму* траєкторію руху.

ⓘ ***Переміщення*** точки за певний проміжок часу Δt – це відрізок (та його довжина), який визначає перехід розглядуваної точки з одного положення на траєкторії в інше найкоротшим способом, тобто по прямій.

Умовимося позначати переміщення точки символом ℓ.

Якщо у якийсь момент часу t_0 точка M перебувала в певному положенні M_0, а в момент часу t_1 – в положенні M_1 (див. рис. 10.1), то переміщення точки за проміжок часу $[t_0, t_1]$ визначає відрізок M_0M_1; отже,

$$\ell = M_0M_1 .$$

Рис. 10.1

У багатьох літературних джерелах (див., наприклад, [2, с. 13] небезпідставно переміщення точки розглядають як **векторну величину**, позначаючи його символом $\Delta\vec{r}$; тобто переміщення точки – це вектор $\Delta\vec{r} = \overrightarrow{M_0M_1}$, котрий указує напрям переходу точки з положення M_0 у положення M_1 за проміжок часу $[t_0, t_1]$ і модуль якого дорівнює довжині відрізка M_0M_1. Використовуючи цей вектор $\Delta\vec{r}$, надалі визначають, наприклад, поняття швидкості $\vec{v}$ і прискорення $\vec{a}$ руху точки (див. [2, с. 15]). Автор, не маючи наміру брати участі в будь-якому диспуті з будь-ким, уважає, що у курсі теоретичної механіки, який тут викладається, *немає особливої потреби* розглядати переміщення точки як вектор; це не призводить до хоча б яких-небудь труднощів з уведенням вищезгаданих понять $\vec{v}$ і $\vec{a}$ (див. нижче відповідні місця тем 11 та 12). Позначення ж вектора переміщення через $\Delta\vec{r}$ узагалі недоречне, оскільки $\Delta\vec{r}$ – це загальноприйняте у математиці, фізиці, теоретичній механіці та різноманітних технічних науках позначення приросту радіуса-вектора $\vec{r}$ (наприклад, при визначенні вектора $\vec{v}$ швидкості руху точки векторним способом – див. далі § 11.1).

ⓘ ***Шлях*** (або ***довжина шляху***), що пройшла точка за певний проміжок часу, рухаючись тільки в одному напрямку, – це довжина ділянки траєкторії, по якій розглядувана точка з одного положення в просторі потрапляє в інше.

Умовимося позначати пройдений точкою шлях символом L.

Тоді на рисунку 10.1 шлях, пройдений точкою M за проміжок часу $[t_0, t_1]$, визначає дуга M_0M_1; отже,

$$L = \overset{\smile}{M_0M_1}.$$

З наведених визначень понять *переміщення* та *шляху* неважко зрозуміти, що при будь-якому подальшому русі розглядуваної точки переміщення ℓ змінюватиметься у тих чи інших межах, а шлях L буде постійно тільки зростати; обидві характеристики *завжди є тільки додатними величинами*, які *характеризуються* лише *числовими значеннями*.

Для усвідомлення останнього твердження розглянемо, наприклад, можливий варіант подальшого руху розглядуваної на рисунку 10.1 точки M: нехай у момент часу t_2 ця точка опиняється в положенні M_2, котре збігається з положенням M_0, а в момент часу t_3 – у положенні M_3 (див. рис. 10.2). Тоді:

- за проміжок часу $[t_0, t_1]$ переміщення $\ell_1 = M_0 M_1$, а шлях $L_1 = \overset{\cup}{M_0 M_1}$;
- за проміжок часу $[t_1, t_2]$ переміщення $\ell_2 = M_1 M_2$, а шлях $L_2 = \overset{\cup}{M_1 M_2}$ (очевидно, що $\ell_2 = \ell_1$ та $L_2 = L_1$);
- за проміжок часу $[t_0, t_2]$ переміщення $\ell_3 = 0$, а шлях $L_3 = L_1 + L_2 = 2 \cdot \overset{\cup}{M_0 M_1}$;
- за проміжок часу $[t_2, t_3]$ переміщення $\ell_4 = M_2 M_3 = M_0 M_3$, а шлях $L_4 = \overset{\cup}{M_2 M_3} = \overset{\cup}{M_0 M_3}$;
- за проміжок часу $[t_1, t_3]$ переміщення $\ell_5 = M_1 M_3$, а шлях $L_5 = L_2 + L_4 = \overset{\cup}{M_1 M_2} + \overset{\cup}{M_2 M_3}$;
- за весь проміжок часу $[t_0, t_3]$ переміщення $\ell = M_0 M_3$ (очевидно, що $\ell \equiv \ell_4$), а шлях $L = L_1 + L_2 + L_4$.

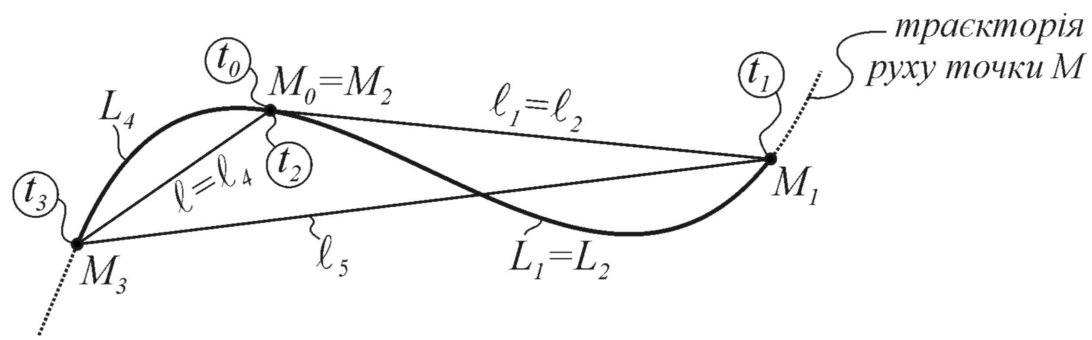


Рис. 10.2

Якщо протягом певного проміжку часу Δt точка рухається не в одному напрямку, то у цьому разі шлях

$$L = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i \,, \qquad \textbf{(10.1)}$$

де i – окрема ділянка траєкторії розглядуваного руху точки, на якій точка рухалася лише в одному напрямку; n – кількість таких ділянок; ΔL_i – шлях, який пройшла точка на i*-тій* ділянці.

З розглянутого на рисунку 10.2 випадку руху точки також зрозуміло, що переміщення ℓ за будь-який проміжок часу *ніколи не може бути більшим* за пройдений точкою за той же проміжок часу шлях L. Ці параметри руху точки *повністю збігаються лише у разі, коли протягом розглядуваного проміжку часу точка рухається тільки прямолінійно та тільки в одному напрямку.*

Отож, коли точка рухається, то за той чи інший проміжок часу вона долає певний шлях. У загальному випадку інша точка проходить цей самий шлях за інший проміжок часу. Наприклад, середньостатистичний пішохід пройде 5 км за годину, а будь-який сучасний автомобіль може проїхати цей шлях за 3 хвилини. Порівнюючи наведені рухи, можна вказати, що пішохід рухається ***повільніше***, ніж авто. Але така характеристика (*повільніше*) є *якісною* та *відносною.* Для *кількісної* оцінки різних рухів точки (або точок) застосовують таку кінематичну характеристику, як *швидкість руху точки.*

ⓘ ***Швидкість руху*** точки (чи ***швидкість*** точки) – це векторна величина, яка характеризує швидкість зміни положення точки в просторі та часі.

Умовимося позначати *вектор швидкості* через $\vec{v}$, а *модуль швидкості* – v.

Одразу усвідомимо, що, оскільки швидкість є векторною величиною, то змінюватися (або не змінюватися) може як модуль (величина) швидкості, так і її напрямок. Наприклад, при криволінійному русі *напрямок* вектора $\vec{v}$ швидкості руху точки весь час відповідним чином змінюється, а при прямолінійному – лишається незмінним*.

Залежно від значення модуля v *рух точки розподіляється* на *рівномірний* та *нерівномірний*.

🛈 ***Рівномірним*** називають такий рух, при якому модуль (або величина) швидкості точки з часом не змінюється, тобто

$$v = const .$$

Безумовною ознакою рівномірного руху точки є те, що за будь-які рівні проміжки часу точка долає однакові шляхи.

🛈 ***Нерівномірним*** називають такий рух, при якому модуль швидкості точки з часом змінюється та, отже, перебуває у тій чи іншій функціональній залежності від часу, тобто

$$v = f(t).$$

Нерівномірний рух, ознакою якого є те, що за рівні проміжки часу Δt точка проходить різні відрізки шляху, своєю чергою розподіляється на *рівнозмінний* і *нерівнозмінний*.

🛈 ***Рівнозмінний*** – це такий нерівномірний рух точки, при якому модуль v її швидкості за будь-які рівні проміжки часу Δt змінюється на рівні (однакові) значення Δv, тобто

---

* Дивись, наприклад, рисунок 10.2, умовно вважаючи, що точка M – це автомобіль, що рухається по якій-небудь ралійній трасі, форма якої збігається зі зображеною на цьому рисунку траєкторією руху. Будь-кому (навіть тому, хто жодного разу в житті не сидів на шоферському місці) зрозуміло, що водію зазначеного автомобіля необхідно весь час відповідно до траєкторії руху обертати кермове колесо, змінюючи напрямок руху й, очевидно, напрямок вектора швидкості автомобіля. При русі ж по прямолінійній ділянці траси кермове колесо потрібно тримати в одному фіксованому положенні, зберігаючи незмінними напрямки руху і вектора швидкості автомобіля. Строге математичне доведення заявленого тут на рівні загальнолюдських відчуттів твердження про *напрямок вектора швидкості* буде отримане далі при розгляданні відповідних питань (див. § 11.4, рис. 11.12 та відповідні «висновки-пояснення»).

$$v \neq const\,, \quad \text{але} \quad \Delta v = const\,.$$

ⓘ ***Нерівнозмінний*** – це такий нерівномірний рух точки, при якому за рівні проміжки часу Δt модуль v її швидкості змінюється на різні значення Δv, тобто

$$v \neq const \quad \text{і} \quad \Delta v \neq const\,.$$

Кожний нерівномірний рух може бути або *прискореним*, або *сповільненим* (див. рис. 10.3).

ⓘ Якщо при русі точки модуль v її швидкості з часом зростає, то такий нерівномірний рух називається ***прискореним***, а якщо зменшується – ***сповільненим***.

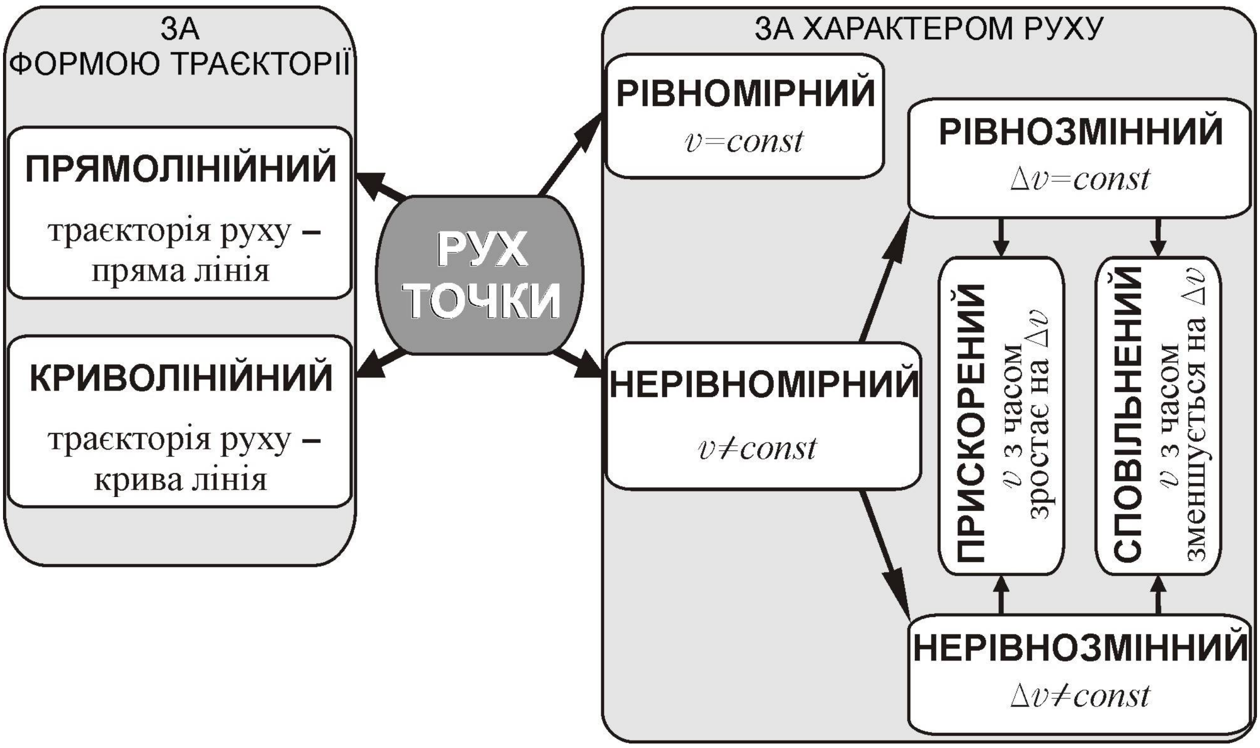


Рис. 10.3. Види рухів точки

Отже, за характером руху розрізняють **п'ять видів руху точки**:

1) рівномірний;

2) рівнозмінний прискорений (або рівноприскорений);

3) рівнозмінний сповільнений (або рівносповільнений);

4) нерівнозмінний прискорений;

5) нерівнозмінний сповільнений.

Важливо розуміти, що і в разі рівномірного руху, і в разі кожного нерівномірного руху точка може виконувати як прямолінійний, так і криволінійний рух. Таким чином, усього існує **десять** основних **видів руху точки**.

Як зазначалося вище, швидкість руху точки є векторною величиною, у якої з часом може змінюватися (або не змінюватися) як модуль, так і напрямок. Для *кількісного* оцінювання зазначених змін (чи не змін) застосовують кінематичну характеристику *прискорення руху точки.*

🛈 ***Прискорення руху*** точки (або ***прискорення*** точки) – це векторна величина, яка характеризує швидкість зміни вектора $\vec{v}$ швидкості точки в просторі та часі.

Умовимося позначати *вектор прискорення* точки символом $\vec{a}$, а *модуль прискорення* – a.

У багатьох ситуаціях словосполучення *швидкість (*чи *прискорення) точки* вживають для означення як вектора швидкості (прискорення), так і модуля швидкості (прискорення); про що саме йдеться, необхідно усвідомлювати з умови конкретної розглядуваної задачі. Неважко зрозуміти, що у вислові «*точка в момент часу t_1 має швидкість $20\,{}^{м}\!/_{сек}$*» ідеться про *модуль швидкості*, а, наприклад, у фразі «*точка починає рух зі швидкістю, напрямленою під кутом θ до горизонту*» говорять про *вектор швидкості.*

Усі наведені тут характеристики руху точки ***є*** тими чи іншими ***функціями часу***.

Крім розглянутих у § 10.1 характеристик руху точки існують й *інші* належні до категорії ***основних***, які отримаємо, розглянемо та дослідимо, вивчаючи наступні відповідні питання і положення кінематики точки.

§ 10.2. СПОСОБИ ВИЗНАЧЕННЯ РУХУ ТОЧКИ

ⓘ Залежність (немає значення, в якому саме вигляді, навіть у вигляді якогось літературного чи музичного твору), яка дозволяє однозначно встановити положення точки в просторі та часі у вибраній системі відліку, називають ***законом руху***, а аналітичний запис цієї залежності – ***рівнянням руху*** точки.

Із наведеного визначення зрозуміло, що кожне рівняння руху точки є і законом руху, але не кожний закон руху точки є рівнянням руху.

ⓘ Існують *три основні способи* (чи *форми*) аналітичного *визначення* (або *задання*, або *опису*) руху точки:

- векторний (чи векторна);
- координатний (чи координатна);
- натуральний (чи натуральна).

Векторний спосіб визначення руху точки. Положення точки M у просторі задають радіусом-вектором $\vec{r}$, проведеним у розглядувану точку з нерухомого початку відліку O, який обирають довільно або на підставі доречних логічних міркувань. Очевидно (див. рис. 10.4), що при русі точки радіус-вектор $\vec{r}$ зазнає відповідних змін. Тому для однозначного встановлення положення точки в просторі у будь-який момент часу t необхідно знати, як саме змінюється в часі радіус-вектор $\vec{r}$.

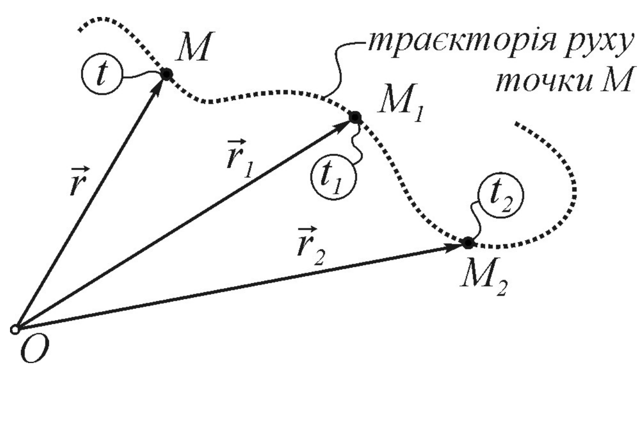


Рис. 10.4

Тоді

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

(10.2) – ***рівняння*** (або ***закон***) ***руху точки у векторній формі***.

Функція $\vec{r} = \vec{r}(t)$ є однозначною, неперервною та у більшості задач механіки двічі диференційованою функцією часу t.

З точки зору вищої математики *визначити певний вектор* як функцію часу *означає*, що обов'язково є можливість знаходити в будь-який момент часу модуль та напрямок зазначеного вектора; це можна зробити у разі, якщо обрано певну конкретну систему відліку й указано математичні залежності, які дозволяють установити вказані параметри розглядуваного вектора у цій системі відліку.

Отже, радіус-вектор $\vec{r}$ як функцію часу обов'язково необхідно задати в якійсь системі відліку. Але при векторному способі визначення руху точки у механіці (та в інших суміжних науках) саму цю систему ніяк не конкретизують. Ця обставина (відсутність необхідності конкретизувати систему відліку) дозволяє широко застосовувати закон руху у вигляді залежності (10.2) *при доведеннях різних теорем кінематики та динаміки* й *у теоретичних дослідженнях* тих чи інших процесів, явищ і систем.

Під час руху кінець радіуса-вектора $\vec{r}$ описує в просторі траєкторію руху точки M.

Координатний спосіб визначення руху точки. Положення рухомої точки M у просторі відносно декартової системи координат $Oxyz$ задають координатами x, y та z (рис. 10.5), які при русі точки змінюються. Тому для однозначного встановлення положення точки в просторі необхідно знати функціональні залежності кожної координати від часу, за допомогою яких для кожного моменту часу можна встановити значення відповідної координати.

Тоді

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\}$$

(10.3) – ***рівняння*** (або ***закон***) ***руху точки в координатній формі***.

Функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ є однозначними, неперервними й у більшості задач двічі диференційованими функціями часу.

Розглянемо випадок, коли точка рухається по криволінійній траєкторії в певній площині. Сумістимо з цією площиною декартові осі Ox та Oy (див. рис. 10.6); у такому разі при русі точки зазнають змін лише її координати x і y, а координата z, лишаючись незмінною, дорівнює нулеві.

Тоді

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\}$$

(10.4) – ***рівняння*** *(*або ***закон****)* ***руху точки в площині*** *xOy* ***у координатній формі.***

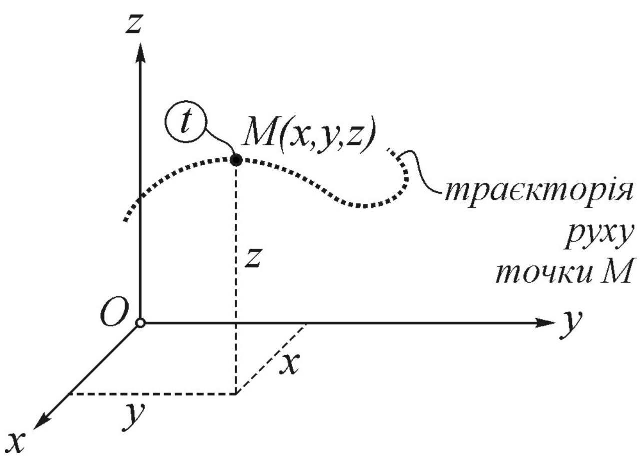


Рис. 10.5

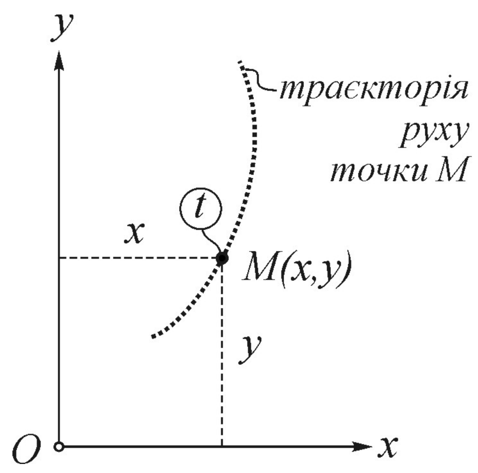


Рис. 10.6

Зрозуміло, що *прямолінійний рух точки* за умови відповідного вибору напрямків координатних осей може бути *визначений одним рівнянням* (у разі відсутності розуміння – див. далі § 11.3).

З точки зору математики рівняння (10.3) і (10.4) – це *параметричні рівняння*, де параметром є час t. Виключивши його з рівнянь руху, дістанемо ***рівняння траєкторії руху точки в явному вигляді*** (або ***рівняння траєкторії руху точки в коорди-***

натній формі). Використовуючи знання аналітичної геометрії, рівняння траєкторії руху точки в явному вигляді дає змогу відразу вказати та (у разі необхідності) зобразити саму траєкторію руху.

Розглянемо це на прикладах.

Приклад 10.1. Нехай точка рухається за законом

$$\begin{cases} x = 2t\,(м), \\ y = 3 - 4t^2\,(м). \end{cases}$$

Установити траєкторію руху точки.

Розв'язування. З першого рівняння знаходимо, що $t = \dfrac{x}{2}$; підставляючи це значення в друге рівняння, дістанемо

$$y = 3 - 4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 3 - 4 \cdot \frac{x^2}{4}$$

або

$$y = 3 - x^2 .$$

Отримане рівняння свідчить, що траєкторією руху точки є квадратна парабола (точніше – певна частина вказаної параболи), вітки якої симетричні відносно осі y, напрямлені вниз і вершина якої знаходиться в точці $C(0,3)$ (рис. 10.1п).

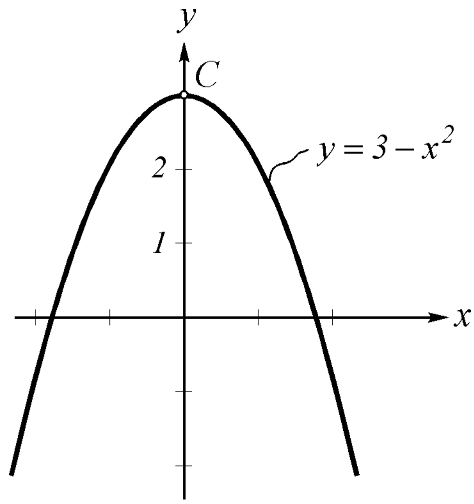


Рис. 10.1п

Приклад 10.2. Установити траєкторію руху точки, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$\begin{cases} x = 6\sin 5t\,(см), \\ y = 10\cos 5t\,(см). \end{cases}$$

Розв'язування. У цьому разі для виключення часу t необхідні інші порівняно з попередньою задачею дії й алгебраїчні перетворення.

Отже, ділимо перше рівняння на 6, а друге – на 10:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{6} = sin\,5t\,, \\ \dfrac{y}{10} = cos\,5t\,, \end{cases}$$

підносимо обидві частини обох рівнянь до квадратів:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{6^2} = sin^2\,5t\,, \\ \dfrac{y^2}{10^2} = cos^2\,5t\,, \end{cases}$$

додаємо одне до одного два останні отримані рівняння:

$$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{10^2} = sin^2\,5t + cos^2\,5t\,.$$

Узявши до уваги те, що оскільки

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1\,,$$

то і

$$sin^2\,5t + cos^2\,5t = 1\,,$$

з урахуванням чого остаточно дістанемо

$$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1\,.$$

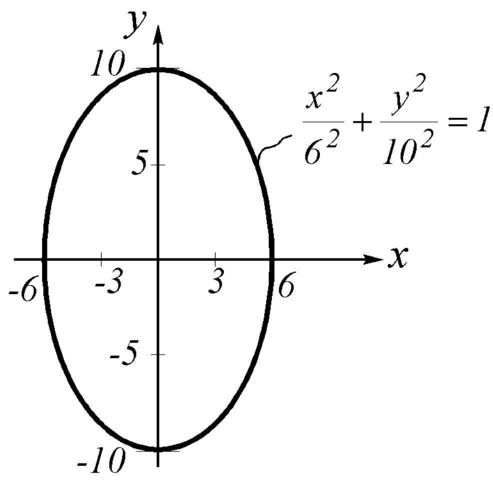


Рис. 10.2п

Отримане рівняння свідчить, що траєкторією руху точки є еліпс з півосями $6\,см$ і $10\,см$ та із центром на початку системи координат (рис. 10.2п).

Натуральний спосіб визначення руху точки. Натуральним способом визначення руху точки зручно та є можливість користуватися лише у випадках, коли *траєкторія руху точки відома (визначена, задана) заздалегідь*.

Нехай для точки M відома траєкторія руху. Спрямуємо вздовж неї вісь s, яка повністю відтворює відому (задану) траєкторію; оскільки в загальному випадку траєкторія є кривою лінією, то вісь s називають ***дуговою віссю***. Виберімо на осі s (або, що те саме, на відомій траєкторії) яку-небудь нерухому точку O та приймімо її за початок відліку; встановімо для дугової осі додатний та від'ємний напрямки, як для звичайної координатної осі.

> Додатний напрямок дугової осі можна обирати довільно, але краще – у напрямку руху точки по траєкторії (якщо це можливо в умовах розглядуваного випадку).

Тоді положення рухомої точки M на траєкторії буде однозначно задаватися координатою, яку відраховують та відкладають у певному лінійному масштабі від початку відліку вздовж дугової осі s; через це зазначену координату називають ***дуговою координатою*** й позначають $\boldsymbol{s}$ (рис. 10.7).

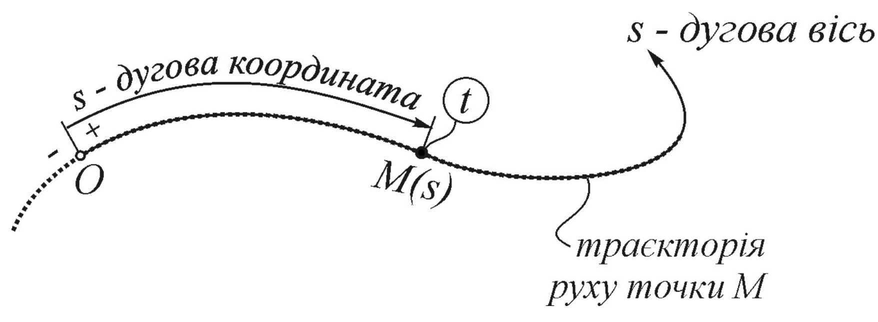


Рис. 10.7

Очевидно, що дугова координата s дорівнює взятому з відповідним знаком («плюс» чи «мінус») значенню *віддалі*, виміряній уздовж дугової осі (або, що те саме, – вздовж траєкторії руху) від точки O до розглядуваного у момент часу t положення точки M. При русі зазначена віддаль і відповідно дугова координата s із часом змінюються. Тому для однозначного задання положення точки в просторі необхідно мати траєкторію руху та знати функціональну залежність дугової координати s від часу, за допомогою котрої для будь-якого моменту часу t можна встановити конкретне значення координати s.

Тоді

$$s = s(t)$$ **(10.5)** – ***рівняння*** (або ***закон***) ***руху точки в натуральній формі***.

Функція $s(t)$ є однозначною, неперервною та у більшості задач механіки двічі диференційованою функцією часу t.

На відміну від рівнянь (10.2) і (10.3), які самодостатньо встановлюють положення точки в просторі, рівняння (10.5) визначає лише положення точки на траєкторії. Положення точки в просторі при натуральному способі визначення руху задається *сукупністю* перелічених вище *параметрів*, а саме:

а) траєкторією руху (її формою та положенням у просторі);

б) початком відліку на траєкторії з указанням додатного і від'ємного напрямків відліку дугової координати;

в) лінійним масштабом;

г) власне рівнянням (10.5).

Важливо розуміти, що у рівнянні (10.5) дугова координата s *визначає* в момент часу t *положення рухомої точки на траєкторії відносно початку відліку*, а не шлях L, що пройшла точка за проміжок часу $[0,t]$. Тобто в загальному випадку фізичні величини s і L є різними поняттями.

Для усвідомлення останнього зауваження розглянемо приклад.

🛠 **Приклад 10.3.** Нехай точка M по *відомій траєкторії* рухається за законом

$$s = 4 - 2 \cdot sin\frac{\pi t}{2}(м).$$

З'ясуємо й порівняємо, наприклад, протягом перших чотирьох секунд руху через кожну секунду відповідні значення дугової координати s_i, які визначають положення точки M на траєкторії, та значення пройденого шляху L_i від початку руху.

Розв'язування. У початковому положенні (або у початковий момент часу $t_0 = 0$)

$$s_0 = 4 - 2 \cdot sin\frac{\pi \cdot t_0}{2} = 4 - 2 \cdot sin\frac{\pi \cdot 0}{2} = 4 - 2 \cdot sin 0 = 4(м);$$

позначимо положення точки на траєкторії в момент часу $t_0 = 0$ як M_0 (див. рис. 10.3п); безсумнівно, що у початковий момент часу пройдений точкою M шлях $L_0 = 0$, а з плином часу при подальшому русі точки по траєкторії шлях L постійно тільки зростатиме.

У момент часу $t_1 = 1 сек$

$$s_1 = 4 - 2 \cdot sin\frac{\pi \cdot t_1}{2} = 4 - 2 \cdot sin\frac{\pi \cdot 1}{2} = 4 - 2 \cdot 1 = 2(м),$$

тобто значення дугової координати зменшилося; це означає, що за проміжок часу $[0,1]$ точка M перемістилася у від'ємному напрямкові дугової осі s і опинилася в положенні M_1 (див. рис. 10.3п), пройшовши при цьому шлях

$$L_1 = |s_1 - s_0| = |2 - 4| = |-2| = 2(м).$$

При $t_2 = 2\,сек$

$$s_2 = 4 - 2 \cdot sin\frac{\pi \cdot t_2}{2} = 4 - 2 \cdot sin\frac{\pi \cdot 2}{2} = 4 - 2 \cdot 0 = 4(м),$$

$$L_2 = L_1 + |s_2 - s_1| = 2 + |4 - 2| = 4(м);$$

оскільки $s_2 = s_0$, то, звісно, положення M_0 і M_2 точки збігаються (див. рис. 10.3п).

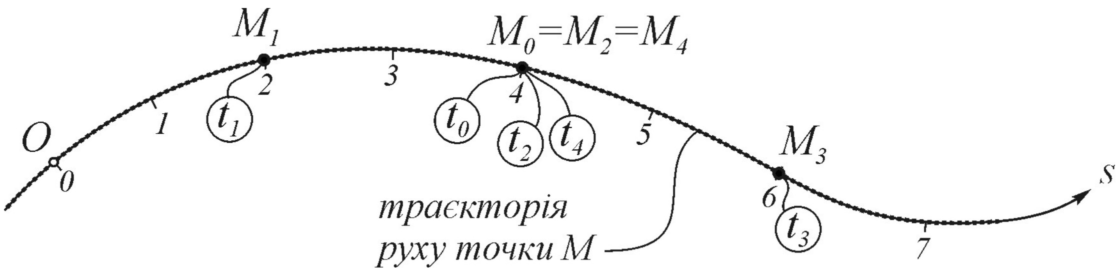


Рис. 10.3п

При $t_3 = 3\,сек$

$$s_3 = 4 - 2 \cdot sin\frac{\pi \cdot t_3}{2} = 4 - 2 \cdot sin\frac{\pi \cdot 3}{2} = 4 - 2 \cdot (-1) = 6(м),$$

$$L_3 = L_2 + |s_3 - s_2| = 4 + |6 - 4| = 6(м).$$

При $t_4 = 4\,сек$

$$s_4 = 4 - 2 \cdot sin\frac{\pi \cdot t_4}{2} = 4 - 2 \cdot sin\frac{\pi \cdot 4}{2} = 4 - 2 \cdot sin\,2\pi = 4 - 2 \cdot 0 = 4(м),$$

$$L_4 = L_3 + |s_4 - s_3| = 6 + |4 - 6| = 6 + 2 = 8(м);$$

оскільки $s_4 = s_0$, то у момент часу t_4 точка знову опинилась у початковому положенні (див. рис. 10.3п).

Отримані результати свідчать, що числові значення s_i і L_i тричі збігаються ($s_1 = L_1 = 2м$, $s_2 = L_2 = 4м$, $s_3 = L_3 = 6м$), але з усвідомлення розглянутого прикладу очевидно, що дугова координата s є відмінним від пройденого шляху L поняттям. Також неважко зрозуміти, що при подальшому русі точки дугова координата s змінюватиметься у межах $[2;6]$, а пройдений точкою M шлях L буде тільки постійно зростати.

Таким чином, дугова координата s точки, що рухається, в будь-який момент часу t *повністю збігається* зі шляхом L, який пройшла точка по траєкторії за проміжок часу $[0,t]$, *тільки в єдиному разі: коли точка починає рух з початку відліку та рухається лише в додатному напрямку по незамкнутій траєкторії.*

Уведімо поняття ***приросту дугової координати***.

Нехай при русі точка у моменти часу t_1 і t_2 перебуває в положеннях M_1 та M_2, які визначають дугові координати s_1 і s_2 відповідно (рис. 10.8). Позначимо різницю $(s_2 - s_1)$ як Δs:

$$\Delta s = s_2 - s_1,$$

уважаючи Δs приростом дугової координати протягом розглядуваного проміжку часу $\Delta t = t_2 - t_1$.

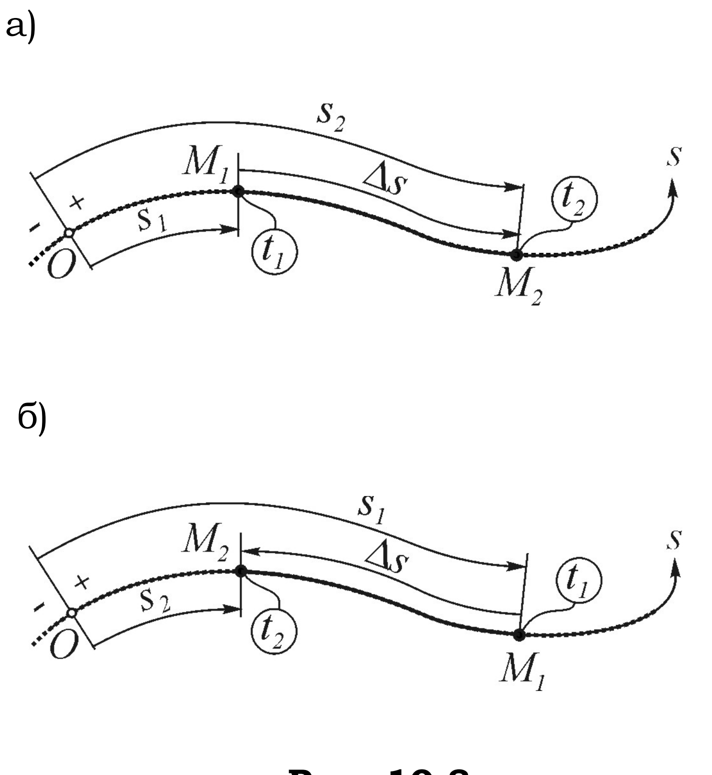


Рис. 10.8

Розглянемо два можливі випадки руху точки за проміжок часу Δt.

Якщо рух точки відбувається тільки в додатному напрямку дугової осі s, то дугова координата s постійно зростає; у такому разі $s_2 > s_1$ і, звісно, приріст дугової координати $\Delta s > 0$, тобто є *додатним* (рис. 10.8, а).

Якщо ж точка рухається тільки в напрямку, протилежному до додатного напрямку дугової осі s, то дугова координата s постійно зменшується; в цьому разі $s_2 < s_1$, а приріст дугової координати $\Delta s < 0$, тобто є *від'ємним* (рис. 10.8, б).

Усі розглянуті в § 10.2 *способи визначення руху точки взаємопов'язані.*

§ 10.3. ЗВ'ЯЗОК МІЖ ВЕКТОРНИМ І КООРДИНАТНИМ СПОСОБАМИ ВИЗНАЧЕННЯ РУХУ ТОЧКИ

Для встановлення зв'язку між векторним і координатним способами визначення руху точки розглянемо довільний рух точки M заданий рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$ та $z = z(t)$ у певній нерухомій системі відліку $Oxyz$ (рис. 10.9). Зрозуміло, що у такому разі точка O має нульові координати: $x_O = 0$, $y_O = 0$, $z_O = 0$.

Нехай у довільний момент часу t положення точки M визначають координати $x_M = x$, $y_M = y$ та $z_M = z$.

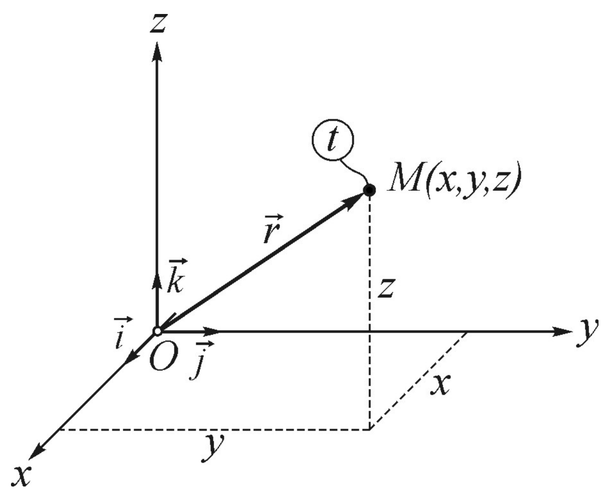


Рис. 10.9

Проведімо з початку відліку O в розглядувану рухому точку M радіус-вектор $\vec{r}$ (див. рис. 10.9) і запишімо вектор $\vec{r}$, як може бути записаний будь-який вектор, за його проекціями r_x, r_y, та r_z на декартові координатні осі:

$$\vec{r} = \vec{i} \cdot r_x + \vec{j} \cdot r_y + \vec{k} \cdot r_z,$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$ – орти відповідних координатних осей.

З векторної алгебри відомо, що проекція будь-якого вектора на будь-яку з осей дорівнює різниці між відповідними координатами точок кінця й початку цього вектора.

Тоді у розглядуваному випадкові

$$r_x = x_M - x_0 = x - 0 = x\,,$$

$$r_y = y_M - y_0 = y - 0 = y\,,$$

$$r_z = z_M - z_0 = z - 0 = z\,.$$

З урахуванням установлених проекцій остаточно дістаємо

$$\vec{r} = \vec{i}\cdot x + \vec{j}\cdot y + \vec{k}\cdot z$$

(10.6) – ***зв'язок між векторним та координатним способами визначення руху***.

Усі згадані в §§ 10.1 ÷ 10.3 *просторові параметри та характеристики* руху точки, які, певна річ, є *фізичними величинами*, мають ***розмірність довжини***, котру позначають (маємо на увазі не довжину, а *розмірність довжини*) символом L, тобто

$$[r]=[x]=[y]=[z]=[s]=[\ell]=[L]=L\,,$$

а ***одиницею вимірювання*** усіх зазначених фізичних величин у Міжнародній системі одиниць (СІ або SI – від *System International*) є метр (*м*). Широко застосовують також похідні та позасистемні одиниці вимірювання – сантиметр (*см*), міліметр (*мм*), кілометр (*км*).

ТЕМА 11 ► ШВИДКІСТЬ РУХУ ТОЧКИ

- Швидкість руху точки при векторному способі визначення її руху.
- Швидкість руху точки при координатному способі визначення її руху.
- Швидкість руху точки при координатному способі визначення її прямолінійного руху.
- Швидкість руху точки при натуральному способі визначення її руху.
- Зв'язок між натуральним і координатним способами визначення руху точки.

Відповідно до трьох основних способів (форм) аналітичного визначення руху точки існує і *три способи* (*форми*) *визначення* іншої важливої кінематичної характеристики – *швидкості руху точки.*

Перш ніж розглядати зазначені способи, згадаємо поняття *швидкості точки у прямолінійному рівномірному русі*, яке належить до елементарних понять. Переважна більшість представників людства зазвичай ще з початкової школи знає, що у цьому разі

$$v = \frac{L}{t}, \qquad \textbf{(11.1)}$$

де v – модуль швидкості; L – пройдений точкою шлях; t – проміжок часу, за який цей шлях пройдено.

Оскільки за визначеннями § 10.1 у разі прямолінійного руху точки напрямок вектора $\vec{v}$ лишається незмінним, а при рівномірному русі модуль $v = const$, то ***швидкість прямолінійного рівномірного руху*** – це ***стала векторна величина***:

$$\vec{v} = const.$$

Звісно, що вектор $\vec{v}$, будучи характеристикою конкретної точки у конкретний момент часу, є *фіксованим* вектором.

З формули (11.1) очевидно, що ***розмірність*** швидкості визначає відношення розмірності довжини до розмірності часу, тобто

$$[v] = \frac{[довжина]}{[час]} = \frac{L}{T} = LT^{-1}.$$

Одиниця вимірювання швидкості в системі СІ – $\frac{м}{сек}$; також застосовують і позасистемні одиниці – $\frac{см}{сек}$, $\frac{км}{год}$ та інші.

§ 11.1. ШВИДКІСТЬ РУХУ ТОЧКИ ПРИ ВЕКТОРНОМУ СПОСОБІ ВИЗНАЧЕННЯ ЇЇ РУХУ

Розглянемо рух точки, заданий векторним способом, тобто випадок, коли рівняння руху $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – відоме.

Визначимо швидкість $\vec{v}$ руху точки.

Нехай при русі у довільний момент часу t точка перебуває у положенні M, яке визначає радіус-вектор $\vec{r}$, а, рухаючись тільки в одному напрямку, через певний досить малий проміжок часу Δt у момент часу

$$t_1 = t + \Delta t$$

опиняється у положенні M_1, котре визначає радіус-вектор

$$\vec{r} = \vec{r} + \Delta\vec{r},$$

де $\Delta\vec{r}$ – приріст радіус-вектора $\vec{r}$ за проміжок часу Δt (рис. 11.1).

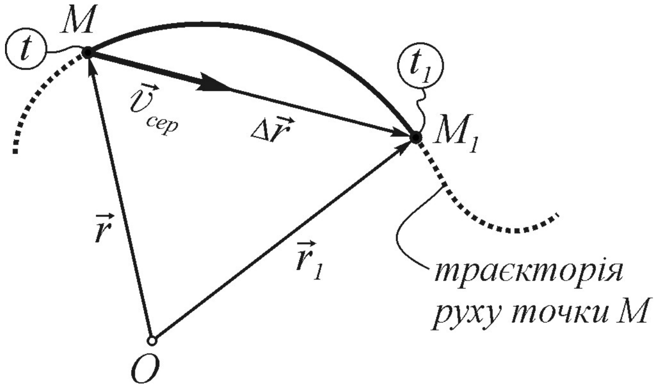


Рис. 11.1

З рисунка видно, що за проміжок часу Δt точка проходить шлях ΔL, який дорівнює довжині дуги $\overset{\cup}{MM_1}$ траєкторії руху:

$$\Delta L = \overset{\cup}{MM_1},$$

а переміщення $\Delta\ell$ точки за цей же проміжок часу дорівнює довжині хорди MM_1, що стягує зазначену дугу:

$$\Delta\ell = MM_1.$$

За визначенням (див. § 10.1) *швидкість руху* точки – це векторна величина, що *характеризує* швидкість *зміни положення* точки в просторі та часі. Оскільки у розглядуваному випадку положення точки M у просторі задає радіус-вектор $\vec{r}$, то зміну її положення за проміжок часу Δt характеризує приріст $\Delta\vec{r}$; тоді згідно з формулою (11.1) відношення $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ визначає ***середню швидкість точки*** за проміжок часу Δt, тобто

$$\vec{v}_{сер} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

З викладеного зрозуміло, що вектор $\vec{v}_{сер}$ середньої швидкості:

1) збігається за напрямом з напрямом вектора $\Delta\vec{r}$ (тобто напрямлений ***по січній***, що проходить через точки M і M_1 траєкторії, див. рис. 11.1);

2) визначає деякий ***уявний*** (або ***фіктивний***) ***рух*** точки по хорді MM_1;

3) лише ***наближено характеризує дійсний рух*** по дузі $\overset{\cup}{MM_1}$ траєкторії.

Якщо, наприклад, шлях *у* $350\,км$ між Полтавою та Києвом здоланий на автомобілі за $5\,годин$, то середня швидкість такого руху становить $v_{сер} = 70\frac{км}{год}$. Але ж безсумнівно це зовсім не означає, що при русі автомобіля стрілка його спідометра весь час указувала тільки на значення $70\frac{км}{год}$, а напрямок руху лишався незмінним.

У разі зменшення проміжку часу Δt, для якого визначена середня швидкість, величина $\vec{v}_{сер}$ буде точніше характеризувати дійсний рух точки через те, що у такому разі: а) положення точки M_1 наближається до положення точки M; б) значення шляху ΔL, пройденого точкою за розглядуваний проміжок часу, наближається до значення переміщення $\Delta\ell$; в) криволінійний рух точки стає все «більше схожим» на прямолінійний (рис. 11.2). При подальшому зменшенні приросту Δt фіктивний рух по хорді буде все більше наближатися до дійсного руху по дузі, а *точність* кінематичної характеристики $\vec{v}_{сер}$ *зростатиме.*

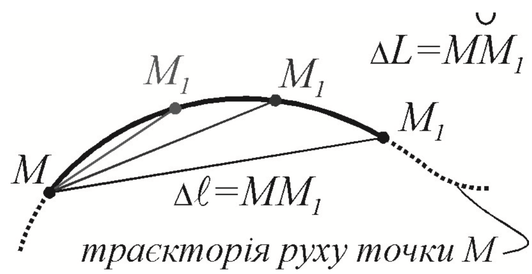


Рисунок 11.2

Щоб отримати об'єктивну характеристику зміни положення точки, яка не залежить від проміжку часу Δt та називається ***швидкістю точки у момент часу*** t (або ***миттєвою***, або ***дійсною***) ***швидкістю*** $\vec{v}$, слід перейти до границі:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{сер} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Оскільки Δt – це приріст скалярного аргументу t, а $\Delta\vec{r}$ – приріст радіуса-вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$, який є *векторною функцією* цього аргументу, то відповідно до теорії диференціального числення границя відношення $\dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ є першою *векторною похідною*[*] від радіуса-вектора $\vec{r}$ за часом t.

Тобто

$$\vec{v} = \frac{d\,\vec{r}}{dt}$$ **(11.2)** – ***дійсна*** (або ***миттєва***) ***швидкість руху точки у векторній формі***.

У теоретичній механіці (і не тільки в ній) оператор диференціювання за часом позначають крапкою над значенням функції, від якої визначають зазначену похідну, тобто

$$\vec{v} = \frac{d\,\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}\,. \qquad \textbf{(11.2)}$$

ⓘ ***Вектор швидкості точки*** у довільний момент часу t дорівнює першій векторній похідній за часом від радіуса-вектора $\vec{r}$, який визначає положення цієї точки у просторі.

Можна сказати (оскільки так воно і є), що формула (11.2) є найбільш загальним та стислим математичним визначенням вектора $\vec{v}$ швидкості руху точки.

Який напрямок вектора $\vec{v}$ та чому дорівнює його модуль v, з'ясуємо у двох наступних параграфах.

§ 11.2. ШВИДКІСТЬ РУХУ ТОЧКИ ПРИ КООРДИНАТНОМУ СПОСОБІ ВИЗНАЧЕННЯ ЇЇ РУХУ

Розглянемо рух точки, заданий координатним способом.

Визначимо швидкість $\vec{v}$ руху точки.

Нехай у нерухомій декартовій системі координат $Oxyz$ рух точки M задано рівняннями

[*] Позначення векторної похідної аналогічне до позначення похідної від скаляра.

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

Уведемо також до розгляду радіус-вектор $\vec{r}$ (рис. 11.3) та скористаємося отриманими раніше залежностями: згідно з формулою (10.6)

$$\vec{r} = \vec{i} \cdot x + \vec{j} \cdot y + \vec{k} \cdot z,$$

(де $\vec{i} = const$, $\vec{j} = const$ та $\vec{k} = const$, оскільки система відліку – нерухома), а згідно з формулою (11.2)

$$\vec{v} = \frac{d\,\vec{r}}{dt}.$$

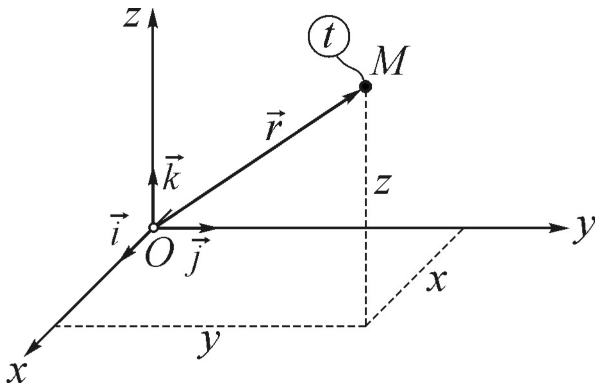


Рисунок 11.3

Підставляючи значення $\vec{r}$, одержимо

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\vec{i} \cdot x + \vec{j} \cdot y + \vec{k} \cdot z\right).$$

Здиференціюємо вираз у дужках, урахувавши, що похідна від суми дорівнює сумі похідних і сталі множники при змінних величинах (у цьому разі $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$) можна виносити за знак похідної:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\vec{i} \cdot x\right) + \frac{d}{dt}\left(\vec{j} \cdot y\right) + \frac{d}{dt}\left(\vec{k} \cdot z\right) = \vec{i} \cdot \frac{dx}{dt} + \vec{j} \cdot \frac{dy}{dt} + \vec{k} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Отже,

$$\vec{v} = \vec{i} \cdot \dot{x} + \vec{j} \cdot \dot{y} + \vec{k} \cdot \dot{z}$$ **(11.3,а)** – ***дійсна*** (або ***миттєва***) ***швидкість руху точки у координатній формі***.

Спроектувавши векторне рівняння (11.3) на координатні осі, дістанемо три скалярних:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \dot{x}, \\ v_y &= \dot{y}, \\ v_z &= \dot{z} \end{aligned}\right\}$$ **(11.4)** – ***проекції швидкості руху точки на координатні осі.***

ⓘ ***Проекції швидкості точки на нерухомі декартові координатні осі*** дорівнюють першим похідним за часом від відповідних координат, які задають положення точки.

З урахуванням позначень, котрі визначає формула (11.4), залежність (11.3,а) можна подати у вигляді

$$\vec{v} = \vec{i} \cdot v_x + \vec{j} \cdot v_y + \vec{k} \cdot v_z . \qquad \textbf{(11.3,б)}^*$$

Побудувавши прямокутний паралелепіпед, ребра якого паралельні осям нерухомої декартової системи координат $Oxyz$ і дорівнюють визначеним формулою (11.4) проекціям v_x, v_y і v_z, та зобразивши відповідну діагональ цього паралелепіпеда, отримаємо вектор $\vec{v}$ дійсної (або миттєвої) швидкості точки (див. рис. 11.4, де проекції v_x, v_y і v_z умовно зображено додатними).

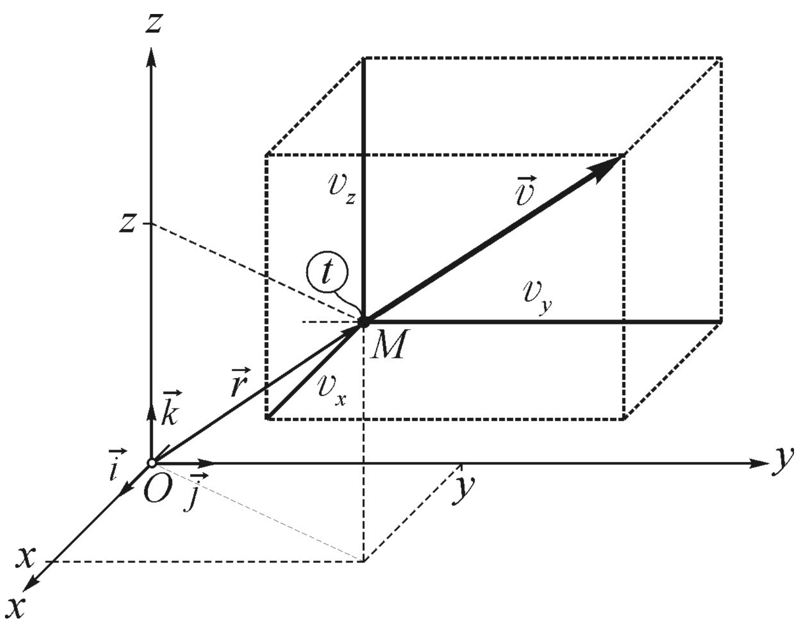


Рис. 11.4

---

* Нумерація тут (і далі) формул у вигляді (11.3,а) та (11.3,б) означає, що з точки зору вищої математики й теоретичної механіки ці формули є повністю *тотожними.*

Через установлені проекції v_x, v_y і v_z ***модуль*** v ***швидкості*** точки можна знайти за відомою з векторної алгебри формулою

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,, \tag{11.5,а}$$

підставляючи в яку значення v_x, v_y і v_z, у нашому разі дістанемо

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,. \tag{11.5,б}$$

Згідно з положеннями векторної алгебри ***напрямок вектора*** $\vec{v}$ можна визначити за допомогою ***напрямних косинусів*** кутів між додатними напрямками координатних осей Ox, Oy, Oz та вектора $\vec{v}$ відповідно у вигляді

$$\left.\begin{aligned} cos(\widehat{\vec{i};\vec{v}}) &= \frac{v_x}{v}, \\ cos(\widehat{\vec{j};\vec{v}}) &= \frac{v_y}{v}, \\ cos(\widehat{\vec{k};\vec{v}}) &= \frac{v_z}{v} \end{aligned}\right\} \tag{11.6,а}$$

або з урахуванням відповідних значень

$$\left.\begin{aligned} cos(\widehat{\vec{i};\vec{v}}) &= \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \\ cos(\widehat{\vec{j};\vec{v}}) &= \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \\ cos(\widehat{\vec{k};\vec{v}}) &= \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{11.6,б}$$

Таким чином, залежності (11.3) ÷ (11.6) однозначно встановлюють усі параметри вектора $\vec{v}$ швидкості точки при координатному способі задання її руху в загальному випадкові.

Розглянемо тепер випадок, коли точка рухається по довільній траєкторії *в певній площині.* Сумістимо із цією площиною декартові осі Ox та Oy (рис. 11.5).

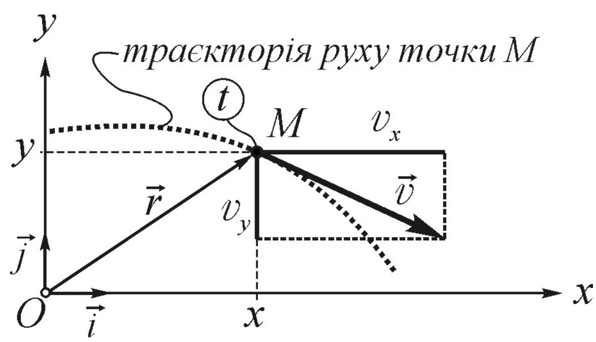


Рис. 11.5

Тоді згідно з формулами (11.3) ÷ (11.6) матимемо

$$\vec{v} = \vec{i} \cdot v_x + \vec{j} \cdot v_y = \vec{i} \cdot \dot{x} + \vec{j} \cdot \dot{y}, \qquad \textbf{(11.7)}$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(11.8)}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \qquad \textbf{(11.9)}$$

$$\left.\begin{aligned} cos(\vec{i}\,\hat{;}\,\vec{v}) &= \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \\ cos(\vec{j}\,\hat{;}\,\vec{v}) &= \frac{v_y}{v} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(11.10)}$$

Отже, у разі руху точки в площині Oxy всі параметри вектора $\vec{v}$ її швидкості однозначно встановлюють формули (11.7) ÷ (11.10).

> Формули (11.6) та (11.10) задають *положення вектора* $\vec{v}$ *в просторі* відповідними кутами ***відносно декартових координатних осей***.

§ 11.3. ШВИДКІСТЬ РУХУ ТОЧКИ ПРИ КООРДИНАТНОМУ СПОСОБІ ВИЗНАЧЕННЯ ЇЇ ПРЯМОЛІНІЙНОГО РУХУ

Розглянемо окремо випадок, коли точка виконує *прямолінійний* рух. Направимо вздовж траєкторії руху точки, наприклад, координатну вісь Ox (рис. 11.6); у такому разі закон руху точки буде визначатися одним рівнянням

$$x = x(t)^{*}.$$

Тоді відповідно до викладеного в попередньому параграфі:

✓ вектор швидкості

$$\vec{v} = \vec{i} \cdot v_x = \vec{i} \cdot \frac{dx}{dt} = \vec{i} \cdot \dot{x}; \qquad \textbf{(11.11)}$$

✓ проекцію швидкості на вісь Ox визначає перша похідна за часом від координати x:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \qquad \textbf{(11.12)}$$

✓ через те, що похідна $\dfrac{dx}{dt}$ може бути як додатною, так і від'ємною, то вектор $\vec{v}$ швидкості руху точки проектується на вісь Ox *у дійсну* (*натуральну*) *величину* зі знаком «плюс» чи «мінус»:

$$v_x = \pm v; \qquad \textbf{(11.13)}$$

✓ модуль швидкості дорівнює абсолютному значенню проекції швидкості на вісь Ox:

$$v = |v_x| = \left|\frac{dx}{dt}\right| = |\dot{x}|. \qquad \textbf{(11.14)}$$

Для подальших міркувань і висновків зауважимо, що:

1) за визначенням похідної

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

де $\Delta x = (x_1 - x)$ – приріст координати x за проміжок часу $\Delta t = (t_1 - t)$; x і x_1 – координати, які визначають положення

---

[*] Звісно, що у разі прямолінійного руху точки вздовж осі y (або z) закон руху буде мати вигляд $y = y(t)$ (або $z = z(t)$).

M і M_1 точки у моменти часу t і t_1 відповідно;

2) оскільки Δt – завжди тільки додатна величина, то знак похідної $\frac{dx}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ залежить лише від *знака* приросту Δx;

3) якщо за проміжок часу Δt рух точки відбувається тільки в напрямку осі Ox, то в цьому разі $x_1 > x$ і приріст $\Delta x > 0$, тобто є *додатним* (див. рис. 11.6,а); якщо ж за проміжок часу Δt рух точки відбувається в напрямку, протилежному до додатного напрямку осі Ox, то в цьому разі $x_1 < x$ і приріст $\Delta x < 0$, тобто є *від'ємним* (див. рис. 11.6,б).

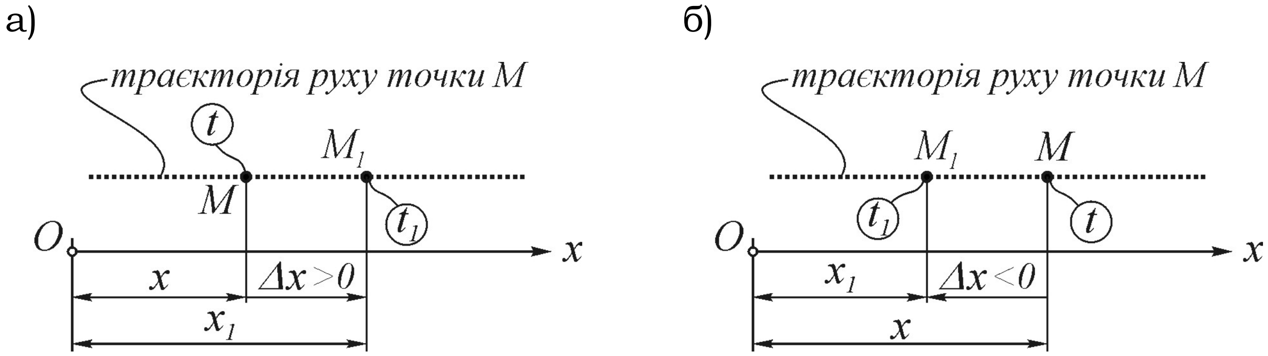


Рис. 11.6

Тепер розглянемо та проаналізуємо ***можливі варіанти*** (усього можливих варіантів буде ***три***).

1. Якщо у певний розглядуваний момент часу t похідна

$$\frac{dx}{dt} > 0,$$

то в цю мить приріст $\Delta x > 0$, проекція $v_x = +v > 0$, напрямок вектора $\vec{v} = \vec{i} \cdot v$ збігається з напрямком осі Ox і, отже, точка рухається у напрямку цієї осі (див. рис. 11.7,а).

2. Якщо у певний розглядуваний момент часу t похідна

$$\frac{dx}{dt} < 0,$$

то в цю мить приріст $\Delta x < 0$, проекція $v_x = -v < 0$, напрямок вектора $\vec{v} = -\vec{i} \cdot v$ не збігається з напрямком осі Ox і, отже, точка рухається протилежно до напрямку цієї осі (див. рис. 11.7,б).

Виконаний аналіз перших двох можливих варіантів дозволяє сформулювати важливий для кінематики точки **висновок**:

> ⓘ знак похідної $\dfrac{dx}{dt}$ (або, що те саме, знак проекції v_x) указує у розглядуваний момент часу напрямок руху точки по прямолінійній траєкторії порівняно з напрямком обраної осі Ox .

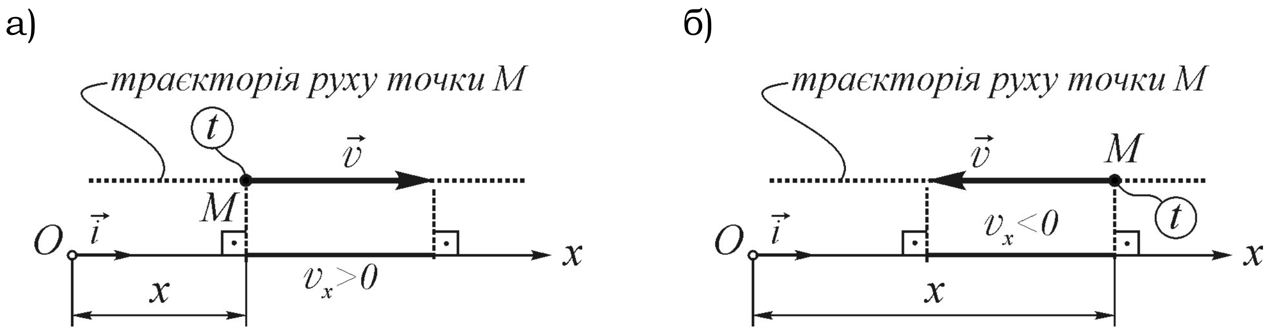


Рис. 11.7

3. Якщо при неперервному русі точки у певний розглядуваний момент часу t похідна

$$\frac{dx}{dt} = 0,$$

то з математичної точки зору це означає, що у цей момент часу функція $x = x(t)$ досягла свого екстремального (максимального чи мінімального) значення; з точки зору ж механіки це є свідченням того, що точка опинилась у певному крайньому положенні на траєкторії свого руху, в цьому положенні швидкість точки на єдину мить набула нульового значення та саме в цю мить відбувається зміна напрямку руху точки по траєкторії на протилежний.

У разі, коли весь розглядуваний проміжок часу *точка рухається тільки в напрямку осі* Ox (що буває досить часто), то без будь-яких варіантів і додаткових міркувань *у всі моменти часу* похідна $\frac{dx}{dt} > 0$. Тоді

$$v = v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \tag{11.15}$$

а

$$\vec{v} = \vec{i} \cdot v. \tag{11.16}$$

Залежності (11.11) ÷ (11.16) однозначно визначають усі параметри вектора $\vec{v}$ швидкості точки при координатному способі задання її прямолінійного руху.

Для усвідомлення наведених варіантів розглянемо приклад.

⚒ **Приклад 11.1.** Нехай точка M виконує прямолінійний рух уздовж вертикальної осі Oz за законом

$$z = 10 \cdot t - 5 \cdot t^2 \,(см).$$

Визначити положення точки та її швидкість у моменти часу $t_0 = 0$, $t_1 = 1 сек$, $t_2 = 2 сек$ і $t_3 = 3 сек$.

Розв'язування. Відповідно до формул (11.11) та (11.14) вектор та модуль швидкості руху точки M у розглядуваному випадку визначають залежності

$$\vec{v} = \vec{k} \cdot v_z \quad \text{та} \quad v = |v_z|,$$

де v_z – проекція на вісь Oz вектора $\vec{v}$, значення якої згідно з формулою (11.12)

$$v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Тоді у нашому разі

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\left(10 \cdot t - 5 \cdot t^2\right) = 10 \cdot 1 - 5 \cdot 2t = 10 - 10 \cdot t \left(\frac{см}{сек}\right).$$

У процесі диференціювання враховано, що похідна від суми дорівнює сумі похідних і сталі множники (у цьому разі 10 та -5) при змінній t можна виносити за знак похідної.

Функціональна залежність $v_z = 10 - 10t$ визначає у розв’язуваній задачі проекцію v_z для будь-якого й для кожного моменту часу.

У початковий момент часу $t_0 = 0$

$$z_0 = 10 \cdot t_0 - 5 \cdot t_0^2 = 10 \cdot 0 - 5 \cdot 0^2 = 0^*,$$

$$v_{z0} = \frac{dz}{dt}_{|t_0=0} = 10 - 10 \cdot t_0 = 10 - 10 \cdot 0 = 10\left(\frac{см}{сек}\right),$$

$$v_0 = |v_{z0}| = |10| = 10\frac{см}{сек} \text{ та } \vec{v}_0 = 10 \cdot \vec{k}.$$

Оскільки похідна $\dot{z}_0 = 10 > 0$, то в момент часу $t_0 = 0$ напрям руху точки M збігається з додатним напрямком осі Oz.

---

[*] У багатьох освітньо-навчальних та інших виданнях-джерелах для позначення координати z у момент часу $t_0 = 0$ вживають запис $z_{|t_0=0}$, що безумовно є більш інформативно. Однак для економії чорнил, паперу, часу та енергії умовимося позначати ті чи інші характеристики досліджуваного механічного процесу, використовуючи меншу кількість символьних знаків; так, запис $z_{|t_0=0}$ містить шість символів, а z_0 – лише два. Тож запис v_{z1} тотожний запису $v_{z|t_1=1сек}$, $\dot{z}_0$ – запису $\dot{z}_{|t_0=0} = \frac{dz}{dt}_{|t_0=0}$ і под.

Ураховуючи встановлені значення, зобразимо та позначимо на рисунку 11.1п положення точки в цю мить як M_0, а її швидкість – $\vec{v}_0$.

При $t_1 = 1\ сек$

$$z_1 = 10 \cdot t_1 - 5 \cdot t_1^2 = 10 \cdot 1 - 5 \cdot 1^2 = 10 - 5 = 5(см),$$

$$v_{z1} = \frac{dz}{dt}\Big|_{t_1 = 1 сек} = 10 - 10 \cdot t_1 = 10 - 10 \cdot 1 = 0,$$

$$v_1 = |v_{z1}| = 0 \quad \text{та, звісно,} \quad \vec{v}_1 = 0.$$

Знайдені значення z_0 і z_1 свідчать, що протягом часу $[t_0, t_1[$ координата z зростає. Оскільки ж похідна $\frac{dz}{dt}\Big|_{t_1 = 1 сек} = 0$, то це означає, що в момент часу $t_1 = 1\ сек$: а) координата z набула свого максимального значення $z_{max} = z_1$; б) рух точки M у додатному напрямі осі Oz (тобто вгору) закінчився; в) точка, досягнувши свого найвищого положення (яке і визначається координатою z_1), на одну мить зупинилась.

З елементарного арифметичного аналізу формули $v_z = 10 - 10t$ зрозуміло, що одразу після моменту часу $t_1 = 1\ сек$ проекція v_z вектора швидкості руху точки на вісь Oz набуває тільки від'ємних значень; отже, у наступну після моменту часу t_1 мить розпочинається рух розглядуваної точки у напрямку, протилежному до додатного напрямку осі Oz (тобто вниз).

Позначимо на рисунку 11.1п положення точки в момент часу $t_1 = 1\ сек$ як M_1.

При $t_2 = 2\ сек$

$$z_2 = 10 \cdot t_2 - 5 \cdot t_2^2 = 10 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 20 - 20 = 0,$$

$$v_{z2} = \frac{dz}{dt}_{|t_2=2\,сек} = 10 - 10 \cdot t_2 = 10 - 10 \cdot 2 = -10\left(см/_{сек}\right),$$

$$v_2 = |v_{z2}| = |-10| = 10\,см/_{сек} \quad \text{і} \quad \vec{v}_2 = -10 \cdot \vec{k}\ .$$

Оскільки похідна $\frac{dz}{dt}_{|t_2=2\,сек} = -10 < 0$, то напрямки вектора $\vec{v}_2$ та осі Oz протилежні. Позначимо на рисунку 11.1п положення точки в момент часу $t_2 = 2\,сек$ як M_2 і зобразимо її швидкість $\vec{v}_2$.

Бачимо, що положення точки M_2 збігається з положенням M_0, $v_2 = v_0$, а $\vec{v}_2 = -\vec{v}_0$.

При $t_3 = 3\,сек$

$$z_3 = 10 \cdot t_3 - 5 \cdot t_3^2 = 10 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 =$$
$$= 30 - 45 = -15(см),$$

$$v_{z3} = \frac{dz}{dt}_{|t_3=3\,сек} = 10 - 10 \cdot t_3 =$$
$$= 10 - 10 \cdot 3 = -20\left(см/_{сек}\right),$$

$$v_3 = |v_{z3}| = |-20| = 20\,см/_{сек}$$

та

$$\vec{v}_3 = -20 \cdot \vec{k}.$$

Оскільки $\frac{dz}{dt}_{|t_3=3\,сек} = -20 < 0$, то напрямки вектора $\vec{v}_3$ та осі Oz також протилежні. Зобразимо точку в момент часу t_3 та її швидкість $\vec{v}_3$ (див. рис. 11.1п).

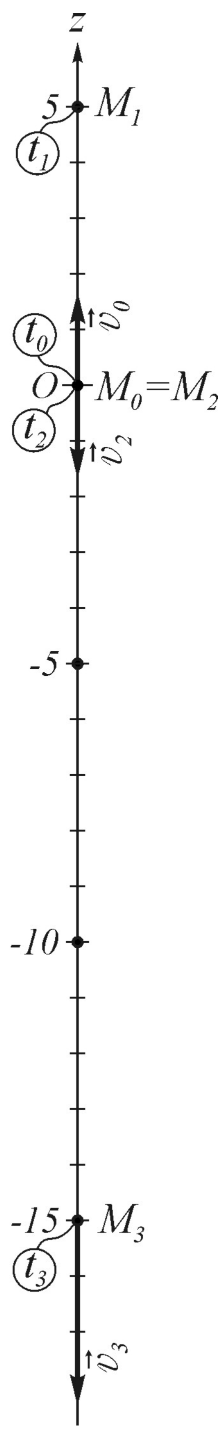


Рис. 11.1п

Зрозуміло, що при $t > t_3$ точка буде продовжувати рух униз, а модуль (величина) її швидкості тільки зростатиме.

§ 11.4. ШВИДКІСТЬ РУХУ ТОЧКИ ПРИ НАТУРАЛЬНОМУ СПОСОБІ ВИЗНАЧЕННЯ ЇЇ РУХУ

Розглянемо рух точки, заданий натуральним способом, тобто ситуацію, коли відомі: а) траєкторія руху точки; б) початок відліку, додатний і від'ємний напрямки дугової осі s (див. рис. 10.7); в) закон руху у вигляді $s = s(t)$.

Визначимо швидкість $\vec{v}$ руху точки.

Нехай при русі у якийсь довільний момент часу t точка перебуває у положенні M, яке визначає дугова координата s, а, рухаючись тільки в одному напрямку, через досить малий проміжок часу Δt у момент часу $t_1 = t + \Delta t$ опиняється у положенні M_1, котре визначає відповідна дугова координата $s_1 = s + \Delta s$, де Δs – приріст дугової координати за проміжок часу Δt; при цьому приріст дугової координати буде дорівнювати довжині відповідної дуги траєкторії: $\Delta s = \overset{\cup}{MM_1}$ (див. рис. 11.8, де точка O – початок відліку дугової координати s; пряма (a) – дотична до траєкторії в положенні M; пряма (b) – січна, що проходить через точки M та M_1; з точки зору елементарної геометрії MM_1 – це *хорда*, що стягує *дугу* $\overset{\cup}{MM_1}$).

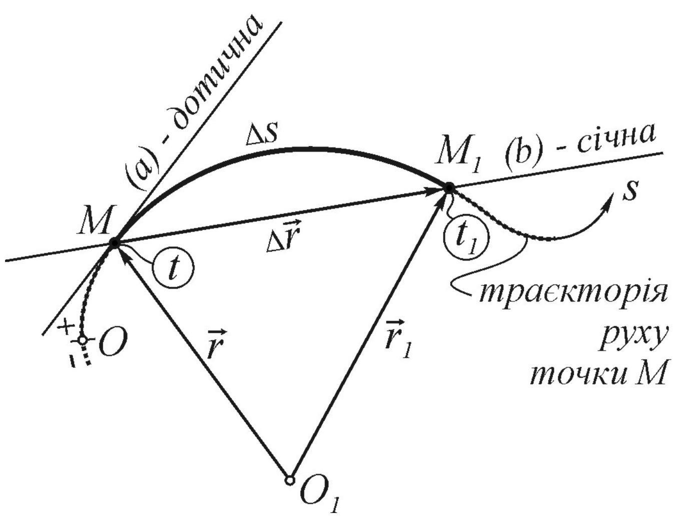


Рис. 11.8

Для дослідження застосуємо також і векторний спосіб визначення руху. Оберемо довільну нерухому точку O_1 за початок відліку радіуса-вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (див. також рис. 11.1). Очевидно, що в розглядуваному випадкові кожному значенню s відповідає певне значення $\vec{r}$, тобто радіус-вектор $\vec{r}$ є не тільки функцією часу t, але й перебуває у якійсь функціональній залежності від дугової координати s:

$$\vec{r} = \vec{f}(s).$$

Оскільки згідно з формулою (11.2)

$$\vec{v} = \frac{d\,\vec{r}}{dt},$$

то, помноживши праву частину цієї рівності на $\frac{ds}{ds}$, дістанемо

$$\vec{v} = \frac{d\,\vec{r}}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{d\,\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}. \tag{*}$$

З'ясуємо механіко-математичний зміст отриманого у формулі (*) множника $\frac{d\,\vec{r}}{ds}$:

1) оскільки, як зазначено вище, існує функціональна залежність $\vec{r} = \vec{f}(s)$, то $\frac{d\,\vec{r}}{ds}$ є *першою векторною похідною* від радіуса-вектора $\vec{r}$ за скалярною змінною – дуговою координатою s;

2) тоді за загальним визначенням похідної

$$\frac{d\,\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s};$$

3) отже, множник $\frac{d\,\vec{r}}{ds} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$ є *вектором*, напрям якого збігається з граничним напрямком вектора $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$;

4) напрям вектора $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$ однозначно встановлює напрям вектора $\Delta\vec{r}$ (який лежить на січній (b), див. рис. 11.8) та знак Δs: якщо точка рухається в додатному напрямку дугової осі s, то $\Delta s > 0$ (див. рис. 10.8, а) і напрям $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$ збігається з напрямком $\Delta\vec{r}$ (див. рис. 11.9, а); якщо ж рух відбувається в протилежному напрямку, то $\Delta s < 0$ (див. рис. 10.8, б) і напрям вектора $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$ протилежний до напрямку $\Delta\vec{r}$ (див. рис. 11.9, б);

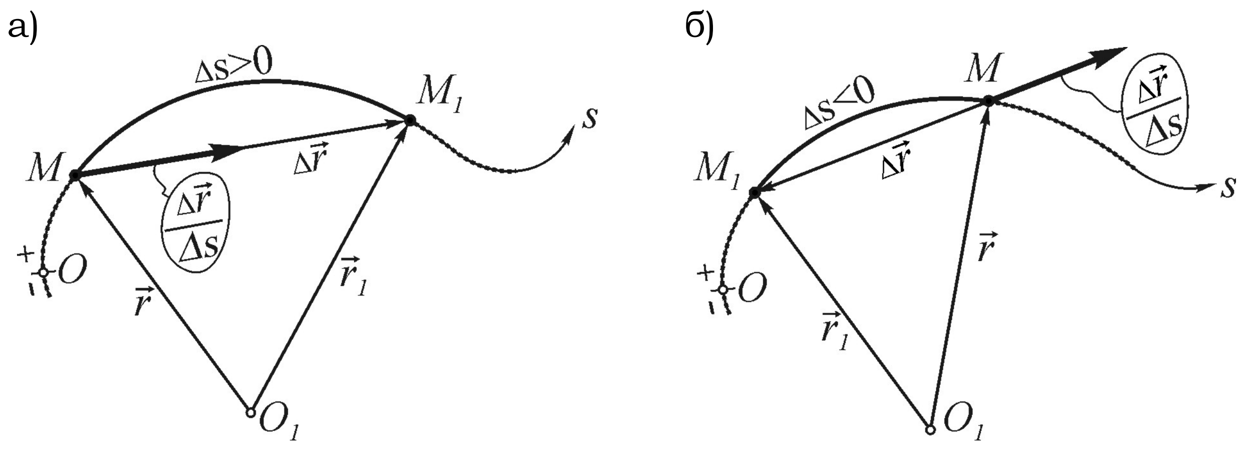


Рис. 11.9

5) зауважимо, що в обох можливих випадках руху точки на рисунку 11.9 вектор $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$ напрямлений у бік зростання дугової координати s;

6) при зменшенні приросту Δs положення точки M_1 наближається до положення M, що спричиняє адекватну зміну положення січної (b) (див. рис. 11.10) і відповідно напрямків векторів $\Delta\vec{r}$ та $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$;

7) через те що при $\Delta s \to 0$ положення точки M_1 нескінченно близько наближається до положення точки M, то граничне положення вектора $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$ збігається з положенням

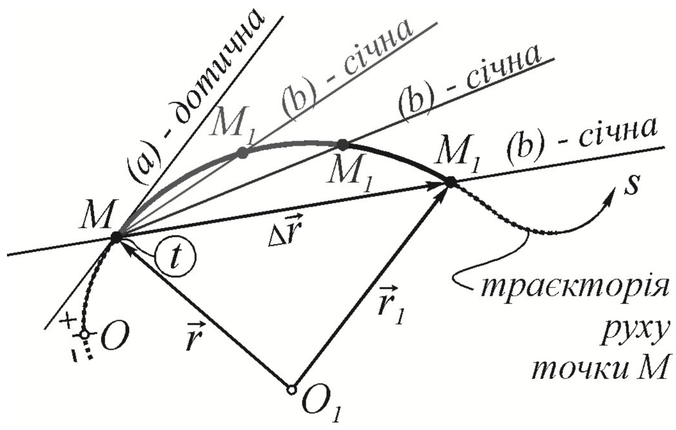


Рис. 11.10

дотичної (a) до траєкторії руху в положенні M (див. рис. 11.8 та 11.10);

8) оскільки розглядається довільне положення точки M, то звісно, що у кожний (або у будь-який) момент часу вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$ *напрямлений по дотичній до траєкторії руху в бік зростання дугової координати* s (або, що те саме, в *напрямку, що збігається з додатним напрямком дугової осі* s);

9) модуль вектора $\frac{d\vec{r}}{ds}$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \left|\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta r}{|\Delta s|};$$

10) оскільки модуль $|\Delta s|$ приросту дугової координати s за розглядуваний проміжок часу Δt дорівнює довжині дуги $\overset{\cup}{MM}_1$ ($|\Delta s| = \overset{\cup}{MM}_1$), а модуль Δr вектора $\Delta \vec{r}$ дорівнює довжині хорди MM_1, що стягує дугу $\overset{\cup}{MM}_1$ ($\Delta r = MM_1$), то, як відомо з елементарної геометрії,

$$\frac{\Delta r}{|\Delta s|} = \frac{MM_1}{\overset{\cup}{MM_1}} < 1;$$

11) через те що при зменшенні приросту Δs різниця між довжинами хорди MM_1 та дуги $\overset{\cup}{MM_1}$ зменшується (див. рис. 11.10), то арифметичне значення відношення $\frac{\Delta r}{|\Delta s|}$ наближається до 1;

12) при переході до границі отримаємо так звану у теорії диференціального числення *першу чудову границю*, тобто

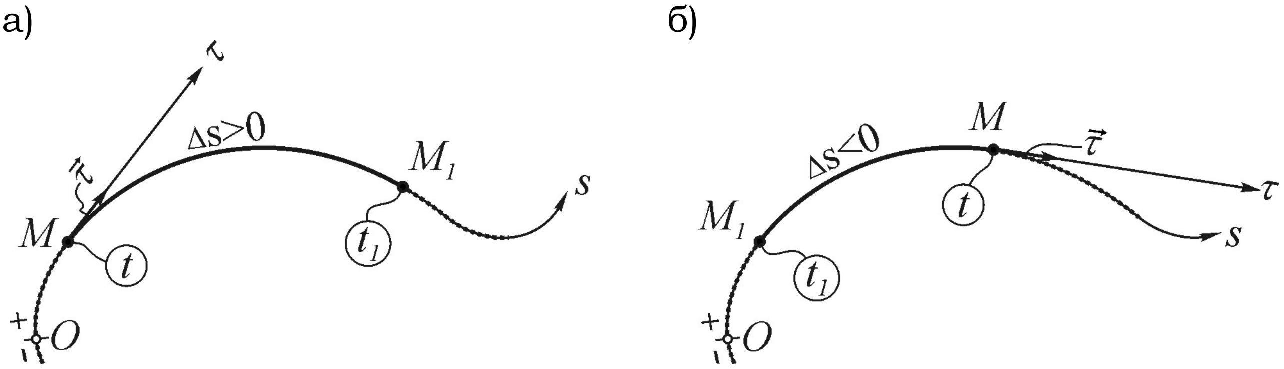
$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta r}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{MM_1}{\overset{\cup}{MM_1}} = 1;$$

13) оскільки ж розглядається довільне положення точки M, то у кожний та у будь-який момент часу модуль вектора $\frac{d\vec{r}}{ds}$ дорівнює одиниці:

$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1.$$

Якщо підсумувати й узагальнити з'ясоване, то стає зрозумілим, що у формулі (*) множник $\frac{d\vec{r}}{ds}$ є *вектором, який* у будь-якому розглядуваному положенні M рухомої точки *напрямлений по дотичній до траєкторії руху* в цьому положенні *в бік збільшення дугової координати* s та *модуль якого дорівнює одиниці*; тобто множник $\frac{d\vec{r}}{ds}$ є ***одиничним вектором*** (***ортом***) цього ***напрямку***.

Спрямуємо в зазначеному напрямку ***дотичну вісь*** τ та відповідно зобразимо її ***орт***, позначивши його $\vec{\tau}$ (див. рис. 11.11).



τ – *дотична* до траєкторії руху *вісь* у розглядуваному положенні M ,

$\vec{\tau}$ – одиничний вектор (орт) дотичної осі τ

Рис. 11.11

Узявши до уваги прийняте позначення, остаточно встановлюємо, що

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}\ .$$

Підставляючи це значення у вираз (*), отримаємо формулу

$$\vec{v} = \vec{\tau} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{\tau} \cdot \dot{s}\ ,$$

яка повністю й однозначно встановлює шукану швидкість $\vec{v}$.

З точки зору векторної алгебри остання формула означає, що вектор $\vec{v}$ **проектується тільки на** одну вісь (у цьому разі – на **дотичну вісь** τ); а множник при $\vec{\tau}$ (тобто похідна $\frac{ds}{dt}$) визначає проекцію вектора $\vec{v}$ на дотичну вісь τ . Надавши цій проекції традиційного позначення v_τ , дістанемо

$$\vec{v} = \vec{\tau} \cdot v_\tau = \vec{\tau} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{\tau} \cdot \dot{s}\ , \qquad \textbf{(11.17)}$$

(11.17) – ***вектор швидкості руху точки у натуральній формі***,

де

$$v_\tau = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$ **(11.18)** – ***проекція швидкості руху точки на дотичну вісь***.

ⓘ ***Проекція швидкості точки на дотичну вісь*** дорівнює першій похідній за часом від дугової координати s, яка визначає положення точки на траєкторії.

Через те що вектор $\vec{v}$ проектується тільки на дотичну вісь $\vec{\tau}$, то, зрозуміло, що проектується він на цю вісь у дійсну (натуральну) величину зі знаком «плюс» чи «мінус»:

$$v_\tau = \pm v, \tag{11.19}$$

а ***модуль швидкості*** дорівнює абсолютному значенню проекції швидкості на дотичну вісь:

$$v = |v_\tau| = \left|\frac{ds}{dt}\right| = |\dot{s}|. \tag{11.20}$$

Формула (11.17) $\vec{v} = \vec{\tau} \cdot v_\tau$, яка встановлює *положення вектора* $\vec{v}$ *у просторі* ***відносно траєкторії руху*** розглядуваної точки, та процес її отримання є строгим математичним доведенням одного з найважливіших **висновків** усієї механіки:

ⓘ ***вектор*** $\vec{v}$ ***швидкості точки*** у будь-якому її положенні ***напрямлений по дотичній до траєкторії руху*** цієї ***точки*** у розглядуваному положенні.

У разі криволінійного руху точки у кожному її певному положенні M_i на траєкторії існує своя дотична вісь τ, яка у кожний відповідний момент часу t_i має свої: а) початок відліку; б) положення; в) напрямок (див. рис. 11.12, а). Якщо ж траєкторія руху точки – пряма, то у будь-якому положенні M_i точки дотична вісь τ має незмінне положення (див. рис. 11.12, б).

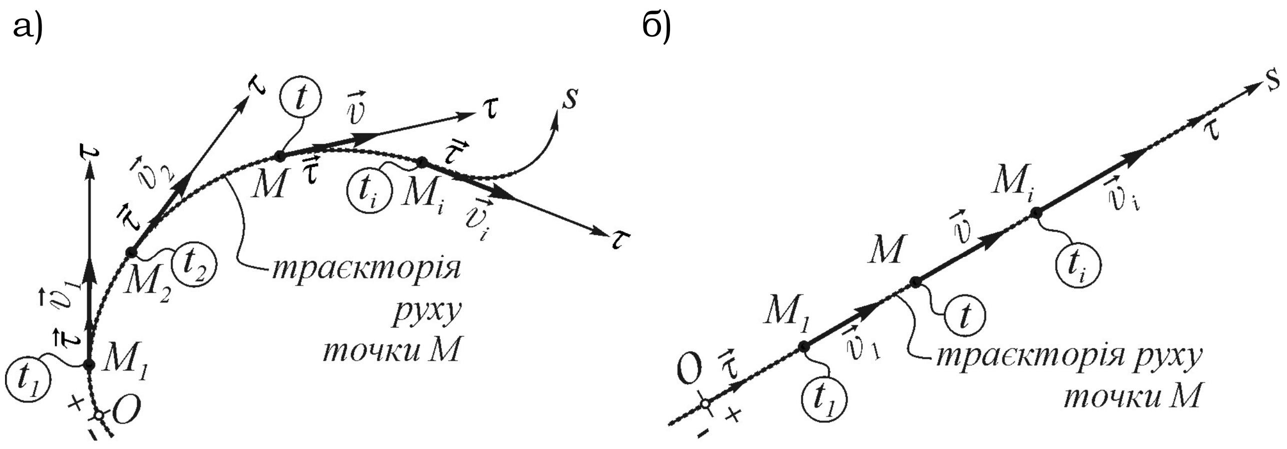


Рис. 11.12

Слід розуміти, що у разі криволінійного руху дугова вісь s та дотична вісь τ – це два різні механіко-математичні поняття, а у разі прямолінійного руху вони повністю збігаються.

Формула (11.17) і є доведенням заяви про постійну змінюваність напрямку вектора $\vec{v}$ швидкості точки у разі, коли її траєкторією руху є крива лінія, та незмінність напрямку $\vec{v}$ при прямолінійному русі (див. рис. 11.12 і виноску на с. 18).

Для подальших міркувань та висновків зауважимо, що:

- як доведено вище, орт $\vec{\tau}$ і відповідно сама дотична вісь τ завжди напрямлені в бік збільшення дугової координати (див. рис. 11.11);
- за визначенням похідної

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t};$$

- оскільки приріст часу Δt – завжди додатна величина, то знак похідної $\frac{ds}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ залежить лише від *знака* приросту дугової координати Δs (див. рис. 10.8).

Тепер розглянемо та проаналізуємо ***можливі варіанти*** (усього можливих варіантів буде ***три***).

1. Якщо у певний розглядуваний момент часу t похідна

$$\frac{ds}{dt} > 0,$$

то в цю мить приріст $\Delta s > 0$, проекція $v_\tau = +v > 0$, напрямок вектора $\vec{v} = \vec{\tau} \cdot v$ збігається з напрямком орта $\vec{\tau}$ дотичної осі τ і, отже, точка рухається у напрямку зростання дугової координати s (рис. 11.13, а).

2. Якщо у певний розглядуваний момент часу t похідна

$$\frac{ds}{dt} < 0,$$

то в цю мить приріст $\Delta s < 0$, проекція $v_\tau = -v < 0$, напрямок вектора $\vec{v} = -\vec{\tau} \cdot v$ протилежний напрямку орта $\vec{\tau}$ дотичної осі τ і, отже, точка рухається в напрямку зменшення дугової координати s (див. рис. 11.13, б).

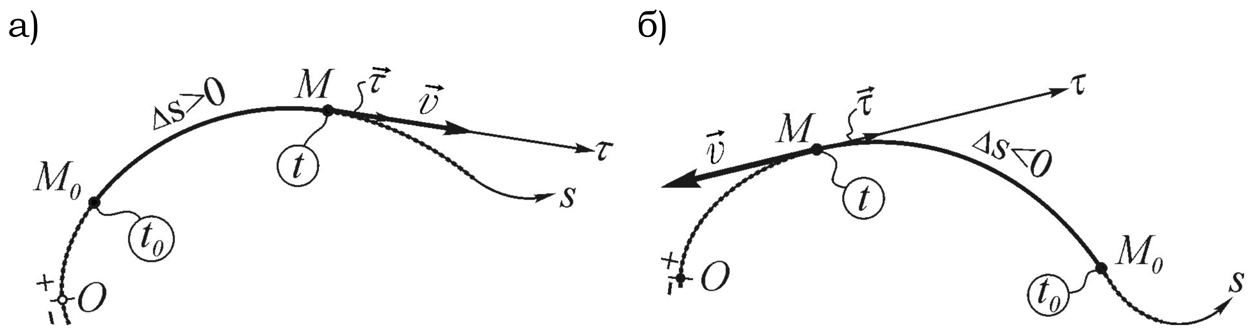


Рис. 11.13

Таким чином,

ⓘ *знак* похідної $\frac{ds}{dt}$ (або, що те саме, знак проекції v_τ) *указує* у розглядуваний момент часу *напрямок руху* точки по траєкторії порівняно з напрямком обраної дугової осі s.

3. Якщо при неперервному русі точки у певний розглядуваний момент часу t похідна

$$\frac{ds}{dt}=0,$$

то з математичної точки зору це означає, що у цей момент часу функція $s=s(t)$ досягла свого екстремального (максимального чи мінімального) значення; з точки зору ж теоретичної механіки це є свідченням того, що точка опинилась у певному крайньому положенні на траєкторії свого руху, в цьому положенні швидкість точки на єдину мить набула нульового значення та саме в цю мить відбувається зміна напрямку руху точки по траєкторії на протилежний (див. у § 10.2 приклад 10.3, на рис. 10.3п положення точки у моменти часу t_1 та t_3).

У разі, коли весь розглядуваний проміжок часу *точка рухається тільки в напрямку зростання дугової координати* (що буває досить часто), то без будь-яких варіантів і додаткових міркувань *у всі моменти часу* похідна $\frac{ds}{dt}>0$. Тоді

$$v=v_\tau=\frac{ds}{dt}=\dot{s}, \qquad \textbf{(11.21)}$$

а

$$\vec{v}=\vec{\tau}\cdot v. \qquad \textbf{(11.22)}$$

Якщо розглядається та розв'язується певна локальна задача, в якій напрям дугової осі не визначається якими-небудь глобальними вимогами (умовами), то можна обирати, що у розглядуваному положенні точки напрям вектора швидкості $\vec{v}$ визначає додатний напрямок дугової осі s; це дає можливість при розв'язуванні зазначеної задачі застосувати останні дві наведені формули.

Залежності (11.17) ÷ (11.22) однозначно встановлюють усі параметри вектора $\vec{v}$ швидкості точки при натуральному способі задання її руху.

Звернімо увагу на те, що *формули* (11.17) ÷ (11.22) і *кінематичний аналіз* їх та можливих варіантів криволінійного руху точки *абсолютно ідентичні формулам* (11.11) ÷ (11.16) й *аналізу* їх і можливих варіантів прямолінійного руху точки вздовж осі Ox (див. § 11.3). Різниця полягає в тому, що замість одиничного вектора $\vec{i}$ декартової осі Ox, проекції v_x та декартової координати x у формулах (11.11) ÷ (11.16) формули (11.17) ÷ (11.22) містять одиничний вектор $\vec{\tau}$ дотичної осі τ, проекцію v_τ і дугову координату s відповідно.

Розглянемо приклад.

Приклад 11.2. За умовою прикладу 10.3 (див. § 10.2) визначити швидкість точки у моменти часу $t_0 = 0$, $t_1 = 1 сек$, $t_2 = 2 сек$ і $t_3 = 3 сек$ (у прикладі 10.3 встановлені положення точки на траєкторії в указані моменти часу – див. рис. 10.3п).

Розв'язування. Відповідно до формул (11.17) та (11.20) вектор і модуль швидкості точки M визначають залежності

$$\vec{v} = \vec{\tau} \cdot v_\tau \quad \text{та} \quad v = |v_\tau|,$$

де v_τ – проекція на дотичну вісь τ вектора $\vec{v}$, значення якої згідно з формулою (11.18)

$$v_\tau = \dot{s}.$$

Тоді у розглядуваному прикладі

$$v_\tau = \dot{s} = \frac{d}{dt}\left(4 - 2 \cdot sin\frac{\pi t}{2}\right).$$

Диференціюючи, врахуємо, що відповідно до теорії диференціального числення: а) похідна від суми дорівнює сумі похідних; б) похідна від сталої величини (тобто у нашому випадку похідна від 4) дорівнює нулеві; в) сталий множник (у цьому разі – 2) при змінній величині можна виносити за знак похідної; г) похідна $(sin U)' = cos U \cdot U'$; тоді у нашому разі

$$\frac{d}{dt}\left(sin\frac{\pi t}{2}\right) = cos\frac{\pi t}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\pi t}{2}\right) = cos\frac{\pi t}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{d}{dt}(t) = cos\frac{\pi t}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot cos\frac{\pi t}{2}.$$

Отже,

$$v_\tau = \frac{d}{dt}\left(4 - 2\cdot sin\frac{\pi t}{2}\right) = \frac{d}{dt}(4) - 2\cdot\frac{d}{dt}\left(sin\frac{\pi t}{2}\right) =$$

$$= 0 - 2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot cos\frac{\pi t}{2} = -\pi\cdot cos\frac{\pi t}{2}\left(\frac{м}{сек}\right).$$

Функціональна залежність $v_\tau = -\pi\cdot cos\frac{\pi t}{2}$ визначає проекцію v_τ для будь-якого та для кожного моменту часу.

При $t_0 = 0$ (тобто у початковому положенні)

$$v_{\tau 0} = \dot{s}_0 = -\pi\cdot cos\frac{\pi\cdot t_0}{2} = -\pi\cdot cos\frac{\pi\cdot 0}{2} = -\pi\cdot cos 0 =$$

$$= -\pi\cdot 1 = -\pi\left(\frac{м}{сек}\right),$$

$$v_0 = |v_{\tau 0}| = |-\pi| = \pi \approx 3{,}14\,\frac{м}{сек} \quad \text{та} \quad \vec{v}_0 = -\pi\cdot\vec{\tau}\,.$$

Оскільки похідна $\dot{s}_0 = -\pi < 0$, то в момент часу $t_0 = 0$ точка M рухається в напрямку зменшення дугової координати s, а напрямок вектора $\vec{v}_0 = -\pi\cdot\vec{\tau}$ протилежний напрямку дотичної осі τ. Зобразимо на рисунку 11.2п вектор $\vec{v}_0$ за його встановленими характеристиками.

При $t_1 = 1\ сек$

$$v_{\tau 1} = \dot{s}_1 = -\pi \cdot cos\frac{\pi \cdot t_1}{2} = -\pi \cdot cos\frac{\pi \cdot 1}{2} = -\pi \cdot cos\frac{\pi}{2} = -\pi \cdot 0 = 0\,,$$

$$v_1 = \left|v_{\tau 1}\right| = 0 \text{ та, звісно, } \vec{v}_1 = 0\,.$$

Знайдені у прикладі 10.3 значення $s_0 = 4\,м$ і $s_1 = 2\,м$ свідчать, що протягом часу $]t_0, t_1[$ координата s *зменшується.* Оскільки ж похідна $\dot{s}_1 = 0$, то це означає, що в момент часу $t_1 = 1\ сек$: а) координата s набула свого мінімально можливого значення $s_{min} = s_1$; б) рух точки M у напрямку зменшення дугової координати s закінчився; в) точка, досягнувши свого крайнього лівого положення (яке і визначається координатою s_1), на одну мить зупинилась. Позначимо на рисунку 11.2п положення точки в момент часу t_1 як M_1.

При $t_2 = 2\,сек$

$$v_{\tau 2} = \dot{s}_2 = -\pi \cdot cos\frac{\pi \cdot t_2}{2} = -\pi \cdot cos\frac{\pi \cdot 2}{2} = -\pi \cdot cos\,\pi =$$

$$= -\pi \cdot (-1) = \pi\left(\frac{м}{сек}\right),$$

$$v_2 = \left|v_{\tau 2}\right| = \left|\pi\right| = \pi \approx 3{,}14\,\frac{м}{сек}$$

та

$$\vec{v}_2 = \pi \cdot \vec{\tau}\,.$$

Оскільки похідна $\dot{s}_2 = \pi > 0$, то в момент часу t_2 точка M рухається у напрямку зростання дугової координати s, а напрямок вектора $\vec{v}_2 = \pi \cdot \vec{\tau}$ збігається з напрямком дотичної осі τ. Зобразимо на рисунку 11.2п вектор $\vec{v}_2$ за його встановленими характеристиками.

Бачимо, що положення точки M_2 збігається з положенням M_0, $v_2 = v_0$, а $\vec{v}_2 = -\vec{v}_0$.

При $t_3 = 3\,сек$

$$v_{\tau 3} = \dot{s}_3 = -\pi \cdot cos\frac{\pi \cdot t_3}{2} = -\pi \cdot cos\frac{\pi \cdot 3}{2} = -\pi \cdot cos\,270^\circ =$$
$$= -\pi \cdot 0 = 0,$$

$$v_3 = |v_{\tau 3}| = 0 \text{ та, звісно, } \vec{v}_3 = 0.$$

Знайдені у прикладі 10.3 значення $s_1 = 2\,м$ і $s_3 = 6\,м$ свідчать, що протягом часу $]t_1, t_3[$ координата s *зростає*. Оскільки ж похідна $\dot{s}_3 = 0$, то це означає, що в момент часу t_3: а) координата s набула свого максимально можливого значення $s_{max} = s_3$; б) рух точки M у напрямку зростання дугової координати s закінчився; в) точка, досягнувши свого крайнього правого положення (яке і визначається координатою s_3), на одну мить зупинилась; г) у наступну мить розпочнеться рух точки у зворотному напрямкові. Позначимо на рисунку 11.2п положення M_3 точки в момент часу t_3.

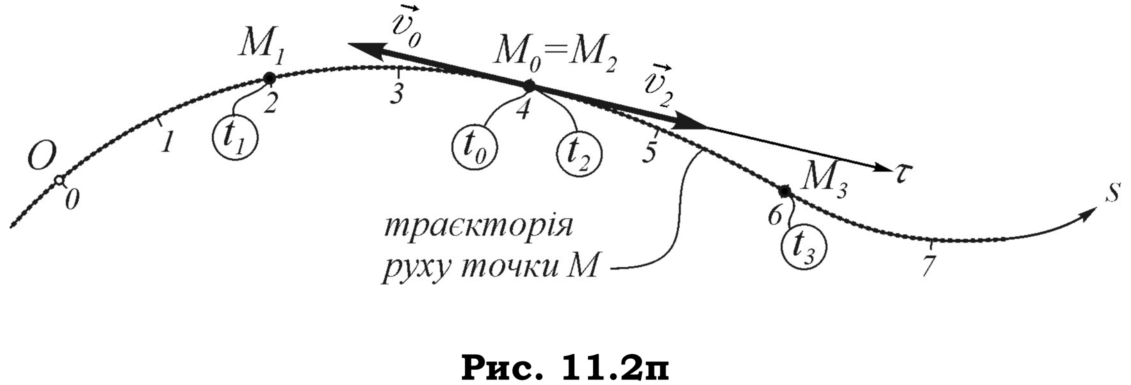


Рис. 11.2п

Установлені значення свідчать, що за проміжки часу $]t_0, t_1[$ та $]t_2, t_3[$ модуль v швидкості точки зменшується від

$\pi \dfrac{м}{сек}$ до 0, а за проміжок часу $]t_1, t_2[$ – збільшується від 0 до $\pi \dfrac{м}{сек}$.

З математичного аналізу формули $v_\tau = -\pi \cdot cos\dfrac{\pi t}{2}$ зрозуміло*, що з плином часу проекція v_τ буде періодично змінюватися у межах від π до $-\pi$, набуваючи у відповідні моменти часу нульових значень.

Звичайно, що всі отримані тут значення та їх аналіз повністю збігаються з результатами, одержаними при розв'язуванні прикладу 10.3.

§ 11.5. ЗВ'ЯЗОК МІЖ НАТУРАЛЬНИМ І КООРДИНАТНИМ СПОСОБАМИ ВИЗНАЧЕННЯ РУХУ ТОЧКИ

Для встановлення зв'язку між натуральним та координатним способами визначення руху точки розглянемо довільний рух точки, заданий обома вказаними способами.

Запишемо значення модуля швидкості:

- згідно з формулою (11.5) $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$;
- згідно з формулою (11.20) $v = \left|\dfrac{ds}{dt}\right|$.

Тоді й

$$\left|\frac{ds}{dt}\right| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

* Зазначений аналіз пов'язаний зі знанням того, що функція $cos\dfrac{\pi t}{2}$ періодично змінюється у межах від -1 до $+1$, набуваючи (також періодично) нульових значень.

звідки

$$\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ .$$

Отриманий вираз є диференціальним рівнянням першого порядку. Для розв'язування множимо його обидві частини на dt:

$$ds = \pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt$$

та інтегруємо у відповідних границях ліву і праву частини:

$$\int_{s_0}^{s} ds = \pm\int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt\,,$$

де s_0 – значення дугової координати у початковий момент часу t_0 (найчастіше $t_0 = 0$, але не обов'язково); s – значення дугової координати у довільний момент часу t.

У результаті інтегрування (за умови $t_0 = 0$) дістанемо

$$s - s_0 = \pm\int_{0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt\,,$$

звідки

$$s = s_0 \pm \int_{0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt\,. \qquad \textbf{(11.23)}$$

Якщо $s_0 = 0$ (що буває досить часто), то

$$s = \pm\int_{0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt\,. \qquad \textbf{(11.24)}$$

У разі руху точки тільки в напрямку зростання дугової координати шуканий зв'язок буде визначатися залежністю

$$s = \int_{0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt\,. \qquad \textbf{(11.25)}$$

У разі руху точки в площині Oxy в загальному випадку

$$s = s_0 \pm \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \cdot dt \qquad \textbf{(11.26)}$$

або (якщо $s_0 = 0$)

$$s = \pm \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \cdot dt, \qquad \textbf{(11.27)}$$

а у випадку руху тільки в напрямку зростання дугової координати

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \cdot dt. \qquad \textbf{(11.28)}$$

Зрозуміло, що значення правої частини у кожній з формул (11.23) ÷ (11.28) залежить від вигляду підінтегральної функції.

Оскільки в загальному випадку руху точки $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = v$, а в разі руху точки в площині Oxy $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = v$, то, наприклад, формули (11.24), (11.27) і (11.25), (11.28) також можна подати у вигляді

$$s = \pm \int_0^t v \cdot dt \qquad \textbf{(11.29)}$$

та

$$s = \int_0^t v \cdot dt \qquad \textbf{(11.30)}$$

відповідно.

Усі отримані в цьому параграфі залежності (11.23) ÷ (11.30) і визначають *зв'язок між натуральним та координатним способами задання руху* в кожному відповідному випадкові руху точки.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ТА БІЛЕТІВ ДЛЯ ЕКСПРЕС-ТЕСТУВАННЯ Кт-1

(ВСТУП ДО КІНЕМАТИКИ ТОЧКИ – тема 10,

ШВИДКІСТЬ РУХУ ТОЧКИ – тема 11)

1. Дайте визначення кінематики. (9)
2. Як називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчають механічні рухи різних матеріальних тіл без урахування сил, котрі спричиняють (або спричинили) ці рухи? (4)
3. Дайте визначення механічного руху матеріального тіла. (8)
4. Які особливості простору в класичній механіці? (6)
5. Яка одиниця вимірювання елементів простору в Міжнародній системі одиниць (СІ)? (2)
6. Які особливості часу в класичній механіці? (6)
7. Що в класичній механіці називають *моментом часу*? (7)
8. Що в класичній механіці називають *проміжком часу*? (7)
9. Яка одиниця вимірювання часу в Міжнародній системі одиниць (СІ)? (2)
10. Що називають *системою відліку* в класичній механіці? (9)
11. Які існують системи відліку в класичній механіці? (4)
12. Чи існують у фізичному всесвіті нерухомі системи відліку? (3)
13. Чому у фізичному всесвіті не існує нерухомої системи відліку? (4)
14. З чим пов'язують початок умовно нерухомої системи відліку при дослідженні рухів матеріальних тіл поблизу поверхні Землі? (4)
15. Яку систему відліку називають геоцентричною? (6)
16. Які Ви знаєте розділи кінематики? (7)
17. Дайте визначення поняття «*траєкторія руху точки*». (9)
18. Як розподіляється рух точки за виглядом її траєкторії руху? (8)

19. Який рух точки називають *прямолінійним*? (7)

20. Як називають рух точки, якщо її траєкторією руху є пряма лінія? (5)

21. Який рух точки називають *криволінійним*? (7)

22. Як називають рух точки, якщо її траєкторією руху є крива лінія? (5)

23. Скільки видів руху точки розрізняють за формою її траєкторії руху? (5)

24. Як по-іншому називають траєкторію руху точки? (7)

25. Яка принципова різниця між поняттями «*траєкторія руху точки*» та «*орбіта руху точки*»? (4)

26. Дайте визначення поняття «*переміщення точки*». (9)

27. Дайте визначення поняття «*шляху, що пройшла точка за певний проміжок часу*». (9)

28. Чи може шлях, який пройшла точка за певний проміжок часу, визначатися від’ємною величиною? (4)

29. Чи може переміщення точки за певний проміжок часу бути більшим за пройдений точкою за той же проміжок часу шлях? (4)

30. Чи може переміщення точки за певний проміжок часу бути меншим за пройдений точкою за той же проміжок часу шлях? (4)

31. Чи може переміщення точки за певний проміжок часу бути однаковим зі шляхом, пройденим точкою за той же проміжок часу? (4)

32. У якому разі однакові (збігаються) поняття «*переміщення точки за певний проміжок часу*» та «*шлях, що пройшла точка за той же проміжок часу*»? (7)

33. Дайте визначення поняття «*швидкість руху точки*». (9)

34. Як позначають *вектор* швидкості точки? (4)

35. Що у кінематиці точки позначають символом $\vec{v}$? (3)

36. Як позначають *модуль* швидкості точки? (4)

37. Що у кінематиці точки позначають символом v? (3)

38. Як розподіляють рух точки залежно від значення модуля швидкості точки? (8)

39. Дайте визначення *рівномірного руху точки.* (7)

40. Як називають рух точки, при якому модуль її швидкості з часом не змінюється? (5)

41. Дайте визначення *нерівномірного руху точки.* (7)

42. Як називають рух точки, при якому модуль її швидкості з часом змінюється? (5)

43. Дайте визначення *рівнозмінного руху точки.* (7)

44. Як називають рух точки, при якому модуль її швидкості за будь-які рівні проміжки часу змінюється на рівні (однакові) значення? (5)

45. Дайте визначення *нерівнозмінного руху точки.* (7)

46. Як називають рух точки, при якому модуль її швидкості за будь-які рівні проміжки часу змінюється на різні значення? (5)

47. Дайте визначення *прискореного руху точки.* (7)

48. Як називають рух точки, якщо при русі модуль її швидкості зростає? (5)

49. Дайте визначення *сповільненого руху точки.* (7)

50. Як називають рух точки, якщо при русі модуль її швидкості зменшується? (5)

51. Скільки видів руху точки розрізняють за характером її руху? (5)

52. Яка *одиниця вимірювання швидкості* руху точки в Міжнародній системі одиниць (СІ)? (2)

53. Вектор $\vec{v}$ швидкості руху точки – це фіксований, ковзний чи вільний вектор? (4)

54. Дайте визначення поняття «*прискорення руху точки*». (9)

55. Як позначають *вектор* прискорення руху точки? (4)

56. Що у кінематиці точки позначають символом $\vec{a}$? (3)

57. Як позначають *модуль* прискорення руху точки? (4)

58. Що у кінематиці точки позначають символом a? (3)

59. Яка *одиниця вимірювання прискорення* руху точки в Міжнародній системі одиниць (СІ)? (2)

60. Вектор $\vec{a}$ прискорення руху точки – це фіксований, ковзний чи вільний вектор? (4)

61. Що в класичній механіці називають *законом руху точки*? (9)

62. Що в класичній механіці називають *рівнянням руху точки*? (9)

63. Скільки та які Ви знаєте способи (форми) визначення (задання) руху точки? (8)

64. Як (чим) визначають положення точки при векторному способі задання руху точки? (8)

65. Запишіть рівняння руху точки у векторній формі. (9)

66. Коли найчастіше застосовують векторний спосіб визначення руху точки? (6)

67. Як (чим) визначають положення точки при координатному способі задання руху точки? (8)

68. Запишіть рівняння руху точки у координатній формі у випадку загального просторового руху точки. (9)

69. Скількома рівняннями може бути визначений криволінійний рух точки в певній площині при координатному способі задання руху цієї точки за умови доречного розташування координатних осей? (6)

70. У якому разі рух точки в певній площині при координатному способі задання руху цієї точки може бути визначений двома рівняннями? (7)

71. Запишіть у доречному вигляді рівняння руху точки в координатній формі у випадку руху точки в певній площині. (9)

72. Скількома рівняннями може бути визначений прямолінійний рух точки при координатному способі задання руху цієї точки за умови доречного розташування координатних осей? (6)

73. У якому разі при координатному способі задання прямолінійного руху точки цей рух може бути визначений одним рівнянням? (7)

74. Якими є з точки зору вищої математики (векторної алгебри) рівняння руху точки у координатній формі? (6)

75. Як з рівнянь руху точки у координатній формі отримати рівняння траєкторії руху точки в явній (координатній) формі? (9)

76. У якому випадку рух точки можна задати у натуральній формі визначення руху? (8)

77. Що при натуральному способі визначення руху точки називають *дуговою віссю*? (8)

78. Як називають вісь, що проходить уздовж відомої траєкторії руху точки при натуральному способі визначення руху? (6)

79. Яким символом (літерою) позначають дугову вісь, яка проходить уздовж відомої траєкторії руху точки при натуральному способі задання руху? (5)

80. Як (чим) визначають положення точки на траєкторії при натуральному способі задання руху точки? (8)

81. Що при натуральному способі визначення руху точки називають *дуговою координатою*? (8)

82. Як при натуральному способі визначення руху точки називають координату, що відраховують від вибраного початку відліку вздовж дугової осі? (6)

83. Яким символом (літерою) позначають дугову координату, що відраховують від обраного початку відліку вздовж дугової осі при натуральному способі задання руху? (5)

84. Запишіть рівняння руху точки у натуральній формі. (8)

85. Рівняння руху точки у натуральній формі однозначно встановлює положення точки у фізичному просторі чи положення точки на траєкторії руху відносно певного початку відліку? (6)

86. Сукупністю яких параметрів визначається положення точки у фізичному просторі при натуральному способі задання її руху? (9)

87. Чи однакові у загальному випадку поняття «*дугова координата* s» та «*шлях* L*, що пройшла точка по траєкторії*»? (4)

88. У якому випадку повністю збігаються поняття «*дугова координата* s» та «*шлях* L*, що пройшла точка по траєкторії*»? (8)

89. У якому разі приріст Δs дугової координати за проміжок часу Δt є додатною величиною? (8)

90. Що можна сказати про приріст Δs дугової координати у випадку, коли при натуральному способі визначення руху за проміжок часу Δt точка рухається тільки у додатному напрямку дугової осі? (7)

91. У якому разі приріст Δs дугової координати за проміжок часу Δt є від’ємною величиною? (8)

92. Що можна сказати про приріст Δs дугової координати у випадку, коли при натуральному способі визначення руху за проміжок часу Δt точка рухається тільки у напрямку, протилежному до додатного напрямку дугової осі? (7)

93. Записати рівняння (формулу), що визначає зв’язок між векторним і координатним способами задання руху точки? (9)

94. Які одиниці вимірювання *дугової координати* s, *переміщення* ℓ та *шляху* L, що пройшла точка по траєкторії? (2)

95. Чому дорівнює середня швидкість $\vec{v}_{сер}$ руху точки за проміжок часу Δt при векторному способі визначення руху точки? (8)

96. Як напрямлений вектор $\vec{v}_{сер}$ середньої швидкості руху точки за проміжок часу Δt при векторному способі визначення руху? (7)

97. При векторному способі визначення руху середня швидкість $\vec{v}_{сер}$ відображає характер дійсного руху точки за проміжок часу Δt *точно* чи *наближено*? (4)

98. Що необхідно для збільшення точності значення середньої швидкості $\vec{v}_{сер}$ точки за проміжок часу Δt при векторному способі задання руху точки? (6)

99. Чому дорівнює (як визначається) дійсна (миттєва) швидкість $\vec{v}$ руху точки при векторному способі задання руху? (9)

100. Як позначають у теоретичній механіці *оператор диференціювання за часом*? (6)

101. Що у теоретичній механіці означає крапка над значенням певної функції? (5)

102. Вивести формулу швидкості $\vec{v}$ руху точки при координатному способі визначення руху. (12)

103. Чому дорівнює швидкість $\vec{v}$ руху точки при координатному способі визначення руху? (9)

104. Чому дорівнюють проекції v_x, v_y та v_z на осі декартової системи координат вектора $\vec{v}$ швидкості руху точки? (8)

105. Чому дорівнює модуль v швидкості точки при координатному способі визначення руху? (8)

106. Чим визначають напрямок вектора $\vec{v}$ швидкості точки при координатному способі задання руху? (6)

107. Записати формули, за якими обчислюють значення напрямних косинусів, які встановлюють напрямок вектора $\vec{v}$ швидкості точки при координатному способі задання руху. (8)

108. Якщо при координатному способі визначення прямолінійного руху точки вздовж декартової осі Ox у певний момент часу похідна $\frac{dx}{dt} > 0$, то що можна сказати про рух точки в цю мить? (8)

109. Якщо при координатному способі визначення прямолінійного руху точки вздовж декартової осі Ox у певний момент часу похідна $\frac{dx}{dt} < 0$, то що можна сказати про рух точки в цю мить? (8)

110. Якщо при координатному способі визначення прямолінійного руху точки вздовж декартової осі Ox в певний момент часу при неперервному русі похідна $\frac{dx}{dt} = 0$, то що можна сказати про рух точки в цю мить? (8)

111. Чому дорівнює швидкість $\vec{v}$ точки при натуральному способі визначення руху? (9)

112. На які осі (або на яку вісь) проектується вектор $\vec{v}$ швидкості точки при натуральному способі визначення руху? (7)

113. Як напрямлена дотична вісь τ натуральної системи відліку по відношенню до траєкторії руху точки? (5)

114. Як напрямлений вектор $\vec{v}$ швидкості точки по відношенню до її траєкторії руху? (6)

115. Чому дорівнює проекція v_τ на дотичну вісь τ натуральної системи відліку вектора $\vec{v}$ швидкості руху точки? (9)

116. Чому дорівнює модуль v швидкості точки при натуральному способі визначення руху? (9)

117. Якщо при натуральному способі визначення руху в певний момент часу похідна $\frac{ds}{dt} > 0$, то що можна сказати про рух точки в цю мить? (8)

118. Якщо при натуральному способі визначення руху в певний момент часу похідна $\frac{ds}{dt} < 0$, то що можна сказати про рух точки в цю мить? (8)

119. На що вказує знак похідної $\frac{ds}{dt}$ при натуральному способі визначення руху точки? (8)

120. Якщо при натуральному способі визначення руху в певний момент часу при неперервному русі похідна $\frac{ds}{dt} = 0$, то що можна сказати про рух точки в цю мить? (8)

121. Чому дорівнює швидкість $\vec{v}$ точки при натуральному способі визначення руху у випадку, коли вона рухається тільки в напрямку зростання дугової координати? (8)

122. Чому дорівнює проекція v_τ на дотичну вісь τ натуральної системи відліку вектора $\vec{v}$ швидкості точки у випадку, коли вона рухається тільки в напрямку зростання дугової координати? (8)

123. Чому дорівнює модуль v швидкості точки при натуральному способі визначення руху у випадку, коли точка рухається тільки в напрямку зростання дугової координати? (8)

124. Записати рівняння (формулу), що визначає зв'язок між координатним і натуральним способами задання руху точки. (9)

ТЕМА 12 ► ПРИСКОРЕННЯ РУХУ ТОЧКИ

- Прискорення руху точки при векторному способі визначення її руху.
- Прискорення руху точки при координатному способі визначення її руху.
- Прискорення руху точки при координатному способі визначення її прямолінійного руху.
- Графіки руху, шляху, швидкості та прискорення прямолінійного руху точки.
- Система натуральних осей.
- Прискорення руху точки при натуральному способі визначення її руху.
- Нормальне й дотичне (тангенціальне) прискорення руху точки.
- Механічні змісти нормального й дотичного (тангенціального) прискорень точки. Класифікація рухів точки за її прискореннями.
- Зв'язок між натуральним і координатним способами визначення руху точки.
- Рівняння рівномірного й рівнозмінного рухів точки.

Відповідно до трьох основних способів (форм) аналітичного опису руху точки існує і *три способи* (*форми*) *визначення прискорення руху точки*. Розглянемо їх.

§ 12.1. ПРИСКОРЕННЯ РУХУ ТОЧКИ ПРИ ВЕКТОРНОМУ СПОСОБІ ВИЗНАЧЕННЯ ЇЇ РУХУ

Розглянемо рух точки, заданий рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Визначимо прискорення $\vec{a}$ руху точки.

Нехай у довільний момент часу t точка перебуває у положенні M, а через певний, досить малий, проміжок часу Δt, рухаючись тільки в одному напрямку, в момент часу $t_1 = t + \Delta t$ опиняється у положенні M_1. Нехай також положення M визначає радіус-вектор $\vec{r}$, у цьому положенні точка має швидкість $\vec{v}$, а в положенні M_1 – $\vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta\vec{v}$, де $\Delta\vec{v}$ – приріст вектора $\vec{v}$ швидкості руху точки за проміжок часу Δt.

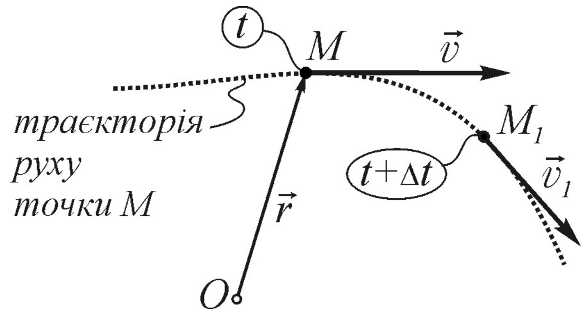


Рис. 12.1

Для визначення вектора $\Delta\vec{v}$ скористаємося відомим *правилом паралелограма*: відкладемо від точки M вектор, рівний за величиною і напрямком вектору $\vec{v}_1$, і побудуємо у точці M паралелограм, діагоналлю якого є $\vec{v}_1$, а однією зі сторін – $\vec{v}$; тоді друга сторона паралелограма й буде визначати вектор $\Delta\vec{v}$, а побудований *паралелограм швидкостей** – векторну суму $\vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta\vec{v}$ (рис. 12.2).

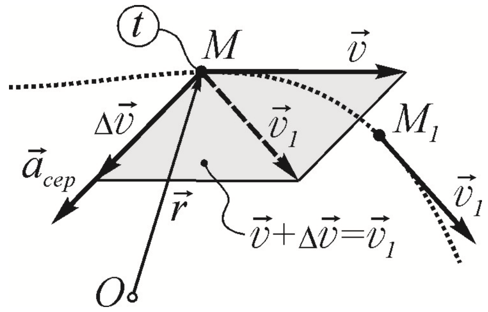


Рис. 12.2

---

* Слід чітко розуміти, що при побудові паралелограма швидкостей ніякого паралельного перенесення вектора $\vec{v}_1$, який є фіксованим вектором, не здійснюється та не відбувається ніякої зміни точки його прикладання; паралелограм швидкостей є *додатковим графічним об'єктом* векторної алгебри, який визначає векторну суму $\vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta\vec{v}$ і шуканий доданок $\Delta\vec{v}$.

Оскільки за визначенням (див. § 10.1) *прискорення* – це векторна величина, яка *характеризує зміну вектора швидкості* в просторі та часі, а за розглядуваний проміжок часу Δt вектор швидкості змінюється на приріст $\Delta\vec{v}$, то відношення $\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ визначає ***середнє прискорення точки*** за цей проміжок часу, тобто

$$\vec{a}_{сер} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Звісно, що вектор $\vec{a}_{сер}$, напрямок якого збігається з напрямком вектора $\Delta\vec{v}$, лише ***наближено характеризує дійсну зміну вектора швидкості*** в просторі та часі за проміжок часу Δt.

Аналізуючи рисунок 12.2, робимо висновок, що вектори $\Delta\vec{v}$ та $\vec{a}_{сер}$ завжди напрямлені в бік угнутості траєкторії руху точки.

У разі зменшення проміжку часу Δt, для котрого визначене середнє прискорення, величина $\vec{a}_{сер}$ буде точніше характеризувати дійсний рух точки; для збільшення точності необхідно ще більше зменшувати приріст Δt. При цьому напрямок вектора $\vec{a}_{сер}$ буде зазнавати відповідних змін.

Щоб отримати об'єктивну характеристику зміни вектора швидкості точки, яка не залежить від проміжку часу Δt та яка називається ***прискоренням точки у момент часу*** t (або ***дійсним***, або ***миттєвим***) ***прискоренням*** $\vec{a}$, слід перейти до границі

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{сер} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Але Δt – це приріст скалярного аргументу t, а $\Delta\vec{v}$ – приріст вектора $\vec{v} = \vec{v}(t)$, котрий є *векторною функцією* цього аргументу; тоді згідно з теорією диференціального числення границя відношення $\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ є першою *векторною похідною* від вектора $\vec{v}$ за часом t. Тобто

$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}$$

(12.1,а) – ***дійсне*** (або ***миттєве***) ***прискорення руху точки у векторній формі***.

Оскільки згідно з формулою (11.2) $\vec{v} = \dfrac{d\,\vec{r}}{dt}$, то

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\,\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}\,. \qquad \textbf{(12.1,б)}$$

🛈 ***Вектор прискорення точки*** у довільний момент часу t дорівнює першій векторній похідній за часом від вектора $\vec{v}$ швидкості руху точки чи другій векторній похідній за часом від радіуса-вектора $\vec{r}$, який визначає положення цієї точки у просторі.

Формули (12.1) є найбільш загальними та стислими математичними визначеннями вектора $\vec{a}$ прискорення руху точки.

Звичайно, що вектор $\vec{a}$, будучи характеристикою конкретної точки у конкретний момент часу, є *фіксованим* вектором.

Який напрямок вектора прискорення руху точки й чому дорівнює його модуль, з’ясуємо у наступних параграфах.

З формули (12.1) зрозуміло, що ***розмірність*** прискорення – це відношення розмірності швидкості до розмірності часу, тобто

$$\left[a\right] = \frac{\left[швидкість\right]}{\left[час\right]} = \frac{LT^{-1}}{T} = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}\,.$$

Одиниця вимірювання прискорення в системі СІ – $^{м}\!/_{сек^2}$; також застосовують і позасистемні одиниці – $^{см}\!/_{сек^2}$ та інші.

§ 12.2. ПРИСКОРЕННЯ РУХУ ТОЧКИ ПРИ КООРДИНАТНОМУ СПОСОБІ ВИЗНАЧЕННЯ ЇЇ РУХУ

Нехай у нерухомій декартовій системі координат $Oxyz$ (див. рис. 11.3) рух точки M задано рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

Визначимо прискорення $\vec{a}$ руху точки.

Для розв'язування означеної задачі скористаємося вже отриманими залежностями: згідно з формулою (12.1)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

а згідно з формулою (11.3,а)

$$\vec{v} = \vec{i} \cdot \dot{x} + \vec{j} \cdot \dot{y} + \vec{k} \cdot \dot{z}.$$

Тоді, підставляючи значення $\vec{v}$, дістанемо

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\vec{i} \cdot \dot{x} + \vec{j} \cdot \dot{y} + \vec{k} \cdot \dot{z}\right),$$

де одиничні вектори $\vec{i} = const$, $\vec{j} = const$ та $\vec{k} = const$, оскільки система відліку – нерухома.

Візьмемо похідну, врахувавши, що похідна від суми дорівнює сумі похідних і сталі множники (в цьому разі – $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$) можна виносити за знак похідної:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\vec{i} \cdot \dot{x}\right) + \frac{d}{dt}\left(\vec{j} \cdot \dot{y}\right) + \frac{d}{dt}\left(\vec{k} \cdot \dot{z}\right) = \vec{i} \cdot \frac{d\dot{x}}{dt} + \vec{j} \cdot \frac{d\dot{y}}{dt} + \vec{k} \cdot \frac{d\dot{z}}{dt}.$$

Оскільки похідна від першої похідної будь-якої функції за певним аргументом дорівнює другій похідній від цієї функції за зазначеним аргументом, а відповідно до формули (11.4) $\dot{x} = v_x$, $\dot{y} = v_y$ і $\dot{z} = v_z$, то

$$\vec{a} = \vec{i} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \vec{k} \cdot \frac{d^2z}{dt^2} \quad \text{або} \quad \vec{a} = \vec{i} \cdot \frac{dv_x}{dt} + \vec{j} \cdot \frac{dv_y}{dt} + \vec{k} \cdot \frac{dv_z}{dt}.$$

Отже, ***вектор дійсного*** (чи ***миттєвого***) ***прискорення руху точки у координатній формі*** визначають залежності:

$$\vec{a} = \vec{i} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \vec{k} \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = \vec{i} \cdot \ddot{x} + \vec{j} \cdot \ddot{y} + \vec{k} \cdot \ddot{z} \qquad \textbf{(12.2,а)}$$

або

$$\vec{a} = \vec{i} \cdot \frac{dv_x}{dt} + \vec{j} \cdot \frac{dv_y}{dt} + \vec{k} \cdot \frac{dv_z}{dt} = \vec{i} \cdot \dot{v}_x + \vec{j} \cdot \dot{v}_y + \vec{k} \cdot \dot{v}_z. \qquad \textbf{(12.2,б)}$$

Спроектувавши векторні рівності (12.2,а) чи (12.2,б) на три координатні осі, дістанемо формули, які визначають ***проекції прискорення руху точки на координатні осі***:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x, \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y, \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(12.3,а)}$$

або

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \\ a_y &= \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \\ a_z &= \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(12.3,б)}$$

ⓘ ***Проекції прискорення точки на нерухомі декартові координатні осі*** дорівнюють першим похідним за часом від відповідних проекцій вектора швидкості чи другим похідним за часом від відповідних координат точки.

Підставляючи відповідні значення, які визначають формули (12.3), у залежності (12.2), можна подати вектор $\vec{a}$ у вигляді

$$\vec{a} = \vec{i} \cdot a_x + \vec{j} \cdot a_y + \vec{k} \cdot a_z . \qquad \textbf{(12.2,в)}$$

До речі, визначення вектора $\vec{a}$ у вигляді (12.2,в) не потребує ніякого доведення. Звісно, що § 12.2 можна було б розпочати заявою: «Згідно з положеннями векторної алгебри запишімо вектор $\vec{a}$, як може бути записаний будь-який вектор, за його проекціями a_x, a_y та a_z на декартові координатні осі: $\vec{a} = \vec{i} \cdot a_x + \vec{j} \cdot a_y + \vec{k} \cdot a_z$».

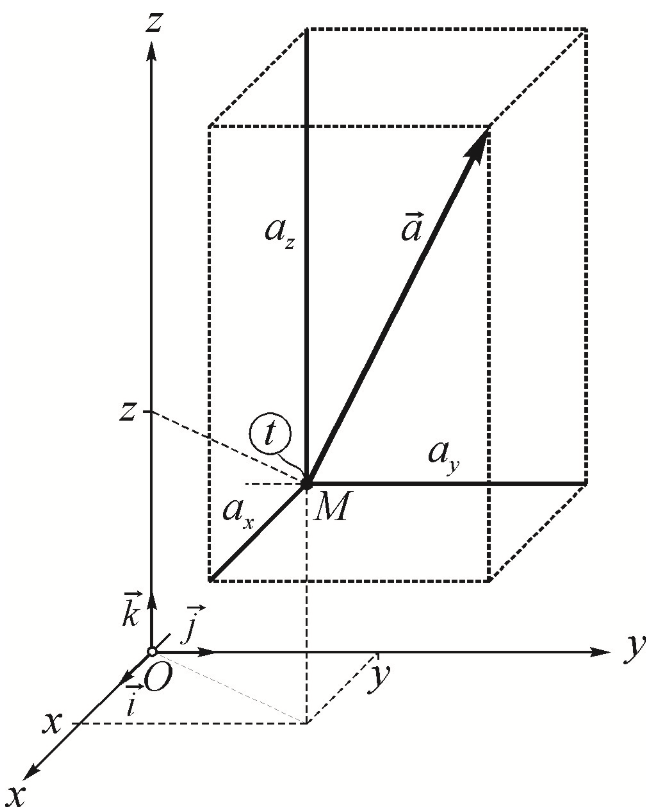


Рис. 12.3

Побудувавши прямокутний паралелепіпед, ребра якого паралельні осям нерухомої декартової системи координат *Oxyz* і дорівнюють визначеним формулою (12.3) проекціям a_x, a_y й a_z, та зобразивши відповідну діагональ цього паралелепіпеда, отримаємо вектор $\vec{a}$ дійсного (або миттєвого) прискорення точки (див. рис. 12.3, де проекції a_x, a_y й a_z умовно зображено додатними).

Через установлені проекції a_x, a_y і a_z ***модуль*** a ***прискорення*** точки можна знайти за відомою з векторної алгебри формулою

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} , \qquad \textbf{(12.4,а)}$$

підставляючи в яку значення a_x, a_y й a_z, у нашому разі дістанемо

$$a = \sqrt{\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2 + \dot{v}_z^2} \tag{12.4,б}$$

чи

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}\ . \tag{12.4,в}$$

Згідно з положеннями векторної алгебри ***напрямок вектора*** $\vec{a}$ можна визначити за допомогою ***напрямних косинусів*** кутів між додатними напрямками координатних осей Ox, Oy, Oz та вектора $\vec{a}$ відповідно у вигляді

$$\left.\begin{aligned} cos\left(\vec{i}\,\hat{;}\,\vec{a}\right) &= \frac{a_x}{a} = \frac{\dot{v}_x}{\sqrt{\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2 + \dot{v}_z^2}}, \\ cos\left(\vec{j}\,\hat{;}\,\vec{a}\right) &= \frac{a_y}{a} = \frac{\dot{v}_y}{\sqrt{\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2 + \dot{v}_z^2}}, \\ cos\left(\vec{k}\,\hat{;}\,\vec{a}\right) &= \frac{a_z}{a} = \frac{\dot{v}_z}{\sqrt{\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2 + \dot{v}_z^2}} \end{aligned}\right\} \tag{12.5,а}$$

або

$$\left.\begin{aligned} cos\left(\vec{i}\,\hat{;}\,\vec{a}\right) &= \frac{a_x}{a} = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}, \\ cos\left(\vec{j}\,\hat{;}\,\vec{a}\right) &= \frac{a_y}{a} = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}, \\ cos\left(\vec{k}\,\hat{;}\,\vec{a}\right) &= \frac{a_z}{a} = \frac{\ddot{z}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{12.5,б}$$

Таким чином, залежності (12.2) ÷ (12.5) однозначно встановлюють усі параметри вектора $\vec{a}$ прискорення точки при координатному способі задання її руху у загальному випадкові.

Розглянемо тепер випадок, коли точка рухається по криволінійній траєкторії в певній площині. Сумістимо із цією площиною декартові осі Ox та Oy (рис. 12.4).

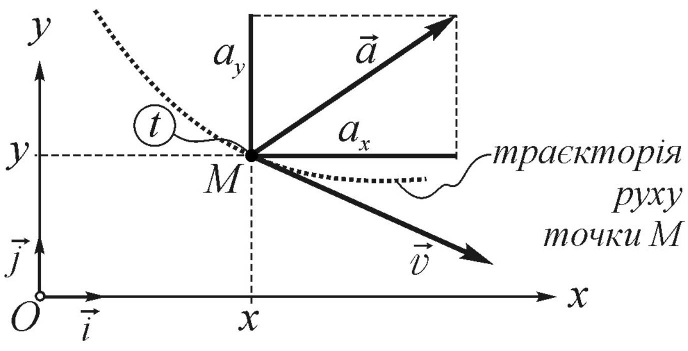


Рис. 12.4

Тоді із залежностей (12.2 ÷ 12.5) як частинний випадок дістанемо

$$\vec{a} = \vec{i} \cdot a_x + \vec{j} \cdot a_y = \vec{i} \cdot \dot{v}_x + \vec{j} \cdot \dot{v}_y = \vec{i} \cdot \ddot{x} + \vec{j} \cdot \ddot{y}, \qquad \textbf{(12.6)}$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \dot{v}_x = \ddot{x}, \\ a_y &= \dot{v}_y = \ddot{y}, \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(12.7)}$$

$$a = \sqrt{a_y^2 + a_x^2} = \sqrt{\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}, \qquad \textbf{(12.8)}$$

$$\left.\begin{aligned} cos\left(\vec{i} \,\hat{;}\, \vec{a}\right) &= \frac{a_x}{a} = \frac{\dot{v}_x}{\sqrt{\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2}} = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}}, \\ cos\left(\vec{j} \,\hat{;}\, \vec{a}\right) &= \frac{a_y}{a} = \frac{\dot{v}_y}{\sqrt{\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2}} = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(12.9)}$$

Отже, у разі руху точки в площині Oxy всі параметри вектора $\vec{a}$ прискорення повністю визначають формули (12.6) ÷ (12.9).

> Формули (12.5) та (12.9) встановлюють *положення вектора* $\vec{a}$ *в просторі* відповідними кутами ***відносно декартових координатних осей***.

§ 12.3. ПРИСКОРЕННЯ РУХУ ТОЧКИ ПРИ КООРДИНАТНОМУ СПОСОБІ ВИЗНАЧЕННЯ ЇЇ ПРЯМОЛІНІЙНОГО РУХУ

Розглянемо окремо випадок, коли точка виконує *прямолінійний* рух. Направимо вздовж траєкторії руху точки координатну вісь Ox (див. рис. 11.6 та 12.5 ÷ 12.8). У такому разі закон руху точки визначає одне рівняння

$$x = x(t)^*.$$

Тоді відповідно до викладеного в попередньому параграфі:

- ✓ вектор прискорення

$$\vec{a} = \vec{i} \cdot a_x = \vec{i} \cdot \frac{dv_x}{dt} = \vec{i} \cdot \dot{v}_x \qquad \textbf{(12.10,а)}$$

або

$$\vec{a} = \vec{i} \cdot a_x = \vec{i} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = \vec{i} \cdot \ddot{x}; \qquad \textbf{(12.10,б)}$$

- ✓ проекцію прискорення на вісь Ox визначає перша похідна за часом від проекції v_x вектора швидкості на цю вісь:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x \qquad \textbf{(12.11,а)}$$

або друга похідна за часом від координати x:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}; \qquad \textbf{(12.11,б)}$$

- ✓ на підставі того, що похідна $\frac{dv_x}{dt}$ (або, що те саме, $\frac{d^2x}{dt^2}$) може бути як додатною, так і від'ємною, вектор $\vec{a}$ прискорення точки проектується на вісь Ox *у дійсну* (*натуральну*) *величину* зі знаком «плюс» чи «мінус»:

$$a_x = \pm a; \qquad \textbf{(12.12)}$$

- ✓ модуль прискорення дорівнює абсолютному значенню проекції прискорення на вісь Ox:

---

* Звісно, що у разі прямолінійного руху точки вздовж осі y або z закон руху матиме відповідний вигляд (див. зноску на с. 42).

$$a = |a_x| = \left|\frac{dv_x}{dt}\right| = |\dot{v}_x| \qquad \textbf{(12.13,а)}$$

або

$$a = |a_x| = \left|\frac{d^2x}{dt^2}\right| = |\ddot{x}|. \qquad \textbf{(12.13,б)}$$

Залежності (12.10) ÷ (12.13) у повному обсязі визначають усі параметри вектора $\vec{a}$ прискорення точки при координатному способі задання її прямолінійного руху.

Для подальших міркувань і висновків зауважимо, що:

1) за визначенням похідної

$$\frac{d\,v_x}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t},$$

де $\Delta v_x = (v_{x1} - v_x)$ – приріст проекції на вісь Ox вектора $\vec{v}$ швидкості за проміжок часу $\Delta t = (t_1 - t)$; v_{x1} та v_x – проекції на вісь Ox вектора $\vec{v}$ у моменти часу t_1 і t відповідно;

2) оскільки Δt – завжди тільки додатна величина, то знак похідної $\frac{d\,v_x}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$ залежить лише від *знака* приросту Δv_x;

3) якщо $v_{x1} > v_x$, то в цьому разі за проміжок часу Δt приріст $\Delta v_x > 0$, тобто є *додатним*; якщо ж $v_{x1} < v_x$, то в цьому разі за проміжок часу Δt приріст $\Delta v_x < 0$, тобто є *від'ємним*.

Важливо не плутати розглянуте поняття приросту Δv_x із поняттям приросту величини (або модуля) швидкості $\Delta v = (v_1 - v)$, де v_1 і v – модулі швидкості точки у моменти часу t_1 і t відповідно. З'ясуємо різницю між поняттями Δv_x та Δv. Спочатку розглянемо два випадки прямолінійного **прискореного** руху точки вздовж осі Ox: рух точки у напрямку цієї осі (рис. 12.5, а) і рух точки у зворотному напрямкові (рис.

12.5, б). Нехай в обох випадках у момент часу t у положенні M модуль $v = 3{,}9\ ^{м}/_{сек}$, а у момент часу $t_1 = t + \Delta t$ у положенні M_1 – $v_1 = 4\ ^{м}/_{сек}$; тоді в обох випадках за проміжок часу Δt приріст модуля швидкості

$$\Delta v = (v_1 - v) = 4 - 3{,}9 = 0{,}1\left(^{м}/_{сек}\right) > 0,$$

що і є ознакою ***прискореного*** руху точки за вказаний проміжок часу (див. у § 10.1 визначення прискореного руху та рис. 10.3).

а) приріст $\Delta x > 0$ б) приріст $\Delta x < 0$

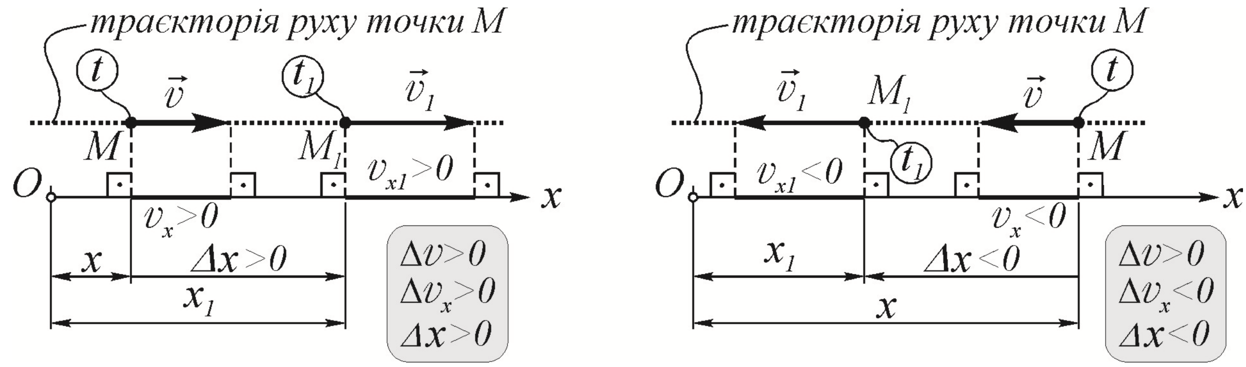


Рис. 12.5. Прискорений прямолінійний рух точки M

З'ясуємо тепер для цього випадку руху значення приросту Δv_x.

На рисунку 12.5, а:

$$v_x = +v = 3{,}9\ ^{м}/_{сек},$$

$$v_{x1} = +v_1 = 4\ ^{м}/_{сек},$$

$$\Delta v_x = v_{x1} - v_x = 4 - 3{,}9 = $$
$$= +0{,}1\left(^{м}/_{сек}\right) > 0.$$

На рисунку 12.5, б:

$$v_x = -v = -3{,}9\ ^{м}/_{сек},$$

$$v_{x1} = -v_1 = -4\ ^{м}/_{сек},$$

$$\Delta v_x = v_{x1} - v_x = -4 - (-3{,}9) =$$
$$= -4 + 3{,}9 = -0{,}1\left(^{м}/_{сек}\right) < 0.$$

Отже, в обох випадках прирости $\Delta v = 0{,}1 > 0$ та точка виконує **прискорений рух**, але прирости Δv_x – різного знака; зауважимо, що в кожному з двох випадків (окремо) **прирости** Δx і Δv_x – **одного знака**.

Тепер розглянемо два випадки прямолінійного **сповільненого** руху точки вздовж осі Ox: у напрямку цієї осі (рис. 12.6, а) та у зворотному напрямкові (рис. 12.6, б). Нехай в обох випадках у момент часу t у положенні M модуль $v = 4 \; м/сек$, а у момент часу $t_1 = t + \Delta t$ у положенні M_1 – $v_1 = 3{,}9 \; м/сек$; тоді в обох випадках за проміжок часу Δt приріст модуля швидкості

$$\Delta v = (v_1 - v) = 3{,}9 - 4 = -0{,}1 \left(м/сек \right) < 0 ,$$

що є ознакою ***сповільненого*** руху точки за вказаний проміжок часу (див. у § 10.1 визначення сповільненого руху та рис. 10.3).

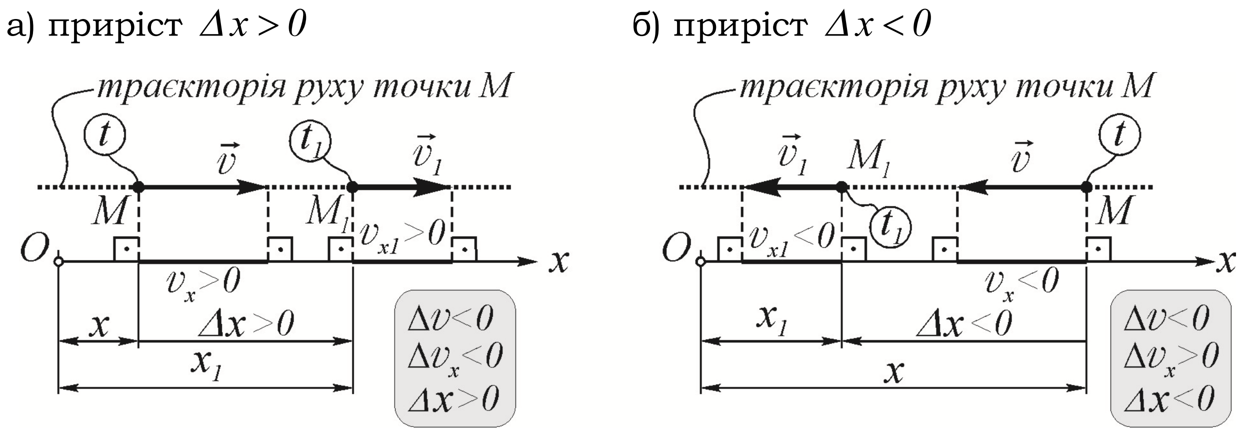


Рис. 12.6. Сповільнений прямолінійний рух точки M

З'ясуємо для цього випадку руху значення приросту Δv_x.

На рисунку 12.6, а:

$$v_x = +v = 4 \; м/сек,$$

$$v_{x1} = +v_1 = 3{,}9 \; м/сек,$$

$$\Delta v_x = v_{x1} - v_x = 3{,}9 - 4 = -0{,}1 \left(м/сек \right) < 0 .$$

На рисунку 12.6, б:

$$v_x = -v = -4 \; м/сек,$$

$$v_{x1} = -v_1 = -3{,}9 \; м/сек,$$

$$\Delta v_x = v_{x1} - v_x = -3{,}9 - (-4) = -3{,}9 + 4 = +0{,}1 \left(м/сек \right) > 0 .$$

Отже, в обох випадках прирости $\Delta v = -0{,}1 < 0$ та точка виконує **сповільнений рух**, але прирости Δv_x – різного знака; зауважимо, що у кожному з двох випадків (окремо) **прирости** Δx і Δv_x – **різного знака**.

Тепер розглянемо та проаналізуємо ***можливі варіанти*** руху точки (усього можливих варіантів буде ***шість***).

Нехай у певний розглядуваний момент часу t похідна

$$\frac{dx}{dt} > 0$$

(тобто в цю мить приріст $\Delta x > 0$, проекція $v_x = +v > 0$, напрямок вектора $\vec{v} = \vec{i} \cdot v$ збігається з напрямком осі Ox і точка рухається у напрямку цієї осі – див. рис. 11.7, а).

1. Якщо у цей момент часу

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} > 0,$$

то в цю мить: а) приріст $\Delta v_x > 0$; б) проекція $a_x = +a > 0$; в) напрямок вектора $\vec{a} = \vec{i} \cdot a$ прискорення точки збігається з напрямком осі Ox; г) вектори $\vec{a}$ і $\vec{v}$ мають однакові напрямки; ґ) прирости Δx та Δv_x – одного знака; д) згідно з випадком, розглянутим і зображеним на рисунку 12.5, а, точка рухається *прискорено* у напрямку осі Ox (рис. 12.7, а).

2. Якщо у цей момент часу

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} < 0,$$

то в цю мить: а) приріст $\Delta v_x < 0$; б) проекція $a_x = -a < 0$; в) напрямок вектора $\vec{a} = -\vec{i} \cdot a$ прискорення точки протилежний напрямку осі Ox; г) вектори $\vec{a}$ і $\vec{v}$ мають протилежні напрямки; ґ) прирости Δx та Δv_x – різного знака; д) згідно з випадком, розглянутим і зображеним на рисунку 12.6, а, точка рухається *сповільнено* у напрямку осі Ox (рис. 12.7, б).

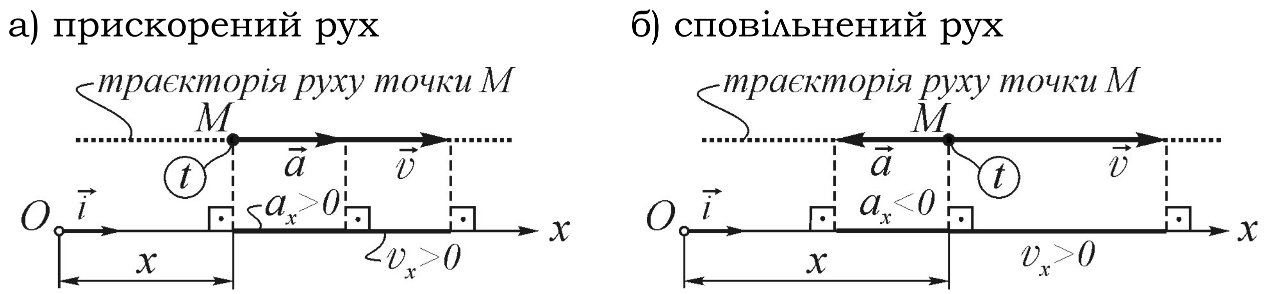


Рис. 12.7. Нерівномірний прямолінійний рух точки M у напрямку осі Ox

Нехай тепер у певний розглядуваний момент часу t похідна

$$\frac{dx}{dt} < 0$$

(тобто в цю мить приріст $\Delta x < 0$, проекція $v_x = -v < 0$, напрямок вектора $\vec{v} = -\vec{i} \cdot v$ не збігається з напрямком осі Ox і точка рухається у протилежному до цієї осі напрямкові – див. рис. 11.7, б).

3. Якщо у цей момент часу

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} > 0,$$

то в цю мить: а) приріст $\Delta v_x > 0$; б) проекція $a_x = +a > 0$; в) напрямок вектора $\vec{a} = \vec{i} \cdot a$ прискорення точки збігається з напрямком осі Ox; г) вектори $\vec{a}$ і $\vec{v}$ мають протилежні напрямки; ґ) прирости Δx та Δv_x – різного знака; д) згідно з випадком, розглянутим і зображеним на рисунку 12.6, б, точка рухається *сповільнено* у напрямку, протилежному до додатного напрямку осі Ox (рис. 12.8, а).

4. Якщо у цей момент часу

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} < 0,$$

то в цю мить: а) приріст $\Delta v_x < 0$; б) проекція $a_x = -a < 0$; в) напрямок вектора $\vec{a} = -\vec{i} \cdot a$ прискорення точки не збігається з напрямком осі Ox; г) вектори $\vec{a}$ та $\vec{v}$ мають однакові напрямки; ґ) прирости Δx і Δv_x – одного знака; д) згідно з випадком, розглянутим і зображеним на рисунку 12.5, б, точка рухається *прискорено* у напрямку, протилежному до додатного напрямку осі Ox (рис. 12.8, б).

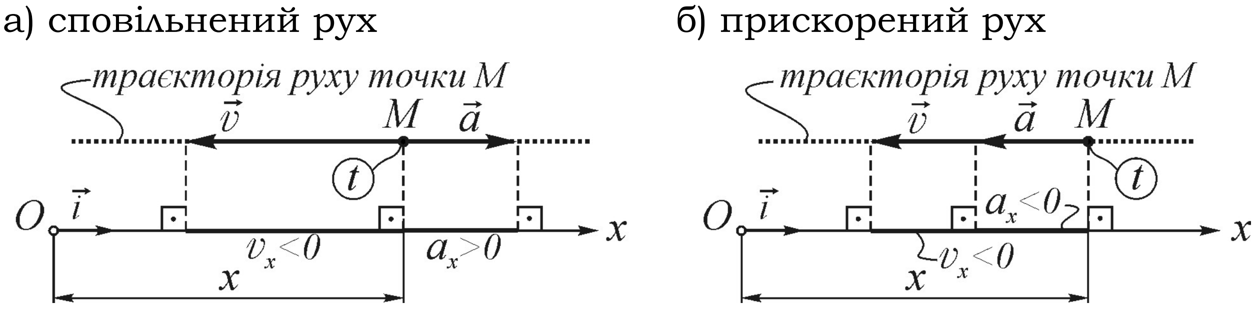


Рис. 12.8. Нерівномірний прямолінійний рух точки M у протилежному до осі Ox напрямку

Розглянуті чотири варіанти та їх аналіз наочно свідчать, що *прямолінійний* рух точки є ***прискореним***, якщо вектор $\vec{v}$ швидкості й вектор $\vec{a}$ прискорення точки напрямлені в один бік, що стається у разі, коли *проекції* швидкості v_x та прискорення a_x – *одного знака* (див. рис. 12.7, а та 12.8, б). ***Сповільненим*** зазначений рух є у разі, коли вектори швидкості $\vec{v}$ і прискорення $\vec{a}$ напрямлені в різні боки, тобто коли *проекції* v_x й a_x *мають різні знаки* (див. рис. 12.7, б та 12.8, а).

Оскільки математично проекції v_x і a_x визначають відповідні похідні $\dot{x}$ і $\ddot{x}$, то викладене у попередньому абзаці дозволяє сформулювати **висновок**:

ⓘ якщо у разі прямолінійного руху точки вздовж осі Ox у певний розглядуваний момент часу перша $\frac{dx}{dt}$ та друга $\frac{d^2x}{dt^2}$ похідні за часом від координати x одного знака, то рух точки в цю мить прискорений, якщо різного – сповільнений.

Розглянемо тепер ситуації, коли похідна

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0 \quad \text{або, що те саме,} \quad \frac{dv_x}{dt}=0 .$$

5. Якщо при русі точки *протягом* певного *проміжку часу* Δt похідна $\frac{dv_x}{dt}$ ***дорівнює нулеві***, то у цьому разі проекція $a_x=0$ і, отже, проекція v_x є величиною сталою; оскільки ж згідно з формулою (11.14) $v=|v_x|$, то *сталим* є і модуль v швидкості; тоді згідно з визначенням рівномірного руху (див. § 10.1) точка протягом усього розглядуваного проміжку часу рухається прямолінійно *рівномірно*; звісно, що при цьому $\vec{a}=0$.

6. Якщо при *нерівномірному русі* точки похідна $\frac{dv_x}{dt}$ ***обертається в нуль*** тільки *у* конкретний *момент часу* t, то відповідно до теорії диференціального числення в цю мить функція v_x досягає екстремуму. З точки зору ж механіки це означає, що в цю мить модуль v швидкості руху точки набуває максимального чи мінімального значення; у разі *досягнення швидкістю* свого *максимального значення* відбувається *зміна характеру* прямолінійного руху точки *з прискореного на сповільнений*; якщо ж *швидкість набуває мінімального значення*, то рух точки *змінюється зі сповільненого на прискорений.*

Зміна характеру руху зі сповільненого на прискорений відбувається й у той момент часу (або у ті моменти часу), коли при неперервному русі *швидкість* набуває найменшого з можливих значень – стає *рівною нулю*; зауважимо, що у цю мить похідна $\frac{dv_x}{dt} \neq 0$.

Для усвідомлення наведених варіантів розглянемо приклад.

🛠 **Приклад 12.1.** За умовою прикладу 11.1 (див. § 11.3) визначити прискорення точки M у моменти часу $t_0 = 0$, $t_1 = 1сек$, $t_2 = 2сек$ та $t_3 = 3сек$ і встановити характер руху точки протягом розглядуваного проміжку часу (у прикладі 11.1 встановлені положення точки на траєкторії та модулі її швидкості в указані моменти часу – див. рис. 11.1п).

Розв'язування. Відповідно до формул (12.10) і (12.13) вектор та модуль прискорення точки визначають залежності:

$$\vec{a} = \vec{k} \cdot a_z \quad \text{й} \quad a = |a_z|,$$

де a_z – проекція на вісь Oz вектора $\vec{a}$, значення якої згідно з формулою (12.11)

$$a_z = \dot{v}_z = \ddot{z},$$

де $v_z = \dot{z} = 10 - 10 \cdot t \left({см}/{сек} \right)$ – див. приклад 11.1.

Тоді

$$a_z = \dot{v}_z = \frac{d}{dt}(10 - 10 \cdot t) = 0 - 10 \cdot 1 = -10 \left({см}/{сек^2} \right) = const,$$

$$\vec{a} = -10 \cdot \vec{k} = const, \quad a = |-10| = 10 \left({см}/{сек^2} \right) = const$$

і, отже, у цьому разі точка протягом усього розглядуваного проміжку часу $[t_0, t_3]$ (і не тільки) рухається зі *сталим прискоренням*. Оскільки ж $a_z = \frac{dv_z}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_z}{\Delta t}$, то виконання умови $a_z = const$ можливе лише у разі, коли за кожний однаковий проміжок часу Δt приріст $\Delta v_z = const$; але у такому разі й приріст $\Delta v = const$, що є ознакою *рівнозмінного руху* точки (див. у § 10.1 визначення рівнозмінного руху та рис. 10.3).

Таким чином, у моменти часу t_0, t_1, t_2 і t_3 прискорення

$$\vec{a}_0 = \vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}_3 = -10 \cdot \vec{k},$$

котре й зображуємо на рисунку 12.1п, основою та всіма іншими елементами якого є рисунок 11.1п прикладу 11.1.

Аналізуючи рисунок 12.1п, бачимо, усвідомлюємо та робимо висновки, що:

- у початковий момент часу t_0 (у положенні M_0) напрямки векторів $\vec{v}_0$ і $\vec{a}_0$ протилежні, й тому в цю мить точка *рухається вгору сповільнено*;
- указаний характер руху зберігається від положення M_0 до положення M_1, оскільки ж $a = const$, то протягом проміжку часу $[t_0, t_1[$ точка виконує ***рівносповільнений рух*** (див. рис. 10.3);
- у момент часу $t_1 = 1 сек$ рух точки M угору закінчився, швидкість точки на мить стала рівною нулю, але *ненульове значення прискорення* $\vec{a}_1$ свідчить, що *у вектора швидкості «є бажання змінюватися»* (див. у § 10.1 визначення прискорення);
- оскільки у наступну після моменту часу t_1 мить швидкість має змінюватися від

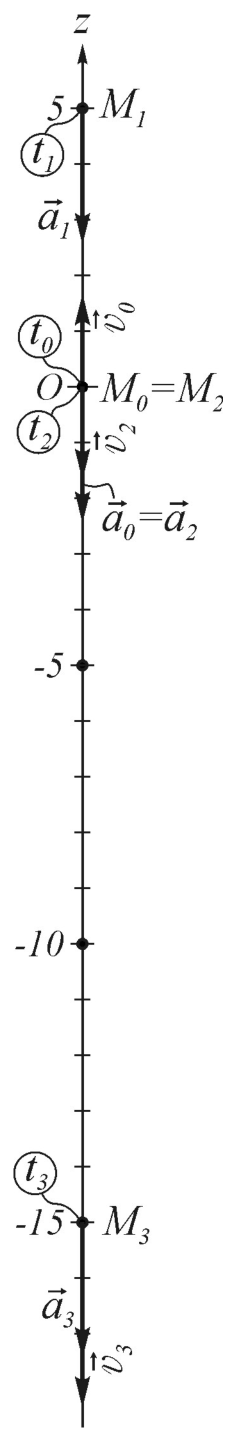


Рис. 12.1п

мінімально можливого значення $v_1 = 0$, то, звісно, швидкість має зростати, а точка – *рухатися вниз прискорено*;

- указаний характер руху зберігається від положення M_1 до положення M_3 (і далі), оскільки ж $a = const$, то при $t > t_1$ точка ***рухається*** тільки вниз ***рівноприскорено*** (див. рис. 10.3).

Звичайно, що всі отримані тут значення та висновки повністю збігаються з результатами та розв'язком прикладу 11.1.

Розв'язувати подібні задачі кінематики точки можна, будуючи відповідні *графіки* й аналізуючи їх, що і розглянемо у наступному параграфі.

§ 12.4. ГРАФІКИ РУХУ, ШЛЯХУ, ШВИДКОСТІ ТА ПРИСКОРЕННЯ ПРЯМОЛІНІЙНОГО РУХУ ТОЧКИ

У разі прямолінійного руху точки вздовж будь-якої декартової осі тими чи іншими функціями часу є: а) координата, що визначає положення розглядуваної точки; б) пройдений точкою шлях L; в) її швидкість v; г) її прискорення a. Наочне уявлення про характер руху точки M можна отримати з *графіків* залежності перелічених кінематичних характеристик від часу.

Для побудови цих графіків необхідно, дотримуючись певних масштабів, уздовж осі абсцис відкладати послідовні значення часу t, а вздовж осі ординат – відповідні їм значення координати, шляху L, швидкості v і прискорення a.

 Графік руху точки – це побудована у відповідних осях ***лінія***, яка виражає функціональну залежність від часу t координати, що визначає положення цієї точки.

З метою більшої визначеності та конкретики подальших міркувань пов'яжімо їх з рухом точки M із прикладів 11.1 і 12.1.

Побудувавши в осях Otz згідно із законом руху

$$z = 10 \cdot t - 5 \cdot t^2 \left(см\right)$$

лінію (яка у цьому разі є віткою параболи), отримаємо *графік руху точки*[*] (див. рис. 12.9, а).

Аналіз отриманого графіку руху приводить до висновків, котрі повністю збігаються з відповідними висновками прикладу 11.1, тому не будемо їх повторювати.

ⓘ ***Графік шляху точки*** – це побудована в осях OtL ***лінія*** $L = f\left(t\right)$, яка виражає функціональну залежність від часу t шляху L, пройденого розглядуваною точкою протягом певного проміжку часу.

Згідно з формулою (10.1) графік шляху досить просто отримати безпосередньо з графіка руху точки.

Так, у розглядуваному випадкові шлях, пройдений точкою M протягом усього розглядуваного проміжку часу $\left[t_0, t_3\right]$, є сумою (див. рис. 11.1п та відповідні пояснення у прикладі 11.1):

- шляху ΔL_1, який пройшла точка протягом часу $\left[t_0, t_1\right]$, рухаючись *з початку відліку тільки вгору*; певна річ, протягом цього проміжку часу характери зміни координати z і шляху, пройденого точкою, є **абсолютно тотожними**, а

$$\Delta L_1 = z_1 = 5\left(см\right);$$

- шляху ΔL_2, котрий пройшла точка протягом часу $\left[t_1, t_3\right]$, рухаючись із положення M_1 (через положення M_2) у положення M_3 *тільки вниз*; протягом цього проміжку часу функція $z = z\left(t\right)$, *змінюючись* за законом $z = 10 \cdot t - 5 \cdot t^2$, **зменшується**, визнача-

[*] Графік руху точки, що наочно зображує, як змінюється координата z із плином часу, **не слід плутати** з траєкторією руху, яка у цьому разі є прямою лінією.

ючи напрямок руху точки (лінія графіка руху при цьому опускається вниз); функція $L = f(t)$, маючи *аналогічний* до функції $z = z(t)$ *характер зміни*, **зростає**; лінія графіка шляху неперервно піднімається вгору незалежно від напрямку руху точки (див. рис. 12.9, б); очевидно, що

$$\Delta L_2 = |z_3 - z_1| = |-15 - 5| = = |-20| = 20(см),$$

а за весь проміжок часу шлях

$$L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = = 5 + 20 = 25(см).$$

Графіки руху та шляху свідчать, що у момент часу $t_1 = 1 сек$, коли швидкість точки на одну мить стає рівною нулю (див. приклад 11.1), функція $z = z(t)$ має екстремум (у цьому разі – максимум), а функція $L = f(t)$ – точку перегину.

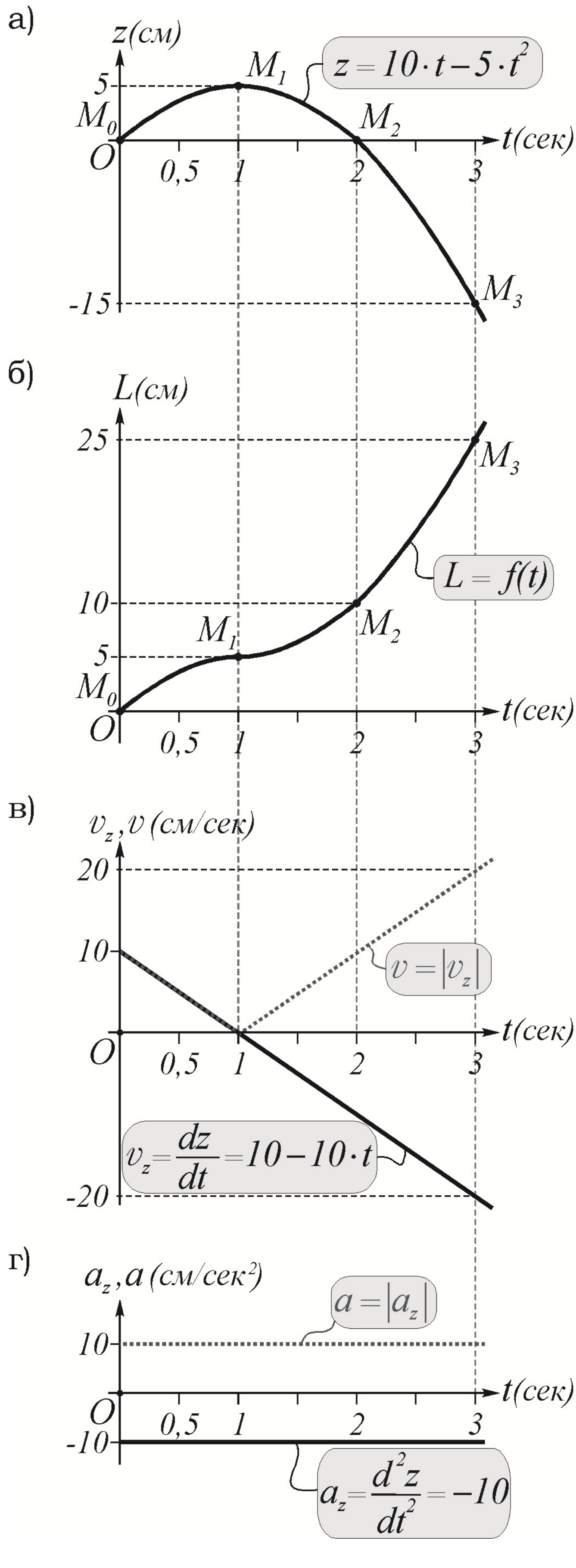


Рис. 12.9

Графіки руху та шляху зображуються однією і тією ж лінією лише у разі руху точки з *початку відліку в напрямку координатної осі.*

Графіки швидкості та **прискорення точки** – це побудовані в осях Otv і Ota **лінії** $v = v(t)$ та $a = a(t)$, кожна з яких відповідно виражає функціональну залежність від часу t модуля v швидкості й модуля a прискорення руху досліджуваної точки.

Для розглядуваного випадку графіки швидкості та прискорення зображені на рисунках 12.9, в і 12.9, г *пунктирними лініями. Суцільними лініями* на цих же рисунках у тих же осях зображені лінії $v_z = \varphi_1(t)$ та $a_z = \varphi_2(t)$, які побудовані за встановленими у прикладах 11.1 і 12.1 залежностями:

$$v_z = \dot{z} = 10 - 10 \cdot t, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} = -10 = const$$

та є ***графіками проекцій на вісь*** Oz ***векторів швидкості й прискорення точки***.

Пунктирні лінії $v = v(t)$ і $a = a(t)$ є похідними від суцільних ліній $v_z = \varphi_1(t)$ та $a_z = \varphi_2(t)$ і отримані шляхом трансформації цих первинних суцільних ліній відповідно до формул (11.14) та (12.13)

$$v = |v_z| \quad \text{і} \quad a = |a_z|,$$

через що *лінії* $v = v(t)$ та $a = a(t)$ *завжди розташовані тільки у перших квадрантах систем координат* Otv *і* Ota (тобто там, де абсциси та ординаті – додатні числа).

Рисунок 12.9, в свідчить, що у розглядуваному випадкові графік $v_z = \varphi_1(t)$ є *прямою* лінією, яка: а) похилена під певним кутом до осі абсцис; б) у момент часу $t_1 = 1 сек$ перетинає цю вісь; в) при $t > t_1$ продовжує опускатися вниз. Графік же $v = v(t)$ є *ламаною* лінією, котра: а) протягом часу $[t_0, t_1]$ збігається з лінією графіка $v_z = \varphi_1(t)$; б) у момент часу t_1 торкається осі абсцис; в) при $t > t_1$ неперервно піднімається вгору. З рисунка ж 12.9, г ясно, що у розглядуваному випадкові графіки $a_z = \varphi_2(t)$ і $a = a(t)$ є *прямими* лініями, паралельними осі абсцис.

Аналіз ліній на рисунках 12.9, в і 12.9, г приводить до висновків, які повністю збігаються з відповідними висновками прикладів 11.1 і 12.1, тому не будемо їх повторювати.

Важливо знати та, природно, пам'ятати, що

у разі ***рівнозмінного руху*** завжди ***графік руху*** точки ***є віткою*** тієї чи іншої ***параболи***, ***графік проекції на*** обрану ***вісь*** вектора ***швидкості*** – ***прямою***, ***похиленою*** під кутом до осі абсцис, а ***графік прискорення*** – ***прямою***, ***паралельною*** осі абсцис (оскільки у цьому разі завжди $a = const$).

Розглянемо ще один приклад.

Приклад 12.2. Нехай точка M виконує прямолінійний рух уздовж осі Ox, напрямленої по горизонталі праворуч, за законом

$$x = t^4 - \frac{52}{3}\cdot t^3 + 100\cdot t^2 - 224\cdot t + 175(см).$$

Дослідити рух точки протягом перших $8{,}5$ секунд її руху.

Розв'язування. Відповідно до формул (11.11), (11.14), (12.10) і (12.13) вектори й модулі швидкості та прискорення точки M у розглядуваному випадку визначають залежності:

$$\vec{v} = \vec{i}\cdot v_x, \quad \vec{a} = \vec{i}\cdot a_x, \quad v = |v_x| \quad \text{і} \quad a = |a_x|,$$

де v_x та a_x – проекції на вісь Ox векторів $\vec{v}$ і $\vec{a}$, значення яких згідно з формулами (11.12) та (12.11):

$$v_x = \dot{x} \quad \text{і} \quad a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}.$$

Тоді у розглядуваному прикладі

$$v_x = \dot{x} = \frac{d}{dt}\left(t^4 - \frac{52}{3}\cdot t^3 + 100\cdot t^2 - 224\cdot t + 175\right) =$$

$$= 4\cdot t^3 - \frac{52}{3}\cdot 3t^2 + 100\cdot 2t - 224\cdot 1 + 0 =$$

$$= 4\cdot t^3 - 52\cdot t^2 + 200\cdot t - 224\left(\text{см}/_{\text{сек}}\right),$$

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(4\cdot t^3 - 52\cdot t^2 + 200\cdot t - 224\right) =$$

$$= 4\cdot 3t^2 - 52\cdot 2t + 200\cdot 1 - 0 = 12\cdot t^2 - 104\cdot t + 200\left(\text{см}/_{\text{сек}^2}\right).$$

У процесі диференціювання враховано, що похідна від суми дорівнює сумі похідних, похідна від сталої величини дорівнює нулеві та сталі множники при змінній t можна виносити за знак похідної.

Усі встановлені функціональні залежності визначають відповідні кінематичні характеристики для будь-якого та для кожного моменту часу.

У початковий момент часу $t_0 = 0$

$$x_0 = t_0^4 - \frac{52}{3}\cdot t_0^3 + 100\cdot t_0^2 - 224\cdot t_0 + 175 =$$

$$= 0^4 - \frac{52}{3}\cdot 0^3 + 100\cdot 0^2 - 224\cdot 0 + 175 = 175\left(\text{см}\right),$$

$$v_{x0} = \dot{x}_0 = 4\cdot t_0^3 - 52\cdot t_0^2 + 200\cdot t_0 - 224 =$$

$$= 4\cdot 0^3 - 52\cdot 0^2 + 200\cdot 0 - 224 = -224\left(\text{см}/_{\text{сек}}\right),$$

$$a_{x0} = \dot{v}_{x0} = \ddot{x}_0 = 12\cdot t_0^2 - 104\cdot t_0 + 200 =$$

$$= 12\cdot 0^2 - 104\cdot 0 + 200 = 200\left(\text{см}/_{\text{сек}^2}\right),$$

$$v_0 = \left|v_{x0}\right| = \left|-224\right| = 224\left(\text{см}/_{\text{сек}}\right), \quad \vec{v}_0 = -224\cdot\vec{i}\,,$$

$$a_0 = \left|a_{x0}\right| = \left|200\right| = 200\left(\text{см}/_{\text{сек}^2}\right) \quad \text{та} \quad \vec{a}_0 = 200\cdot\vec{i}\,.$$

Установлені значення свідчать, що точка починає рух з положення M_0, яке знаходиться на віддалі $175\,см$ праворуч від початку відліку, маючи в цьому положенні напрямлену ліворуч швидкість $\vec{v}_0$ та напрямлене праворуч прискорення $\vec{a}_0$; отже, у початковий момент часу точка рухається *ліворуч сповільнено* (рис 12.2п.1).

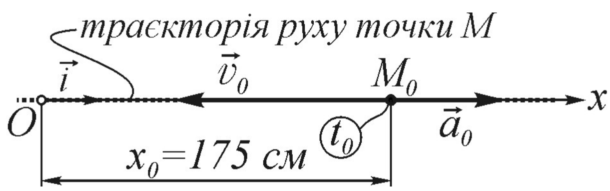


Рис. 12.2п.1

Дослідження подальшого руху точки виконаємо, побудувавши графіки: а) руху; б) шляху; в) швидкості; г) прискорення (див. рис. 12.2п.2).

Будувати зазначені графіки можна у той чи інший підходящий і зручний для кожного спосіб. У будь-якому разі необхідно, послідовно задаючи з доречно обраним кроком Δt параметр t, знаходити за встановленими функціональними залежностями значення ординат відповідних точок, обчислюючи ці значення за допомогою калькулятора (або подумки, або у стовпчик на папері); потім власноруч з дотриманням обраних масштабів зобразити на координатних площинах ці точки та з'єднати їх плавними лініями. Указаний спосіб є простим і надійним, але, звісно, «дідівським». У нинішній час сучасних комп'ютерних технологій краще скористатися, наприклад, можливостями табличного редактора *Microsoft Office Excel* (чи іншими, розробленими безпосередньо для побудови графіків, програмними продуктами, які можна знайти у всесвітній комп'ютерній мережі за допомогою якого завгодно пошуковика). Так, усі графіки на рисунку 12.2п.2 побудовано з використанням *Мастера диаграмм Microsoft Office Excel* за значеннями відповідних кінематичних характеристик руху точки, послідовно обчислених із кроком $\Delta t = 0{,}5\,сек$ для заданого проміжку часу $[0; 8{,}5\,сек]$; результати цього обчислення наведено в таблиці 12.2п.1.

ТАБЛИЦЯ 12.2п.1

Характерні моменти часу	Моменти часу	Координата x точки	Шлях L, пройдений точкою від початку руху	Проекція швидкості v_x	Модуль швидкості v	Проекція прискорення a_x	Модуль прискорення a
t_0	0	175	0	-224	224	200	200
	0,5	85,896	89,104	-136,5	136,5	151	151
	1	34,667	140,333	-72	72	108	108
	1,5	10,563	164,438	-27,5	27,5	71	71
t_1	2	4,333	170,667	0	0	40	40
	2,5	8,229	174,563	13,5	13,5	15	15
t_2	2,880	14,067	180,400	16,243	16,243	0	0
	3	16	182,333	16	16	-4	4
	3,5	22,896	189,229	10,5	10,5	-17	17
t_3	4	25,667	192	0	0	-24	24
t_4	4,333	24,296	193,370	-8,296	8,296	-25,333	25,333
	4,5	22,563	195,104	-12,5	12,5	-25	25
	5	13,333	204,333	-24	24	-20	20
t_5	5,475	0	217,667	-31,271	31,271	-9,680	9,680
	5,5	-0,771	218,438	-31,5	31,5	-9	9
t_6	5,786	-10,042	227,709	-32,835	32,835	0	0
	6	-17	234,667	-32	32	8	8
	6,5	-31,104	248,771	-22,5	22,5	31	31
t_7	7	-37,333	255	0	0	60	60
	7,5	-28,438	263,896	38,5	38,5	95	95
t_8	7,953	0	292,333	89,749	89,749	131,920	131,920
	8	4,333	296,667	96	96	136	136
t_9	8,5	71,229	363,562	175,5	175,5	183	183

Другий стовпчик таблиці 12.2п.1, крім послідовних моментів часу, обчислених із кроком Δt, додатково містить і *характерні моменти часу*, які відповідають нульовим значенням функцій $x = x(t)$, $v_x = \varphi_1(t)$ і $a_x = \varphi_2(t)$.

Значення $t_5 \approx 5{,}475\,сек$ і $t_8 \approx 7{,}953\,сек$ – це дійсні *корені* рівняння

$$t^4 - \frac{52}{3} \cdot t^3 + 100 \cdot t^2 - 224 \cdot t + 175 = 0$$

(яке є алгебраїчним рівнянням четвертого степеня) та визначають ті моменти часу, коли функція $x = x(t) = 0$ (див. відповідні рядочки таблиці 12.2п.1); з точки зору кінематики це означає, що досліджувана точка, рухаючись неперервно, в моменти часу t_5 і t_8 опиняється на початку осі Ox.

Значення $t_1 = 2\,сек$, $t_3 = 4\,сек$ та $t_7 = 7\,сек$ є *коренями* алгебраїчного кубічного рівняння $4 \cdot t^3 - 52 \cdot t^2 + 200 \cdot t - 224 = 0$ і визначають ті моменти часу, коли функція $v_x = \varphi_1(t) = 0$.

Значення $t_2 \approx 2{,}880\,сек$ та $t_6 \approx 5{,}786\,сек$ є *коренями* алгебраїчного квадратного рівняння $12 \cdot t^2 - 104 \cdot t + 200 = 0$ і визначають моменти часу, коли функція $a_x = \varphi_2(t) = 0$.

Для знаходження значень t_5, t_8, t_1, t_3, t_7, t_2 та t_6 необхідно *вміти розв'язувати* наведені *алгебраїчні рівняння*. Певна річ, розв'язувати їх можна будь-яким з відомих легітимних способів: методом Феррарі, за формулою Кардано, за допомогою дискримінанта, за теоремою Вієта.

Момент часу $t_4 \approx 4{,}333\,сек$ визначає для функції

$$a_x = \ddot{x} = 12 \cdot t^2 - 104 \cdot t + 200$$

її *екстремум* (у цьому разі – *мінімум*), для знаходження якого необхідно *вміти досліджувати функції за допомогою похідних*[*].

[*] Якщо вказані способи розв'язування алгебраїчних рівнянь і дослідження функцій за допомогою похідних ще (або вже) невідомі, то варто звернутися до відповідних розділів елементарної алгебри та теорії диференціального числення чи до будь-кого, хто зможе це дохідливо пояснити. Не є великою таємницею і те, що всі наведені тут корені та значення t_4 зовсім неважко встановити на відповідних спеціалізованих інтернет-ресурсах протягом декількох хвилин в онлайн-режимі.

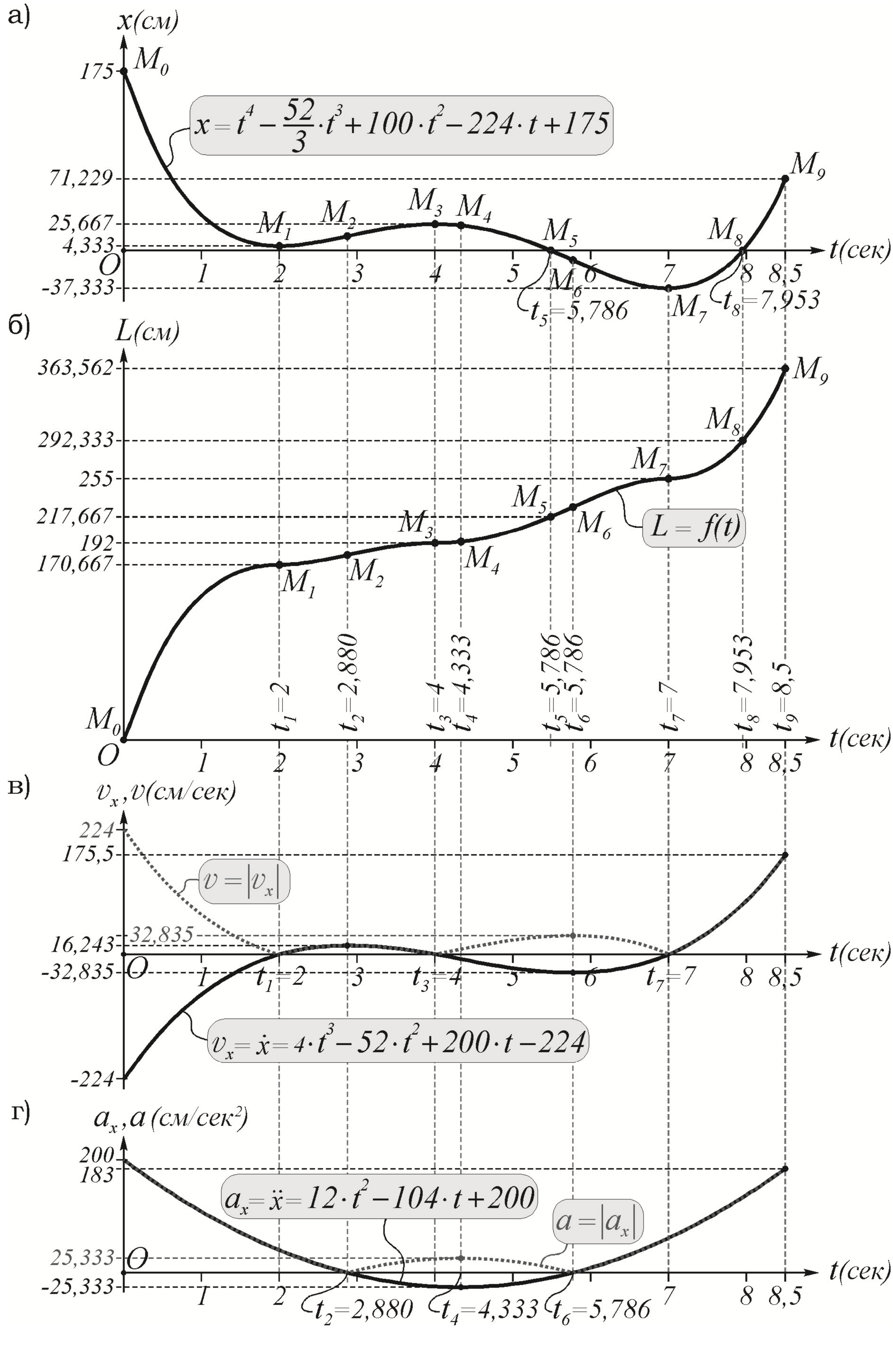

а)
x(см)
$x = t^4 - \frac{52}{3} \cdot t^3 + 100 \cdot t^2 - 224 \cdot t + 175$
175
71,229
25,667
4,333
-37,333
$t_5 = 5,786$
$t_8 = 7,953$
t(сек)
б)
L(см)
363,562
292,333
255
217,667
192
170,667
$L = f(t)$
$t_1 = 2$
$t_2 = 2,880$
$t_3 = 4$
$t_4 = 4,333$
$t_5 = 5,786$
$t_6 = 5,786$
$t_7 = 7$
$t_8 = 7,953$
$t_9 = 8,5$
в)
v_x, v(см/сек)
224
175,5
32,835
16,243
-32,835
-224
$v = |v_x|$
$v_x = \dot{x} = 4 \cdot t^3 - 52 \cdot t^2 + 200 \cdot t - 224$
г)
a_x, a (см/сек^2)
200
183
25,333
-25,333
$a_x = \ddot{x} = 12 \cdot t^2 - 104 \cdot t + 200$
$a = |a_x|$
$t_2 = 2,880$
$t_4 = 4,333$
$t_6 = 5,786$

Рис. 12.2п.2

Вивчення чотирьох кривих на рисунку 12.2п.2 свідчить, що рух точки з її початкового положення M_0 протягом проміжку часу від $t_0 = 0$ до $t_9 = 8{,}5\,сек$ (і далі) є *нерівнозмінним* (див. у § 10.1 визначення нерівнозмінного руху та рис. 10.3). «Розділимо» рух точки на шість фаз і подамо результати дослідження кінематики точки у вигляді таблиці (див. табл. 12.2п.2).

ТАБЛИЦЯ 12.2п.2

№ фази	Проміжок або момент часу	Значення відповідних кінематичних характеристик	Кінематичний стан
1	2	3	4
I	$[t_0, t_1[$	$x > 0$, $\dot{x}$ і $\ddot{x}$ – різного знака, $\dot{x} < 0$	сповільнений рух протилежно до додатного напрямку осі Ox
–	$t_1 = 2\,сек$	$x_1 = x_{min} \approx 4{,}333\,см > 0$, $\dot{x}_1 = 0$, $\ddot{x}_1 \neq 0$	$v_1 = 0$, відбуваються зміни напрямку та характеру руху точки
II	$]t_1, t_2[$	$x > 0$, $\dot{x}$ і $\ddot{x}$ – одного знака, $\dot{x} > 0$	прискорений рух у додатному напрямку осі Ox
–	$t_2 \approx 2{,}880\,сек$	$\dot{x}_2 = \dot{x}_{max} \approx 16{,}243\,\frac{см}{сек}$, $\ddot{x}_2 = 0$	$v_2 \approx 16{,}243\,\frac{см}{сек}$, відбувається зміна характеру руху точки
III	$]t_2, t_3[$	$x > 0$, $\dot{x}$ і $\ddot{x}$ – різного знака, $\dot{x} > 0$	сповільнений рух у додатному напрямку осі Ox
–	$t_3 = 4\,сек$	$x_3 = x_{max} \approx 25{,}667\,см$, $\dot{x}_3 = 0$, $\ddot{x}_3 \neq 0$	$v_3 = 0$, відбуваються зміни напрямку та характеру руху точки

ПРОДОВЖЕННЯ ТАБЛИЦІ 12.2п.2

1	2	3	4
IV	$]t_3, t_6[$	при $t < t_5$ – $x > 0$, при $t_5 \approx 5{,}475\,сек$ – $x_5 = 0$, при $t > t_5$ – $x < 0$, $\dot{x}$ і $\ddot{x}$ – одного знака, $\dot{x} < 0$, при $t_4 \approx 4{,}333\,сек$ $\ddot{x}_4 = \ddot{x}_{min} = -25{,}333\,\frac{см}{сек^2}$	прискорений рух протилежно до додатного напрямку осі Ox (у момент часу t_5 точка опиняється на початку осі Ox, а у момент часу t_4 – модуль прискорення $a_4 = a_{max} = 25{,}333\,\frac{см}{сек^2}$)
–	$t_6 \approx 5{,}786\,сек$	$\dot{x}_6 = \dot{x}_{min} \approx -32{,}835\,\frac{см}{сек}$, $\ddot{x}_6 = 0$	$v_6 \approx 32{,}835\,\frac{см}{сек}$, відбувається зміна характеру руху точки
V	$]t_6, t_7[$	$x < 0$, $\dot{x}$ і $\ddot{x}$ – різного знака, $\dot{x} < 0$	сповільнений рух протилежно до додатного напрямку осі Ox
–	$t_7 = 7\,сек$	$x_7 = x_{min} \approx -37{,}333\,см < 0$, $\dot{x}_7 = 0$, $\ddot{x}_7 \neq 0$	$v_7 = 0$, відбуваються зміни напрямку та характеру руху точки
VI	$]t_7, t_9]$	при $t < t_8$ – $x < 0$, при $t_8 \approx 7{,}953\,сек$ – $x_8 = 0$, при $t > t_8$ – $x > 0$, $\dot{x}$ і $\ddot{x}$ – одного знака, $\dot{x} > 0$	прискорений рух у додатному напрямку осі Ox (у момент часу t_8 точка опиняється на початку осі Ox)

З екстраполяції графіків на рисунку 12.2п.2 зрозуміло, що при $t > t_9$ точка буде продовжувати *рухатися нерівноприскорено* (див. у § 10.1 рис. 10.3) у додатному напрямку осі Ox зі все зростаючою швидкістю.

Таким чином, уся «історія руху» точки M встановлена однозначно.

§ 12.5. СИСТЕМА НАТУРАЛЬНИХ ОСЕЙ

Ознайомимося з деякими необхідними відомостями з диференціальної геометрії, що належать до *теорії кривих у тривимірному просторі.*

Розглянемо *просторову* криву. Нехай $\vec{\tau}$ – одиничний вектор (орт) дотичної осі τ, проведеної у довільній точці M цієї кривої (рис. 12.10). Візьмемо тепер на кривій близько розташовану до точки M точку M_1 і позначимо одиничний вектор дотичної осі у цій точці через $\vec{\tau}_1$.

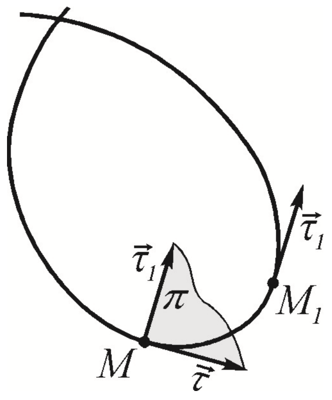


Рис. 12.10

Відкладімо тепер орт $\vec{\tau}_1$ від точки M і уявімо в просторі певну площину π, що проходить через прикладені у точці M вектори $\vec{\tau}$ і $\vec{\tau}_1$ (див. рис. 12.10).

Якщо точку M_1 наближати до точки M, то зазначена площина π буде адекватно змінювати своє положення в просторі, а при нескінченно близькому наближенні точки M_1 до точки M (при переході до границі) ця площина опиниться в певному граничному положенні. Отриману в такий спосіб площину π_1 називають *стичною площиною до кривої у точці* M (див. рис. 12.11, а).

Якщо через точку M перпендикулярно до дотичної провести (розташувати) площину, одержимо так звану *нормальну площину* π_2. Звичайно, будь-яка пряма цієї площини, що проходить через точку M, розташована перпендикулярно до орта $\vec{\tau}$ й у теорії кривих у тривимірному просторі називається *нормаллю* до кривої; лінія ж перетину стичної та нормальної площин визначає *головну* *нормаль до кривої у точці* M . Проведену через точку M перпендикулярно до головної нормалі площину π_3 називають *спрямною площиною*. Лінія перетину спрямної та нормальної площин визначає *бінормаль до кривої у точці* M . Очевидно, що бінормаль є перпендикулярною і до головної нормалі, і до дотичної (див. рис. 12.11,а).

> ⓘ Тригранник, утворений стичною, нормальною та спрямною площинами, називається ***натуральним*** (чи ***рухомим***) ***тригранником***, який у кожній точці кривої має свої три взаємно перпендикулярні напрямки: дотичної, головної нормалі та бінормалі.

а) натуральний тригранник б) осі натурального тригранника

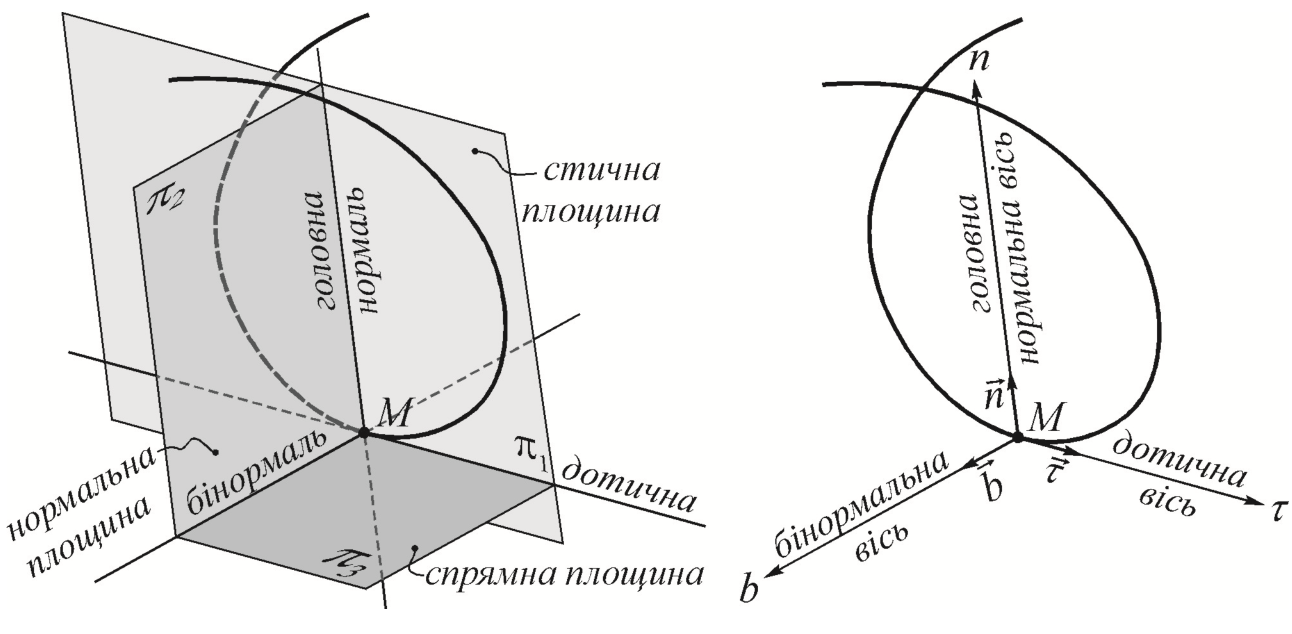


Рис. 12.11

Розглянемо поняття про одиничні вектори (орти) $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ і $\vec{b}$ координатних осей, положення яких визначають зазначені напрямки натурального тригранника.

Поняття про орт $\vec{\tau}$ дотичної осі τ вже було введено раніше (див. §11.4). Одиничний вектор $\vec{n}$ *завжди напрямлений у бік угнутості кривої* і є ортом головної нормальної осі n. Одиничний вектор $\vec{b}$ є ортом бінормальної осі b та напрямлений так, щоб орти $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ і $\vec{b}$ утворювали б праву ортогональну трійку векторів; у такому разі, певна річ, дотична вісь τ, головна нормальна вісь n і бінормальна вісь b утворюють праву систему координатних осей (див. рис. 12.11, б).

> ⓘ Права прямокутна система координатних осей (дотична вісь τ, головна нормальна вісь n і бінормальна вісь b), пов'язана з певною точкою M кривої, називається ***системою натуральних осей***, а $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ та $\vec{b}$ є одиничними векторами (ортами) відповідних осей натурального тригранника.

Тепер уявімо в просторі певне коло, що проходить через точку M і дві суміжні близькі до неї точки кривої. Граничне положення цього кола, коли зазначені суміжні точки розташовані *нескінченно близько* до точки M, називається *кругом кривини кривої у точці* M (звичайно, цей круг лежить у стичній площині). Радіус ρ круга кривини називають *радіусом кривини кривої у точці* M. Центр круга кривини лежить на головній нормалі з боку угнутості кривої на віддалі ρ від точки M та називається *центром кривини кривої у точці* M.

У разі, коли *крива є плоскою*, то ця крива *лежить у стичній площині*, а головна нормаль у цьому разі у кожній точці кривої є єдиною *нормаллю до кривої* у цій площині.

Системи натуральних осей широко застосовують у теоретичній механіці (у її розділах «Кінематика» та «Динаміка») при дослідженні рухів тих чи інших точок, пов'язуючи і *натуральний три-*

гранник, і *початок відліку* його осей з досліджуваною *рухомою* точкою. *Їх* рух у просторі визначають: а) траєкторія руху цієї точки; б) початок відліку на траєкторії, додатній і від'ємний напрямки відліку дугової координати s; в) закон $s = s(t)$ руху точки.

§ 12.6. ПРИСКОРЕННЯ РУХУ ТОЧКИ ПРИ НАТУРАЛЬНОМУ СПОСОБІ ВИЗНАЧЕННЯ ЇЇ РУХУ

Нехай рух точки задано натуральним способом, тобто відомі: а) траєкторія руху точки; б) початок відліку, додатній і від'ємний напрямки дугової осі s (див. рис. 10.7); в) закон руху $s = s(t)$.

Розглядаючи *довільне положення* точки, визначимо її прискорення $\vec{a}$.

Знову скористаємося вже встановленими залежностями: згідно з формулами (12.1) і (11.17)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{і} \quad \vec{v} = \vec{\tau} \cdot v_\tau$$

відповідно; з урахуванням наведеного дістанемо, що

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\tau} \cdot v_\tau\right), \tag{*}$$

де $\vec{\tau}$ – одиничний вектор (орт) дотичної осі τ; v_τ – проекція вектора $\vec{v}$ швидкості руху точки на цю вісь.

Для подальших міркувань і висновків, усвідомлюючи зображене, наприклад, на рисунку 11.12, а, зауважимо, що:

- у загальному випадкові v_τ – *змінна* величина;
- оскільки початок відліку $\vec{\tau}$ пов'язаний з рухомою точкою, то хоч і $\tau = 1 = const$, але $\vec{\tau} \neq const$, тобто у загальному випадкові у виразі (*) множник $\vec{\tau}$ – також *змінна* величина;
- кожному значенню s відповідає певне значення $\vec{\tau}$, тобто орт $\vec{\tau}$

є не тільки функцією часу t, але й перебуває у якійсь функціональній залежності від дугової координати s:

$$\vec{\tau} = \vec{f}(s).$$

Тож похідну (*) візьмемо як похідну від добутку; оскільки

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v',$$

то

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} \cdot v_\tau + \vec{\tau} \cdot \frac{dv_\tau}{dt}. \qquad (**)$$

Щоб визначити в отриманому виразі векторну похідну $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$, помножимо її на $\frac{ds}{ds}$, перетворимо й, урахувавши, що згідно з формулою (11.18) $\frac{ds}{dt} = v_\tau$, подамо у вигляді

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot v_\tau. \qquad (***)$$

З'ясуємо механіко-математичний зміст отриманого у формулі (***) множника $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$:

1) оскільки, як зазначено вище, існує функціональна залежність $\vec{\tau} = \vec{f}(s)$, то $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ є *першою векторною похідною* від одиничного вектора $\vec{\tau}$ за скалярною змінною – дуговою координатою s;
2) тоді за загальним визначенням похідної

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s},$$

де $\Delta\vec{\tau}$ і Δs – відповідно прирости орта $\vec{\tau}$ і дугової координати s за проміжок часу Δt;

3) отже, множник $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}$ є *вектором*, напрям якого збігається з граничним напрямком вектора $\dfrac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}$.

Для з'ясування змісту відношення $\dfrac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}$ розглянемо дві криві лінії: «криву» криву (a) (рис. 12.12, а) і «ще кривішу» криву (b) (рис. 12.12, б). Візьмемо на обох лініях точки M та M_1 так, щоб довжини дуг $\overset{\cup}{MM_1}$ в обох випадках були б однаковими: $\overset{\cup}{MM_1} = \Delta s$. Покажімо відповідні орти $\vec{\tau}$ та $\vec{\tau}_1$ у цих точках і встановімо прирости $\Delta\vec{\tau}^{(a)}$ для кривої (a) та $\Delta\vec{\tau}^{(b)}$ для кривої (b) за добре відомим правилом паралелограма (так, як це виконано у § 12.1 при знаходженні приросту $\Delta\vec{v}$, див. рис. 12.2 і відповідні пояснення).

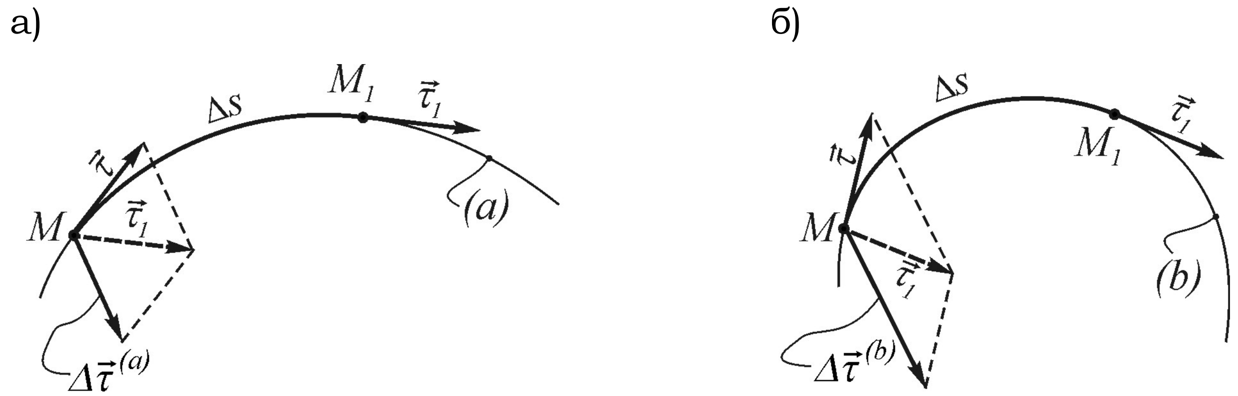


Рис. 12.12

Установлені на рисунку 12.12 прирости свідчать, що модуль $\Delta\tau^{(b)}$ приросту орта $\Delta\vec{\tau}^{(b)}$ «ще кривішої» кривої (b) більше, ніж модуль $\Delta\tau^{(a)}$ приросту орта $\Delta\vec{\tau}^{(a)}$ кривої (a):

$$\Delta\tau^{(b)} > \Delta\tau^{(a)}.$$

З розглянутого та з'ясованого доходимо висновку, що відношення $\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}$ *характеризує кривину кривої на ділянці* MM_1. У теорії кривих у тривимірному просторі курсу диференціальної геометрії це відношення позначають символом $\vec{K}_{сер}$ і називають ***вектором середньої кривини кривої*** на розглядуваній ділянці, отже

$$\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s} = \vec{K}_{сер}.$$

Вектор $\vec{K}_{сер}$ має напрямок вектора $\Delta\vec{\tau}$ (тобто напрямлений у бік угнутості кривої) та ***наближено характеризує кривину кривої*** на ділянці MM_1.

Переходячи до границі (коли Δs прямує до 0 та точка M_1 нескінченно близько наближається до точки M), отримаємо ***вектор дійсної кривини кривої у розглядуваній точці***

$$\vec{K} = \lim_{\Delta s \to 0} \vec{K}_{сер} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}.$$

Таким чином,

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s} = \vec{K}.$$

З диференціальної геометрії відомо (доведення можна знайти у будь-якому курсі диференціальної геометрії), що:

- модуль вектора кривини $K = \frac{1}{\rho}$, де ρ – радіус кривини кривої у точці M (див. § 12.5);
- вектор $\vec{K}$ напрямлений перпендикулярно до дотичної осі τ у бік угнутості кривої за напрямком головної нормальної осі n (див. рис. 12.11, б);
- вектор дійсної кривини кривої у розглядуваній точці M

$$\vec{K} = \vec{n} \cdot \frac{1}{\rho},$$

де $\vec{n}$ – орт головної нормальної осі n (див. § 12.5).

Тоді у нашому випадку

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \vec{n} \cdot \frac{1}{\rho},$$

з урахуванням чого вираз (***) набуває вигляду

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot v_\tau = \vec{n} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot v_\tau .$$

Підставляючи ж це значення у формулу (**), дістанемо

$$\vec{a} = \vec{n} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot v_\tau \cdot v_\tau + \vec{\tau} \cdot \frac{dv_\tau}{dt} .$$

Через те що згідно з формулою (11.19) $v_\tau = +v$ або $v_\tau = -v$, то в будь-якому випадку $v_\tau \cdot v_\tau = v^2$; тоді остаточно визначаємо, що

$$\vec{a} = \vec{n} \cdot \frac{v^2}{\rho} + \vec{\tau} \cdot \frac{dv_\tau}{dt}$$ **(12.14,а)** – ***вектор прискорення руху точки у натуральній формі***.

З точки зору векторної алгебри отримана формула свідчить, що, по-перше, вектор $\vec{a}$ проектується *тільки на дві осі* (при цьому скалярний множник при $\vec{n}$ визначає його *проекцію на головну нормальну вісь* n, а скалярний множник при $\vec{\tau}$ – *проекцію на дотичну вісь* τ); по-друге, проекція вектора $\vec{a}$ на бінормальну вісь b натурального тригранника дорівнює нулю.

Оскільки формула (12.14) отримана для довільного розглядуваного положення точки, то, безсумнівно, що

вектор $\vec{a}$ ***прискорення*** точки у кожний (або у будь-який) момент часу ***лежить у стичній площині*** й у загальному випадкові ***проектується на*** ортогональні осі рухомого тригранника: ***дотичну вісь*** τ та ***головну нормальну вісь*** n (див. рис. 12.13).

Якщо траєкторією руху точки є *плоска крива*, що знаходиться у певній площині, то вектор $\vec{a}$ *лежить також у* цій *площині.*

Надавши проекціям вектора $\vec{a}$ на головну нормальну вісь n та дотичну вісь τ *традиційних позначень**, подамо формулу (12.14,а) у вигляді

$$\vec{a} = \vec{n} \cdot a_n + \vec{\tau} \cdot a_\tau , \qquad \textbf{(12.14,б)}$$

де a_n і a_τ – ***проекції вектора*** $\vec{a}$ ***на головну нормальну вісь*** n та ***на дотичну вісь*** τ відповідно.

З порівняння формул (12.14,а) і (12.14,б) очевидно, що

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \qquad \textbf{(12.15)}$$

та

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \dot{v}_\tau ; \qquad \textbf{(12.16,а)}$$

якщо ж узяти до уваги формулу (11.18), згідно з якою $v_\tau = \frac{ds}{dt}$, то

$$a_\tau = \frac{d}{dt}(v_\tau) = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} . \qquad \textbf{(12.16,б)}$$

🛈 ***Проекція*** a_τ ***прискорення*** $\vec{a}$ ***точки на дотичну вісь*** τ дорівнює першій похідній за часом від проекції v_τ швидкості на цю вісь або другій похідній за часом від дугової координати s, яка визначає положення цієї точки на її траєкторії руху.

---

* Про традиційні позначення проекцій тих чи інших векторів на ті чи інші осі – див. [3, с. 49 – 56].

Проекція a_τ може бути як ***додатною*** (див. рис. 12.13, а), так і ***від'ємною*** (див. рис. 12.13, б).

Оскільки у формулі (12.15) фізичні величини *модуль* v швидкості та *радіус* ρ кривини траєкторії руху за жодних обставин не можуть набувати від'ємних значень, то

проекція a_n ***прискорення*** $\vec{a}$ ***точки на головну нормальну вісь*** n завжди ***додатна*** та дорівнює квадрату модуля швидкості точки, поділеному на радіус кривини траєкторії руху в розглядуваному положенні.

Зобразимо на рисунку 12.13 вектор $\vec{a}$ за його проекціями a_n і a_τ, визначеними формулами (12.15) та (12.16).

а) проекція $a_\tau > 0$ б) проекція $a_\tau < 0$

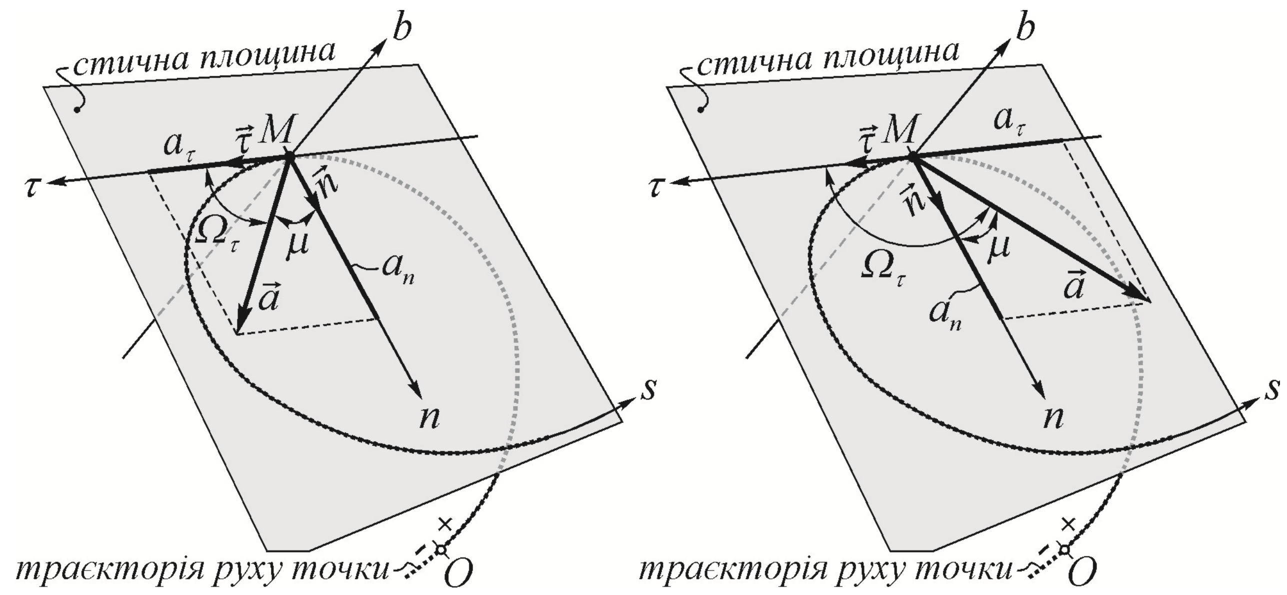


Рис. 12.13. Нерівномірний криволінійний рух точки M

Через установлені проекції a_n і a_τ ***модуль*** a ***прискорення*** точки можна знайти за відомою з векторної алгебри формулою

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}\,, \qquad \textbf{(12.17,а)}$$

підставляючи в яку визначувані залежностями (12.15) та (12.16,а) відповідно значення a_n і a_τ, у нашому разі дістанемо

$$a = \sqrt{\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{dv_\tau}{dt}\right)^2} = \sqrt{\frac{v^4}{\rho^2} + \left(\frac{dv_\tau}{dt}\right)^2}. \qquad \textbf{(12.17,б)}$$

Якщо врахувати, що згідно з формулою (11.19) $v_\tau = \pm v$, то останній формулі можна надати вигляду

$$a = \sqrt{\frac{v^4}{\rho^2} + \left(\frac{d}{dt}(\pm v)\right)^2} = \sqrt{\frac{v^4}{\rho^2} + \left(\pm\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

або остаточно

$$a = \sqrt{\frac{v^4}{\rho^2} + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}. \qquad \textbf{(12.18)}$$

Формула (12.18) наочно свідчить, що у загальному випадку $a \neq \frac{dv}{dt}$, хоча й згідно з формулою (12.1) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$. Необхідно чітко розуміти існуючу *суттєву різницю* в останніх двох наведених формулах та *не плутати поняття* ***скалярної*** *та* ***векторної*** *похідних.*

Напрямок вектора $\vec{a}$ за положеннями векторної алгебри визначимо за допомогою ***напрямних косинусів*** кутів Ω_τ і μ між додатними напрямками ортогональних осей τ та n рухомого тригранника й вектора $\vec{a}$ відповідно:

$$\left.\begin{aligned} \cos\Omega_\tau &= \cos(\vec{\tau}\,\hat{;}\,\vec{a}) = \frac{a_\tau}{a}, \\ \cos\mu &= \cos(\vec{n}\,\hat{;}\,\vec{a}) = \frac{a_n}{a}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(12.19)}$$

Як відомо з елементарної тригонометрії, *косинус гострого кута* (який більший від $0°$ і менший за $90°$) – *додатна* величина, а *косинус тупого кута* (який більший за $90°$ і менший від $180°$) – *від'ємна* величина.

Урахувавши наведені відомості елементарної тригонометрії, звернімо увагу на те, що:

- оскільки проекція $a_n > 0$ *завжди*, то також завжди $cos\,\mu = \dfrac{a_n}{a} > 0$ і, отже, μ – гострий кут *завжди* (див. рис. 12.13);
- якщо проекція $a_\tau > 0$, то у такому разі $cos\,\Omega_\tau = \dfrac{a_\tau}{a} > 0$ та Ω_τ – гострий кут (див. рис. 12.13, а);
- якщо проекція $a_\tau < 0$, то у такому разі $cos\,\Omega_\tau = \dfrac{a_\tau}{a} < 0$ і Ω_τ – тупий кут (див. рис. 12.13, б).

Кути Ω_τ та μ встановлюють *положення вектора $\vec{a}$ в просторі* ***відносно натуральних осей*** рухомого тригранника.

Оскільки формули (12.14) ÷ (12.19) *однозначно встановлюють усі параметри* вектора $\vec{a}$ при натуральному способі задання руху точки, то на цьому «математична розмова» про знаходження прискорення $\vec{a}$ точки по суті є закінченою. Але у класичній механіці традиційно застосовують дещо інший **підхід** до визначення прискорення точки при натуральному способі опису руху, який математично є тотожним розглянутому у цьому параграфі, але приводить до значно інформативніших механіко-математичних результатів-висновків у вигляді залежностей між кінематичними параметрами точки; ці залежності:

✓ усебічно характеризують рух точки;

✓ мають важливе самостійне значення та широке застосування не тільки у різних розділах механіки, а й у багатьох суміжних із нею науках.

Розглянемо зазначений підхід у наступних двох параграфах.

§ 12.7. НОРМАЛЬНЕ Й ДОТИЧНЕ (ТАНГЕНЦІАЛЬНЕ) ПРИСКОРЕННЯ РУХУ ТОЧКИ

Отриману у § 12.6 формулу (12.14,а)

$$\vec{a} = \vec{n} \cdot \frac{v^2}{\rho} + \vec{\tau} \cdot \frac{dv_\tau}{dt}$$

з точки зору векторної алгебри також *можна розглядати і як* формулу, що визначає *векторну суму двох доданків*. У такому разі доданок $\vec{n} \cdot \frac{v^2}{\rho}$ – це *вектор*, який лежить на осі n, а інший доданок $\vec{\tau} \cdot \frac{dv_\tau}{dt}$ – *вектор*, що лежить на осі τ.

Назвімо вектор, який *лежить на* головній *нормальній осі n* натурального тригранника, ***нормальним прискоренням точки*** і позначмо його як $\vec{a}^{\,n}$:

$$\vec{a}^{\,n} = \vec{n} \cdot \frac{v^2}{\rho}, \qquad \textbf{(12.20,a)}$$

а вектор, що *лежить на дотичній осі* τ натурального тригранника, – ***дотичним*** (***тангенціальним***) ***прискоренням точки*** і позначмо його як $\vec{a}^{\,\tau}$:

$$\vec{a}^{\,\tau} = \vec{\tau} \cdot \frac{dv_\tau}{dt}. \qquad \textbf{(12.21,a)}$$

Урахувавши значення виразів (12.20,а) та (12.21,а), надамо формулі (12.14,а) вигляду

$$\vec{a} = \vec{a}^{\,n} + \vec{a}^{\,\tau}. \qquad \textbf{(12.22)}$$

Отримана векторна залежність (12.22) – це аналітичний запис однієї з *найважливіших* ***теорем***[*] *кінематики точки*:

---

[*] Безперечно, формула (12.14,а) також є аналітичним записом зазначеної теореми.

ⓘ ***прискорення*** [*] ***точки*** дорівнює векторній сумі нормального й дотичного (тангенціального) прискорень цієї точки (див. далі рис. 12.16 та 12.17).

Нормальне $\vec{a}^n$ і дотичне (тангенціальне) $\vec{a}^\tau$ прискорення точки – це *кінематичні характеристики* точки, які:

- *належать* до категорії основних (див. § 10.1);
- *мають* власні імена та позначення;
- однозначно *класифікують* рухи точки (див. далі § 12.8).

Однак не треба сприймати це так, начебто *одна* розглядувана *точка має два прискорення.* Нормальне $\vec{a}^n$ і дотичне (тангенціальне) $\vec{a}^\tau$ прискорення є двома ***складовими*** (або ***компонентами***) однієї кінематичної характеристики – повного прискорення $\vec{a}$ точки.

Оскільки обидві компоненти є *векторами*, то кожна з них визначається, як і будь-яка інша векторна величина, трьома параметрами: модулем, напрямком та точкою прикладання.

З'ясуємо ці параметри кожного зі вказаних векторів.

Безсумнівно, що ***точкою прикладання*** векторів $\vec{a}^n$ і $\vec{a}^\tau$ є *тільки* та *точка*, прискорення якої вони визначають; на цій підставі $\vec{a}^n$ і $\vec{a}^\tau$ – ***фіксовані*** вектори.

Формула (12.20,а) однозначно *свідчить*, що проекцію вектора $\vec{a}^n$ на головну нормальну вісь n визначає множник $\dfrac{v^2}{\rho}$.

Якщо порівняти наведене *свідчення* з формулою (12.15), то зрозуміло, що проекція вектора $\vec{a}$ повного прискорення та проекція вектора $\vec{a}^n$ нормального прискорення на головну нормальну вісь n є *одним і тим же*; тому для обох цих проекцій будемо вживати *одне й те саме позначення* – a_n.

[*] Часто (достатньо доречно) вживають назву ***повне прискорення точки***.

Отже,

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}. \qquad \textbf{(12.23)}$$

> ⓘ ***Проекція*** a_n ***нормального прискорення*** $\vec{a}^{\,n}$ ***на вісь*** n рухомого тригранника дорівнює квадрату модуля швидкості точки, поділеному на радіус кривини траєкторії руху в розглядуваному положенні, та завжди тільки ***додатна***.

Урахувавши встановлюване формулою (12.23) позначення, залежності (12.20,а) можна надати вигляду

$$\vec{a}^{\,n} = \vec{n} \cdot a_n. \qquad \textbf{(12.20,б)}$$

Оскільки головна нормальна вісь n завжди напрямлена в бік угнутості кривої (див. § 12.5), то

> ⓘ ***вектор*** $\vec{a}^{\,n}$ ***нормального прискорення точки*** лежить на головній нормальній осі n і *завжди* напрямлений у бік угнутості траєкторії руху до центра її кривини (див. рис. 12.16 та 12.17).

Через те що вектор $\vec{a}^{\,n}$ лежить на осі n, збігаючись з нею за напрямком, то вектор $\vec{a}^{\,n}$ проектується на вісь n у дійсну (натуральну) величину тільки зі знаком «плюс» і $a_n = a^n$ (див. у [3] § 2.3, рис. 2.9, б та відповідні пояснення); тоді

$$a^n = \frac{v^2}{\rho}$$ **(12.24)** – ***модуль нормального прискорення точки***.

Порівнюючи ж формули (12.23) і (12.24) бачимо, що значення *двох* різних *механічних понять* (***проекції*** a_n та ***модуля*** a^n) визначає *один математичний вираз*, тобто

$$a_n \equiv a^n.$$

На цій підставі у багатьох літературних джерелах зазначені два поняття позначають одним символом – a_n.

Узявши до уваги встановлену тотожність $a_n \equiv a^n$, подамо ще одну можливу форму запису залежності (12.20,а):

$$\vec{a}^n = \vec{n} \cdot a^n . \qquad \textbf{(12.20,в)}$$

Формула (12.21,а) однозначно *свідчить*, що проекцію вектора $\vec{a}^\tau$ на дотичну вісь τ визначає множник при $\vec{\tau}$ – похідна $\dfrac{dv_\tau}{dt}$.

Якщо порівняти наведене *свідчення* з формулою (12.16), то знов-таки зрозуміло, що проекція вектора $\vec{a}$ повного прискорення та проекція вектора $\vec{a}^\tau$ дотичного (тангенціального) прискорення на дотичну вісь τ є *одним і тим же*; тому для обох цих проекцій будемо вживати *одне й те саме позначення* – a_τ.

Отже,

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \dot{v}_\tau , \qquad \textbf{(12.25,а)}$$

якщо ж узяти до уваги формулу (11.18), згідно з якою $v_\tau = \dfrac{ds}{dt}$, то

$$a_\tau = \frac{d}{dt}(v_\tau) = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} . \qquad \textbf{(12.25,б)}$$

ⓘ ***Проекція*** a_τ ***дотичного (тангенціального) прискорення*** $\vec{a}^\tau$ ***на дотичну вісь*** τ дорівнює першій похідній за часом від проекції v_τ швидкості на цю вісь або другій похідній за часом від дугової координати s, яка визначає положення цієї точки на її траєкторії руху.

Урахувавши встановлюване формулою (12.25) позначення, залежності (12.21,а) можна надати також вигляду

$$\vec{a}^\tau = \vec{\tau} \cdot a_\tau . \qquad \textbf{(12.21,б)}$$

Через те що похідна $\dfrac{dv_\tau}{dt}$ (або, що те саме, $\dfrac{d^2s}{dt^2}$) може бути як додатною, так і від'ємною, а вектор $\vec{a}^\tau$ лежить на дотичній осі τ, то вектор $\vec{a}^\tau$ проектується на вісь τ у дійсну (натуральну) величину зі знаком «плюс» чи «мінус»:

$$a_\tau = \pm a^\tau, \tag{12.26}$$

а ***модуль дотичного (тангенціального) прискорення*** дорівнює абсолютному значенню проекції цього прискорення на вісь τ:

$$a^\tau = |a_\tau| = \left|\frac{dv_\tau}{dt}\right| = |\dot{v}_\tau| \tag{12.27,а}$$

або

$$a^\tau = |a_\tau| = \left|\frac{d^2s}{dt^2}\right| = |\ddot{s}|. \tag{12.27,б}$$

Якщо ж у вираз (12.27,а) підставити встановлюване формулою (11.19) значення $v_\tau = \pm v$, то отримаємо ще одну формулу для знаходження модуля a^τ дотичного (тангенціального) прискорення точки у вигляді

$$a^\tau = \left|\frac{dv}{dt}\right|, \tag{12.28}$$

де v – модуль швидкості точки.

При цьому, якщо в певний момент часу похідна $\dfrac{dv}{dt} > 0$, то це є свідченням того, що в цю мить величина (модуль) швидкості зростає та, отже, точка рухається *прискорено*; якщо ж похідна $\dfrac{dv}{dt} < 0$, то величина (модуль) швидкості зменшується й точка рухається *сповільнено*. Напрямок руху точки по траєкторії в такому разі встановлюють за якими-небудь іншими легітимними міркуваннями, наприклад, аналізуючи знак похідної $\dfrac{ds}{dt}$ (див. рис. 11.13 та відповідні пояснення).

Маючи нормальне $\vec{a}^n$ і дотичне (тангенціальне) $\vec{a}^\tau$ прискорення точки, знайдемо її повне прискорення $\vec{a}$, яке за формулою (12.22) дорівнює векторній сумі *перпендикулярних* між собою компонент $\vec{a}^n$ та $\vec{a}^\tau$. Тоді *графічно* величину і напрям вектора $\vec{a}$ визначає *діагональ прямокутника*, побудованого на векторах $\vec{a}^\tau$ і $\vec{a}^n$ як на сторонах (див. рис. 12.16 і 12.17). *Аналітично* модуль a повного прискорення визначається за теоремою Піфагора

$$a = \sqrt{\left(a^n\right)^2 + \left(a^\tau\right)^2}, \qquad \textbf{(12.29,а)}$$

а напрям вектора $\vec{a}$ – кутом μ, утвореним векторами $\vec{a}$ й $\vec{a}^n$, тангенс якого (див. рис. 12.16 і 12.17)

$$tg\mu = \frac{a^\tau}{a^n}. \qquad \textbf{(12.30)}$$

Підставляючи у формулу (12.29,а) визначувані залежностями (12.24) та (12.25,а) значення a^n і a^τ, дістанемо

$$a = \sqrt{\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{dv_\tau}{dt}\right)^2} = \sqrt{\frac{v^4}{\rho^2} + \left(\frac{dv_\tau}{dt}\right)^2}. \qquad \textbf{(12.29,б)}$$

> Оскільки формули (12.17,б) і (12.29,б) визначають одну й ту ж кінематичну характеристику – модуль повного прискорення точки, то, певна річ, ці формули є *абсолютно тотожними.*

> Кут μ встановлює *положення вектора* $\vec{a}$ ***відносно головної нормальної осі*** n рухомого тригранника.

Таким чином, залежності (12.20) ÷ (12.30) однозначно встановлюють усі параметри векторів $\vec{a}^n$ нормального, $\vec{a}^\tau$ дотичного (тангенціального) та $\vec{a}$ повного прискорень точки у загальному випадкові її руху.

Для подальших міркувань і висновків зауважимо, що:

1) за визначенням похідної

$$\frac{d\,v_\tau}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_\tau}{\Delta t},$$

де $\Delta v_\tau = (v_{\tau 1} - v_\tau)$ – приріст проекції на дотичну вісь τ вектора $\vec{v}$ швидкості за проміжок часу $\Delta t = (t_1 - t)$; $v_{\tau 1}$ та v_τ – проекції на вісь τ вектора $\vec{v}$ у моменти часу t_1 і t відповідно;

2) оскільки Δt – завжди тільки додатна величина, то знак похідної $\frac{d\,v_\tau}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_\tau}{\Delta t}$ залежить лише від *знака* приросту Δv_τ;

3) якщо $v_{\tau 1} > v_\tau$, то в цьому разі за проміжок часу Δt приріст $\Delta v_\tau > 0$, тобто є *додатним*; якщо ж $v_{\tau 1} < v_\tau$, то в цьому разі за проміжок часу Δt приріст $\Delta v_\tau < 0$, тобто є *від'ємним.*

Важливо не плутати розглянуте поняття приросту Δv_τ із поняттям приросту величини (або модуля) швидкості $\Delta v = (v_1 - v)$, де v_1 та v – модулі швидкості точки у моменти часу t_1 і t відповідно. З'ясуємо різницю між поняттями Δv_τ та Δv.

Спочатку розглянемо два випадки криволінійного **прискореного** руху точки протягом проміжку часу Δt: рух точки у напрямку зростання дугової координати s (рис. 12.14, а), коли приріст $\Delta s > 0$ (див. також рис. 10.8, а) та рух точки у зворотному напрямкові (рис. 12.14, б), коли приріст $\Delta s < 0$ (див. також рис. 10.8, б). Нехай в обох випадках у момент часу t у положенні M модуль $v = 3{,}9\,{}^{м}\!/_{сек}$, а у момент часу $t_1 = t + \Delta t$ у положенні M_1 – $v_1 = 4\,{}^{м}\!/_{сек}$.

Тоді в обох випадках за проміжок часу Δt приріст модуля швидкості

$$\Delta v = (v_1 - v) = 4 - 3{,}9 = 0{,}1 \left({}^{м}\!/_{сек} \right) > 0,$$

що і є ознакою ***прискореного*** руху точки за вказаний проміжок часу (див. у § 10.1 визначення прискореного руху та рис. 10.3).

а) приріст $\Delta s > 0$ б) приріст $\Delta s < 0$

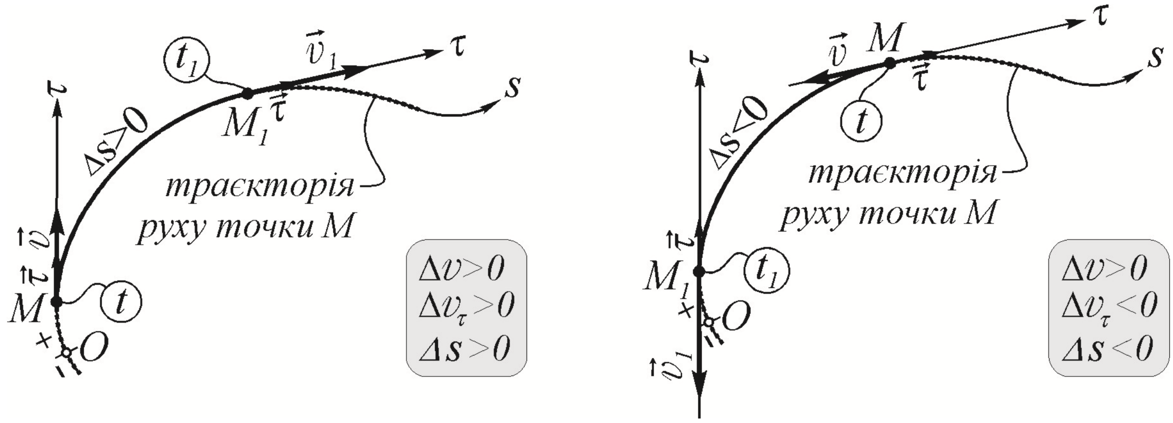


Рис. 12.14. Прискорений криволінійний рух точки M

З'ясуємо тепер для цього випадку руху значення приросту Δv_τ.

На рисунку 12.14, а:

$$v_\tau = +v = 3{,}9 \; {}^{м}\!/_{сек},$$

$$v_{\tau 1} = +v_1 = 4 \; {}^{м}\!/_{сек}$$

та

$$\Delta v_\tau = v_{\tau 1} - v_\tau = 4 - 3{,}9 = +0{,}1 \left({}^{м}\!/_{сек} \right) > 0.$$

На рисунку 12.14, б:

$$v_\tau = -v = -3{,}9 \; {}^{м}\!/_{сек},$$

$$v_{\tau 1} = -v_1 = -4 \; {}^{м}\!/_{сек}$$

та

$$\Delta v_\tau = v_{\tau 1} - v_\tau = -4 - (-3{,}9) = -4 + 3{,}9 = -0{,}1 \left({}^{м}\!/_{сек} \right) < 0.$$

Отже, в обох випадках прирости $\Delta v = 0{,}1 > 0$ і точка виконує **прискорений рух**, але прирости Δv_τ – різного знака; звернімо увагу та запам'ятаймо, що в кожному з двох випадків (окремо) **прирости** Δs і Δv_τ – **одного знака**.

Тепер розглянемо два випадки криволінійного **сповільненого** руху точки протягом проміжку часу Δt: рух точки у напрямку зростання дугової координати s (рис. 12.15, а), коли приріст $\Delta s > 0$ (див. також рис. 10.8, а) та рух точки у зворотному напрямкові (рис. 12.15, б), коли приріст $\Delta s < 0$ (див. також рис. 10.8, б). Нехай в обох випадках у момент часу t у положенні M модуль $v = 4\ {}^{м}\!/_{сек}$, а у момент часу $t_1 = t + \Delta t$ у положенні M_1 – $v_1 = 3{,}9\ {}^{м}\!/_{сек}$.

Тоді в обох випадках за проміжок часу Δt приріст модуля швидкості

$$\Delta v = (v_1 - v) = 3{,}9 - 4 = -0{,}1\ \left({}^{м}\!/_{сек}\right) < 0,$$

що є ознакою ***сповільненого*** руху точки за вказаний проміжок часу (див. у § 10.1 визначення сповільненого руху та рис. 10.3).

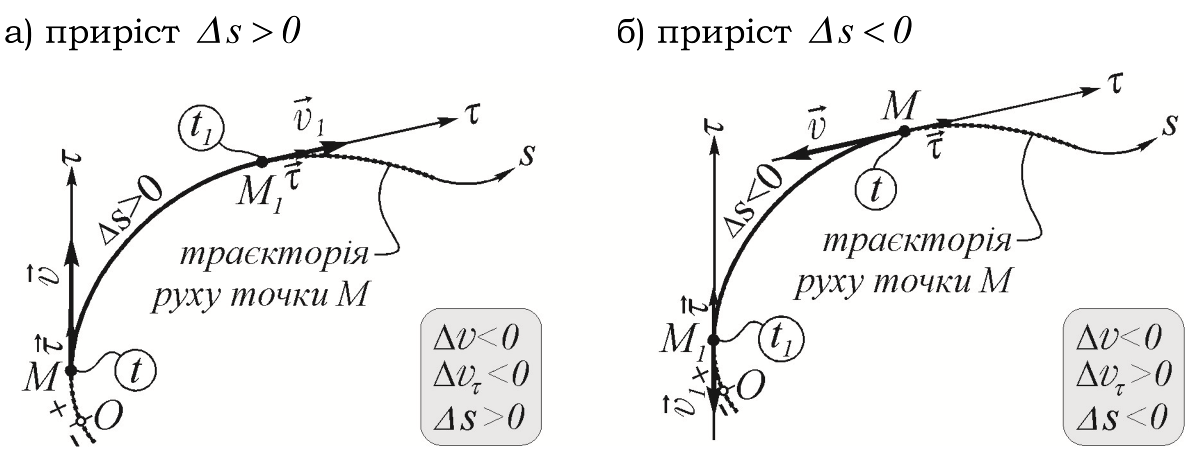


Рис. 12.15. Сповільнений криволінійний рух точки M

З'ясуємо для цього випадку руху значення приросту Δv_τ.

На рисунку 12.15, а:

$$v_\tau = +v = 4\ {}^{м}\!/_{сек},$$

$$v_{\tau 1} = +v_1 = 3{,}9\ {}^{м}\!/_{сек}$$

та

На рисунку 12.15, б:

$$v_\tau = -v = -4\ {}^{м}\!/_{сек},$$

$$v_{\tau 1} = -v_1 = -3{,}9\ {}^{м}\!/_{сек}$$

та

$\Delta v_\tau = v_{\tau 1} - v_\tau = 3{,}9 - 4 =$ $= -0{,}1 \left({}^{м}\!/_{сек} \right) < 0.$	$\Delta v_\tau = v_{\tau 1} - v_\tau = -3{,}9 - (-4) =$ $= -3{,}9 + 4 = +0{,}1 \left({}^{м}\!/_{сек} \right) > 0.$

Отже, в обох випадках прирости $\Delta v = -0{,}1 < 0$ і точка виконує **сповільнений рух**, але прирости Δv_τ – різного знака; зауважимо, що у кожному з двох випадків (окремо) **прирости** Δs і Δv_τ – **різного знака**.

Тепер розглянемо та проаналізуємо ***можливі варіанти*** руху точки (усього можливих варіантів буде ***шість***).

Нехай у певний розглядуваний момент часу t похідна

$$\frac{ds}{dt} > 0$$

(тобто в цю мить приріст $\Delta s > 0$, проекція $v_\tau = +v > 0$, напрямок вектора $\vec{v} = \vec{\tau} \cdot v$ швидкості точки збігається з напрямком дотичної осі τ і точка рухається у напрямку зростання дугової координати s – див. рис. 11.13, а).

1. Якщо у цей момент часу

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv_\tau}{dt} > 0,$$

то в цю мить: а) приріст $\Delta v_\tau > 0$; б) проекція $a_\tau = +a^\tau > 0$; в) напрямок вектора $\vec{a}^\tau = \vec{\tau} \cdot a^\tau$ дотичного (тангенціального) прискорення точки збігається з напрямком дотичної осі τ; г) вектори $\vec{a}^\tau$ та $\vec{v}$ мають однакові напрямки; ґ) *прирости* Δs і Δv_τ – *одного знака*; д) згідно з випадком, розглянутим та зображеним на рисунку 12.14, а, точка рухається *прискорено* у напрямку зростання дугової координати s; е) вектор $\vec{a}$ повного прискорення точки визначається діагоналлю прямокутника, побудованого на векторах $\vec{a}^\tau$ і $\vec{a}^n$ як на сторонах, та утворює з вектором $\vec{v}$ *гострий кут* Ω (рис. 12.16, а).

2. Якщо у цей момент часу

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv_\tau}{dt} < 0,$$

то в цю мить: а) приріст $\Delta v_\tau < 0$; б) проекція $a_\tau = -a^\tau < 0$; в) напрямок вектора $\vec{a}^\tau = -\vec{\tau} \cdot a^\tau$ дотичного (тангенціального) прискорення точки протилежний напрямку дотичної осі τ; г) вектори $\vec{a}^\tau$ та $\vec{v}$ мають протилежні напрямки; ґ) *прирости* Δs і Δv_τ *– різного знака*; д) згідно з випадком, розглянутим та зображеним на рисунку 12.15, а, точка рухається *сповільнено* у напрямку зростання дугової координати s; е) вектор $\vec{a}$ повного прискорення точки визначається діагоналлю прямокутника, побудованого на векторах $\vec{a}^\tau$ і $\vec{a}^n$ як на сторонах, та утворює з вектором $\vec{v}$ *тупий кут* Ω (рис. 12.16, б).

а) прискорений рух б) сповільнений рух

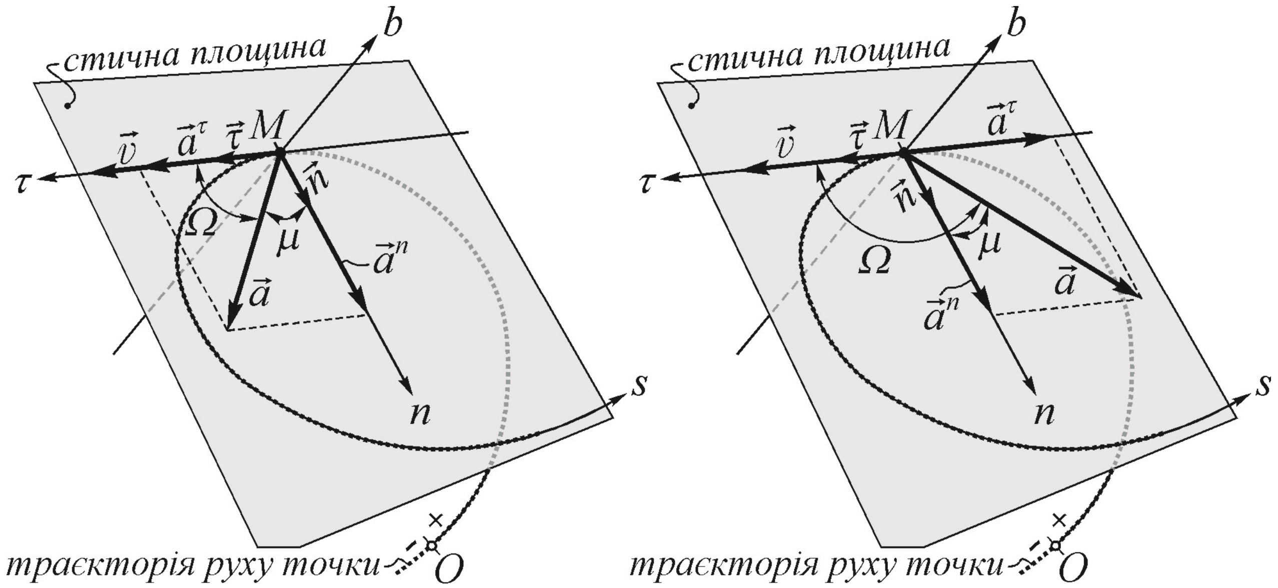


Рис. 12.16. Нерівномірний криволінійний рух точки M у напрямку зростання дугової координати s

Нехай тепер у певний розглядуваний момент часу t похідна

$$\frac{ds}{dt} < 0$$

(тобто в цю мить приріст $\Delta s < 0$, проекція $v_\tau = -v < 0$, напрямок вектора $\vec{v} = -\vec{\tau} \cdot v$ не збігається з напрямком дотичної осі τ і точка рухається в напрямку зменшення дугової координати s – див. рис. 11.13, б).

3. Якщо у цей момент часу

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv_\tau}{dt} > 0,$$

то в цю мить: а) приріст $\Delta v_\tau > 0$; б) проекція $a_\tau = +a^\tau > 0$; в) напрямок вектора $\vec{a}^\tau = \vec{\tau} \cdot a^\tau$ дотичного (тангенціального) прискорення точки збігається з напрямком дотичної осі τ; г) вектори $\vec{a}^\tau$ та $\vec{v}$ мають протилежні напрямки; ґ) *прирости* Δs і Δv_τ *– різного знака*; д) згідно з випадком, розглянутим та зображеним на рисунку 12.15, б, точка рухається *сповільнено* в бік зменшення дугової координати s; е) вектор $\vec{a}$ повного прискорення точки визначається діагоналлю прямокутника, побудованого на векторах $\vec{a}^\tau$ і $\vec{a}^n$ як на сторонах, та утворює з вектором $\vec{v}$ *тупий кут* Ω (рис. 12.17, а).

4. Якщо у цей момент часу

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv_\tau}{dt} < 0,$$

то в цю мить: а) приріст $\Delta v_\tau < 0$; б) проекція $a_\tau = -a^\tau < 0$; в) напрямок вектора $\vec{a}^\tau = -\vec{\tau} \cdot a^\tau$ дотичного (тангенціального) прискорення точки протилежний напрямку дотичної осі τ; г) вектори $\vec{a}^\tau$ та $\vec{v}$ мають однакові напрямки; ґ) *прирости* Δs

і Δv_τ – *одного знака*; д) згідно з випадком, розглянутим та зображеним на рисунку 12.14, б, точка рухається *прискорено* у напрямку зменшення дугової координати s; е) вектор $\vec{a}$ повного прискорення точки визначається діагоналлю прямокутника, побудованого на векторах $\vec{a}^\tau$ і $\vec{a}^n$ як на сторонах, та утворює з вектором $\vec{v}$ *гострий кут* Ω (рис. 12.17, б).

а) сповільнений рух б) прискорений рух

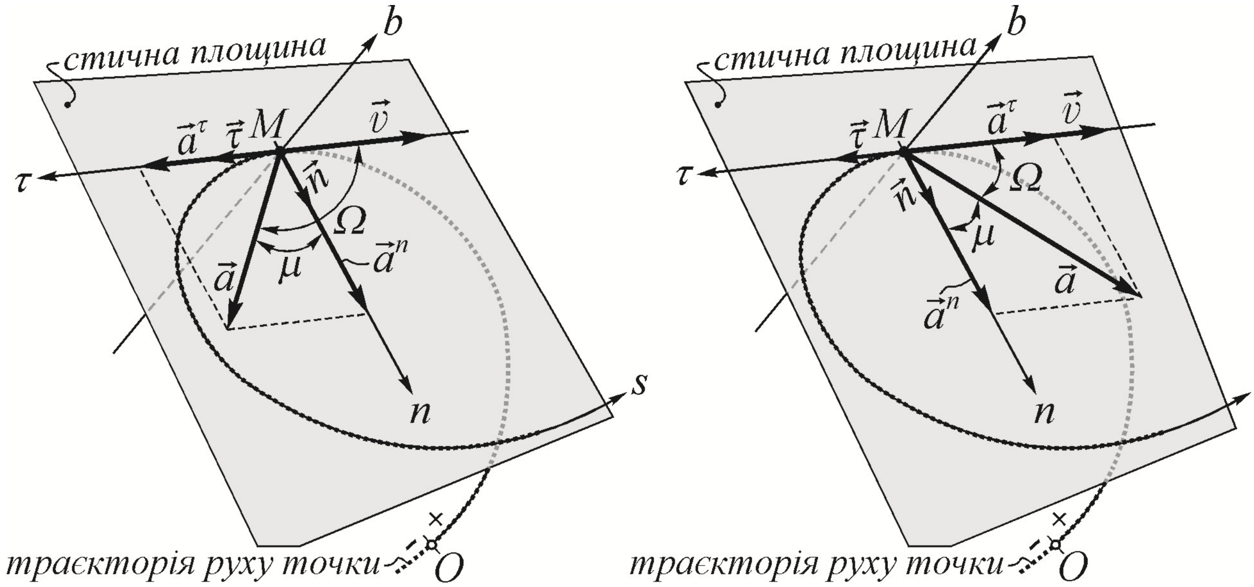


Рис. 12.17. Нерівномірний криволінійний рух точки M у напрямку зменшення дугової координати s

Розглянуті чотири варіанти та їх аналіз наочно свідчать, що *криволінійний* рух точки є ***прискореним***, якщо вектор $\vec{v}$ швидкості та вектор $\vec{a}^\tau$ дотичного (тангенціального) прискорення точки напрямлені в один бік, що стається у разі, коли *проекції* швидкості v_τ та дотичного (тангенціального) прискорення a_τ – *одного знака* (див. рис. 12.16, а та 12.17, б). ***Сповільненим*** зазначений рух є у разі, коли вектори швидкості $\vec{v}$ і дотичного (тангенціального) прискорення $\vec{a}^{\tau}$ напрямлені в різні боки, тобто коли *проекції* v_{τ} й a_{τ} *мають різні знаки* (див. рис. 12.16, б та 12.17, а).

Оскільки математично проекції v_{τ} та a_{τ} визначаються відповідними похідними $\dot{s}$ і $\ddot{s}$, то викладене у попередньому абзаці дозволяє сформулювати **висновок**:

> ⓘ якщо у разі криволінійного руху точки вздовж дугової осі s у певний розглядуваний момент часу перша $\dfrac{ds}{dt}$ та друга $\dfrac{d^2s}{dt^2}$ похідні за часом від дугової координати s одного знака, то рух точки в цю мить прискорений, якщо різного – сповільнений.

Розглянемо тепер ситуації, коли похідна

$$\frac{d^2s}{dt^2}=0 \quad \text{або, що те саме,} \quad \frac{dv_{\tau}}{dt}=0.$$

5. Якщо при русі точки *протягом* певного *проміжку часу* Δt похідна $\dfrac{dv_{\tau}}{dt}$ ***дорівнює нулеві***, то в такому випадку: а) проекція $a_{\tau}=0$; б) проекція v_{τ} є величиною сталою; в) оскільки за формулою (11.20) $v=|v_{\tau}|$, то *сталим* є і модуль v швидкості; г) згідно з визначенням рівномірного руху (див. § 10.1) точка протягом усього розглядуваного проміжку часу рухається *рівномірно*; ґ) напрямок руху визначає знак похідної $\dfrac{ds}{dt}$ (див. рис. 11.13 і відповідні пояснення); д) модуль $a^{\tau}=0$ та, певно ж, вектор $\vec{a}^{\tau}=0$; е) вектор $\vec{a}$ повного прискорення точки визначається тільки нормальною складовою $\vec{a}^{n}$ (тобто, $\vec{a}\equiv\vec{a}^{n}$) і утворює з вектором $\vec{v}$ *прямий кут* Ω (рис. 12.18).

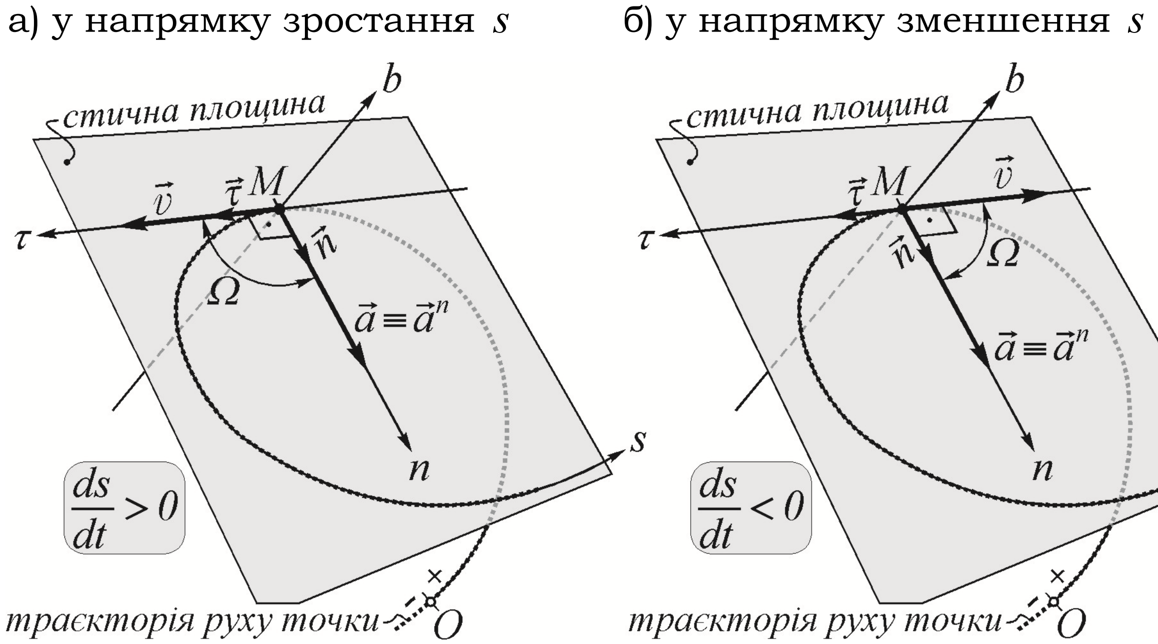


Рис. 12.18. Рівномірний криволінійний рух точки M

6. Якщо при *нерівномірному русі* точки похідна $\dfrac{dv_\tau}{dt}$ ***обертається в нуль*** тільки *у* певний конкретний *момент часу* t, то відповідно до теорії диференціального числення в цю мить функція v_τ досягає екстремуму. З точки зору теоретичної механіки це означає, що модуль v швидкості руху точки набуває максимального чи мінімального значення; неважко зрозуміти, що у момент *досягнення швидкістю* свого *максимального значення* відбувається *зміна характеру* криволінійного руху точки *з прискореного на сповільнений*; якщо ж *швидкість набуває мінімального значення*, то в цю мить рух точки *змінюється зі сповільненого на прискорений.*

Зміна характеру руху зі сповільненого на прискорений відбувається й у той момент часу (або у ті моменти часу), коли при неперервному русі *швидкість точки* набуває найменшого з можливих значень – стає *рівною нулю*; зауважимо, що у цю мить похідна $\dfrac{dv_\tau}{dt} \neq 0$.

Якщо порівняти *формули* (12.21), (12.25) ÷ (12.27) і *кінематичний аналіз* їх та можливих варіантів криволінійного руху точки з відповідними *формулами* (12.10) ÷ (12.13) й *аналізом* їх і можливих варіантів прямолінійного руху точки уздовж осі Ox, (див. § 12.3), то видно, що вони (формули та аналізи) *ідентичні*. Різниця полягає в тому, що замість вектора $\vec{a}$ й модуля a повного прискорення, проекцій a_x і v_x, одиничного вектора $\vec{i}$ та декартової координати x у формулах (12.10) ÷ (12.13) формули (12.21), (12.25) ÷ (12.27) містять вектор $\vec{a}^{\tau}$ і модуль a^{τ} дотичного (тангенціального) прискорення, проекції a_{τ} й v_{τ}, одиничний вектор $\vec{\tau}$ дотичної осі τ та дугову координату s відповідно. Важливо розуміти, що хоч *механічний зміст** відповідних кінематичних параметрів в обох указаних випадках також *ідентичний*, але у разі прямолінійного руху формули (12.10) ÷ (12.13) визначають *повне прискорення* руху точки, а формули (12.21), (12.25) ÷ (12.27) – лише *одну з компонент повного прискорення*.

Звернімо увагу на те, що у формулі (12.19) кут Ω_{τ} – це кут між вектором $\vec{a}$ повного прискорення точки і дотичною віссю τ рухомого тригранника (див. рис. 12.13). На відміну від цього кута, кут Ω, уведений до розгляду на рисунках 12.16 ÷ 12.18, визначає *кут між векторами* $\vec{v}$ швидкості й $\vec{a}$ повного прискорення точки. З очевидного аналізу можливих варіантів руху точки, наведених на рисунках 12.16 ÷ 12.18, зрозуміло, що

> ⓘ ***кут*** Ω між додатними напрямками векторів швидкості $\vec{v}$ і повного прискорення $\vec{a}$ точки у разі ***прискореного руху*** – ***гострий***, у разі ***сповільненого руху*** – ***тупий***, а у разі ***рівномірного руху*** – ***прямий***.

---

* Словосполучення «*механічний зміст*» означає, що йдеться про значення досліджуваного параметра ***з точки зору механіки***.

Кут Ω – це *кінематична характеристика*, що належить до категорії *основних* і дає можливість установлювати характер руху точки завжди незалежно від того, в які способи й у яких розділах механіки для розглядуваної точки знайдено вектори швидкості $\vec{v}$ і повного прискорення $\vec{a}$ та кут Ω (див., наприклад, далі формулу (12.34)).

У §§ 12.6 і 12.7 викладено *два способи* визначення вектора $\vec{a}$ прискорення руху точки: у § 12.6 – *через* його *проекції* a_n та a_τ на осі n і τ рухомого тригранника (див. рис. 12.13), а у § 12.7 – через його *складові* (або *компоненти*) $\vec{a}^n$ та $\vec{a}^\tau$ (див. рис. 12.16 ÷ 12.18). Досліджуючи рухи точок, можна користуватися будь-яким із цих способів, оскільки отримувані «результати-висновки» будуть абсолютно ідентичними. Але, як уже зазначалося вище, практично завжди застосовують спосіб, викладений у § 12.7, – через складові $\vec{a}^n$ й $\vec{a}^\tau$.

Приклад 12.3. За умовою прикладу 10.3 (див. § 10.2) встановити характер руху точки M протягом перших трьох секунд її руху.

Розв'язування. У прикладі 10.3 за законом руху

$$s = 4 - 2 \cdot sin\frac{\pi t}{2}(м)$$

встановлені положення точки на траєкторії у моменти часу $t_0 = 0$, $t_1 = 1сек$, $t_2 = 2сек$ і $t_3 = 3сек$ (див. рис. 10.3п), а у прикладі 11.2 (див. § 11.4) знайдено проекцію

$$v_\tau = -\pi \cdot cos\frac{\pi t}{2}\left(м/_{сек}\right)$$

та значення швидкості руху точки M у вказані моменти часу (див. рис. 11.2п).

Знайдемо повне прискорення $\vec{a}$ точки, яке за формулою (12.22) дорівнює векторній сумі нормального $\vec{a}^n$ й дотичного (тангенціального) $\vec{a}^\tau$ прискорень цієї точки, тобто

$$\vec{a} = \vec{a}^{n} + \vec{a}^{\tau} .$$

Оскільки крива лінія, що визначає траєкторію руху точки, задана *довільно*, то у цьому разі нормальне прискорення, модуль котрого згідно з формулою (12.24) $a^{n} = \frac{v^{2}}{\rho}$, *знайти неможливо* через невизначеність значення радіуса ρ кривини траєкторії.

Знайдемо дотичне (тангенціальне) прискорення точки. Відповідно до формул (12.21,б) та (12.27) вектор і модуль цього прискорення визначають залежності

$$\vec{a}^{\tau} = \vec{\tau} \cdot a_{\tau} \quad \text{та} \quad a^{\tau} = \left| a_{\tau} \right| ,$$

де a_{τ} – проекція на дотичну вісь τ вектора $\vec{a}^{\tau}$, значення якої згідно з формулою (12.25,а)

$$a_{\tau} = \dot{v}_{\tau} .$$

Тоді, урахувавши наведене вище значення v_{τ}, у розглядуваному прикладі

$$a_{\tau} = \dot{v}_{\tau} = \frac{d}{dt}\left(-\pi \cdot cos \frac{\pi\, t}{2} \right).$$

Диференціюючи, врахуємо, що відповідно до теорії диференціального числення сталий множник (у цьому разі $-\pi$) при змінній величині можна виносити за знак похідної, а похідна $\left(cos U \right)' = -sin U \cdot U'$; тоді у нашому разі

$$\frac{d}{dt}\left(cos \frac{\pi\, t}{2} \right) = -sin \frac{\pi\, t}{2} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi\, t}{2} \right) = -sin \frac{\pi\, t}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{d}{dt}(t) =$$

$$= -sin \frac{\pi\, t}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 = -\frac{\pi}{2} \cdot sin \frac{\pi\, t}{2} .$$

Отже,

$$a_\tau = \frac{d}{dt}\left(-\pi \cdot cos\frac{\pi t}{2}\right) = -\pi \cdot \frac{d}{dt}\left(cos\frac{\pi t}{2}\right) =$$

$$= -\pi \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \cdot sin\frac{\pi t}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2} \cdot sin\frac{\pi t}{2}\left(м/сек^2\right).$$

Функціональна залежність $a_\tau = \frac{\pi^2}{2} \cdot sin\frac{\pi t}{2}$ визначає проекцію a_τ для будь-якого та для кожного моменту часу.

Оскільки $a_\tau \neq 0$, то у розглядуваному прикладі точка виконує *нерівномірний рух.*

При $t_0 = 0$ (тобто у початковому положенні)

$$a_{\tau 0} = \frac{dv_\tau}{dt}_{|t_0=0} = \frac{\pi^2}{2} \cdot sin\frac{\pi \cdot t_0}{2} = \frac{\pi^2}{2} \cdot sin\frac{\pi \cdot 0}{2} = \frac{\pi^2}{2} \cdot sin 0 = \frac{\pi^2}{2} \cdot 0 = 0,$$

$$a_0^\tau = 0 \text{ та, звісно, } \vec{a}_0^\tau = 0.$$

Оскільки похідна $\frac{dv_\tau}{dt}_{|t_0=0} = 0$, то це означає, що в момент часу t_0 модуль швидкості *має екстремальне значення*; з елементарного математичного аналізу тригонометричного виразу $v_\tau = -\pi \cdot cos\frac{\pi t}{2}$ зрозуміло*, що вказане екстремальне значення є *максимумом*, тобто $v_{max} = v_0 = \pi \frac{м}{сек}$ (див. приклад 11.2).

---

* У цьому разі зазначений аналіз полягає у тому, що у функції $v_\tau = -\pi \cdot cos\frac{\pi t}{2}$ множник $cos\frac{\pi t}{2}$ у момент часу $t_0 = 0$ набуває свого максимально можливого значення $cos\frac{\pi \cdot 0}{2} = 1$ і при будь-якому нескінченно малому збільшенні параметра t від розглядуваного значення $t_0 = 0$ функція $v_\tau = f(t)$ буде тільки зменшуватися.

При $t_1 = 1\ сек$

$$a_{\tau 1} = \frac{dv_\tau}{dt}\Big|_{t_1=1сек} = \frac{\pi^2}{2}\cdot sin\frac{\pi\cdot t_1}{2} = \frac{\pi^2}{2}\cdot sin\frac{\pi\cdot 1}{2} = \frac{\pi^2}{2}\cdot 1 = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{м}{сек^2}\right)$$

та

$$a_1^\tau = |a_{\tau 1}| = \left|\frac{\pi^2}{2}\right| = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{м}{сек^2}\right).$$

Оскільки похідна $\frac{dv_\tau}{dt}\Big|_{t_1=1сек} = \frac{\pi^2}{2} > 0$, то цей факт свідчить, що напрямки вектора $\vec{a}_1^\tau = \vec{\tau}\cdot a_{\tau 1} = \frac{\pi^2}{2}\cdot\vec{\tau}$ і дотичної осі τ у цю мить однакові, що й зображуємо на рисунку 12.3п.1, основою та всіма іншими елементами якого є рисунок 11.2п прикладу 11.2.

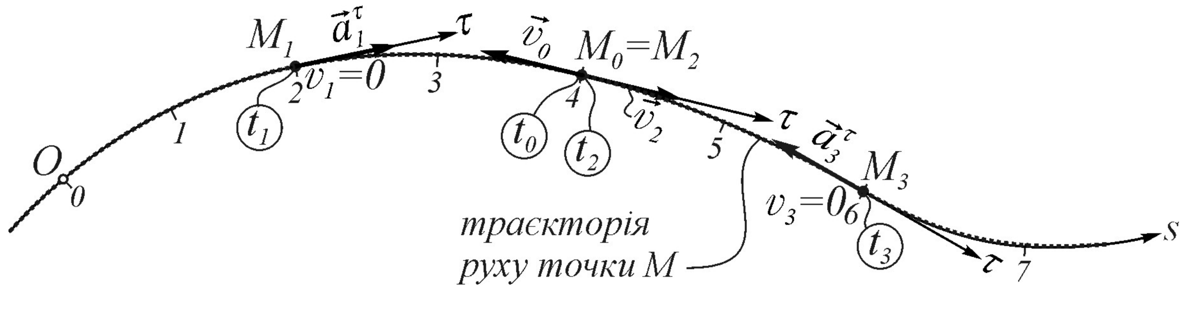


Рис. 12.3п.1

Установлені у прикладі 11.2 кінематичні характеристики $v_0 = \pi\frac{м}{сек}$, $\vec{v}_0 = -\pi\cdot\vec{\tau}$ і $v_1 = 0$ свідчать, що протягом часу $]t_0, t_1[$: а) модуль швидкості неперервно *зменшується*; б) вектор швидкості напрямлений протилежно до додатного напрямку дугової осі s. Знайдені ж вище значення $a_0^\tau = 0$,

$a_1^\tau = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{м}{сек^2}\right)$ і $\vec{a}_1^\tau = \frac{\pi^2}{2}\cdot\vec{\tau}$ свідчать, що протягом того ж проміжку часу модуль дотичного (тангенціального) прискорення неперервно *збільшується*, а вектор дотичного (тангенціального) прискорення напрямлений у додатному напрямку осі s. Таким чином, протягом часу $\left]t_0, t_1\right[$ розглядувана точка виконує *нерівносповільнений рух*.

Здобудемо математичне підтвердження отриманого у попередньому абзаці висновку. Для цього встановимо значення похідних $\dot{s}$ і $\ddot{s}$ для моменту часу, наприклад, $t = 0{,}5\,сек$, який належить проміжку $\left]t_0, t_1\right[$, розуміючи, що згідно з формулами (11.18) та (12.25,б) $\dot{s} = v_\tau$ і $\ddot{s} = a_\tau$ відповідно; тоді

$$\dot{s}_{(0,5\,сек)} = v_{\tau(0,5\,сек)} = -\pi\cdot\cos\frac{\pi\cdot 0{,}5}{2} = -\pi\cdot\cos\frac{\pi}{4} = -\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} < 0,$$

$$\ddot{s}_{(0,5\,сек)} = a_{\tau(0,5\,сек)} = \frac{\pi^2}{2}\cdot\sin\frac{\pi\cdot 0{,}5}{2} = \frac{\pi^2}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{4} > 0.$$

Оскільки встановлені перша $\dot{s}_{(0,5\,сек)}$ та друга $\ddot{s}_{(0,5\,сек)}$ похідні – *різного знака*, то в момент часу $0{,}5\,сек$ точка рухається *сповільнено*, що, природно, збігається зі встановленим вище.

> Звісно, що у реальній практичній діяльності (навчальній, науковій чи виробничій) немає особливої потреби отримувати одні й ті ж висновки декількома способами.

Зобразимо точку в момент часу $0{,}5\,сек$ та вектори її швидкості $\vec{v}_{(0,5\,сек)} = -\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\vec{\tau}$ і дотичного (тангенціального) прискорення $\vec{a}^\tau_{(0,5\,сек)} = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}\cdot\vec{\tau}$ на рисунку 12.3п.2, який є допоміжним збільшеним фрагментом рисунка 12.3п.1.

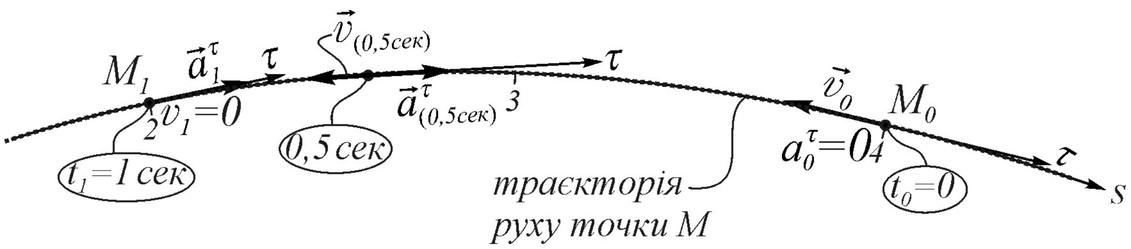


Рис. 12.3п.2

При $t_2 = 2\,сек$

$$a_{\tau 2} = \frac{dv_\tau}{dt}\Big|_{t_2=2сек} = \frac{\pi^2}{2}\cdot sin\frac{\pi\cdot t_2}{2} = \frac{\pi^2}{2}\cdot sin\frac{\pi\cdot 2}{2} = \frac{\pi^2}{2}\cdot sin\,\pi = \frac{\pi^2}{2}\cdot 0 = 0,$$

$$a_2^{\tau} = 0 \;\text{ та }\; \vec{a}_2^{\tau} = 0.$$

Знову-таки, оскільки похідна $\frac{dv_\tau}{dt}\Big|_{t_2=2сек} = 0$, то це означає, що в момент часу t_2 модуль швидкості *набуває екстремального значення*, маючи свій ***локальний*** *максимум* (див. відповідні міркування у прикладі 11.2 та рис. 12.3п.1).

Для визначення характеру руху точки за часовий проміжок $]t_1, t_2[$ встановимо знаки похідних $\dot{s}$ і $\ddot{s}$ для моменту часу, наприклад $t = 1,5\,сек$, який належить указаному проміжку:

$$\dot{s}_{(1,5сек)} = -\pi\cdot cos\frac{\pi\cdot 1,5}{2} = -\pi\cdot cos\frac{3\pi}{4} = -\pi\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} > 0,$$

$$\ddot{s}_{(1,5сек)} = \frac{\pi^2}{2}\cdot sin\frac{\pi\cdot 1,5}{2} = \frac{\pi^2}{2}\cdot sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{4} > 0.$$

Установлені *однакові знаки* першої $\dot{s}_{(1,5сек)}$ та другої $\ddot{s}_{(1,5сек)}$ похідних є свідченням *прискореного* руху точки в момент часу $1,5\,сек$; неважко бачити, що зазначене співвідношення між знаками похідних $\dot{s}$ і $\ddot{s}$ виконується на всьому проміжку $]t_1, t_2[$ і, отже, від положення M_1 до положення M_2 точка рухається прискорено, маючи однакові напрямки векторів $\vec{v}$ швидкості та $\vec{a}^{\tau}$ дотичного (тангенціального) прискорень (див. рис. 12.3п.3, який також є допоміжним збільшеним фрагментом рисунка 12.3п.1).

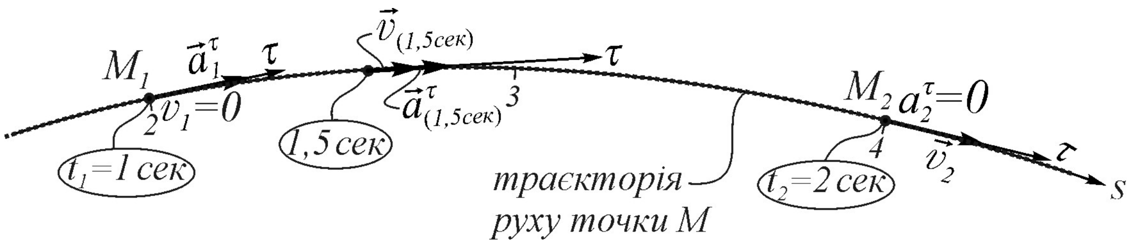


Рис. 12.3п.3

При $t_3 = 3\,сек$

$$a_{\tau 3} = \frac{dv_\tau}{dt}\Big|_{t_3=3сек} = \frac{\pi^2}{2}\cdot sin\frac{\pi\cdot t_3}{2} = \frac{\pi^2}{2}\cdot sin\frac{\pi\cdot 3}{2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{2}\cdot(-1) = -\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{м}{сек^2}\right)$$

та

$$a_3^{\tau} = |a_{\tau 3}| = \left|-\frac{\pi^2}{2}\right| = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{м}{сек^2}\right).$$

Оскільки похідна $\frac{dv_\tau}{dt}\Big|_{t_3=3сек} = -\frac{\pi^2}{2} < 0$, то цей факт свідчить, що вектор $\vec{a}_3^{\tau} = \vec{\tau}\cdot a_{\tau 3} = -\frac{\pi^2}{2}\cdot\vec{\tau}$ і дотична вісь τ у цю мить мають протилежні напрямки. Зображуємо вектор $\vec{a}_3^{\tau}$ на рисунку 12.3п.1 та робимо висновок (без викладення очевидного доведення), що за проміжок часу $]t_2, t_3[$ точка M знову, як і протягом часу $]t_0, t_1[$, виконує сповільнений рух, але у напрямку зростання дугової координати s.

Таким чином, уся «історія руху» точки M визначена.

Звичайно, що всі отримані тут значення та їх аналіз повністю збігаються з розв'язками-результатами прикладів 10.3 і 11.2.

Механічний рух точки, розглянутий і визначений у прикладах 10.3, 11.2 і 12.3, має *самостійне важливе значення* у техніці та в інших сферах діяльності людства. ***Характерними властивостями*** цього руху є те, що точка M неперервно *рухається* по своїй траєкторії *навколо положення* M_0 (яке визначає дугова координата $s_0 = 4\,м$ і яке називають ***центром коливань***); при цьому *періодично змінюються*:

1) за законом $s = 4 - 2 \cdot sin\dfrac{\pi t}{2}$ – *дугова координата* s, що визначає положення точки на траєкторії, набуваючи всіх значень проміжку $[s_{min} = 2\,м;\; s_{max} = 6\,м]$; тобто точка M послідовно «відхиляється» від положення M_0 в одному та протилежному до нього напрямку на однакову максимальну величину відхилення[*] (див. рис. 10.3п);

2) за законом $v_\tau = -\pi \cdot cos\dfrac{\pi t}{2}$ – *проекція* v_τ вектора $\vec{v}$ швидкості точки на дотичну вісь τ, набуваючи всіх значень проміжку $\left[v_{\tau\, min} = -\pi\dfrac{м}{сек};\; v_{\tau\, max} = \pi\dfrac{м}{сек}\right]$;

[*] Безсумнівно, у прикладах 10.3, 11.2 і 12.3 *максимальна величина відхилення* точки M від положення M_0 складає $2\,м$. У теорії коливань максимальне відхилення точки від цента коливань називають ***амплітудою коливань точки***.

3) за законом $a_\tau = \dfrac{\pi^2}{2} \cdot sin\dfrac{\pi t}{2}$ – *проекція* a_τ вектора $\vec{a}^\tau$ прискорення точки на дотичну вісь τ, набуваючи всіх значень проміжку $\left[a_{\tau\, min} = -\dfrac{\pi^2}{2}\left({}^{м}\!/_{сек^2}\right);\ a_{\tau\, max} = \dfrac{\pi^2}{2}\left({}^{м}\!/_{сек^2}\right)\right]$.

ⓘ Рух точки, що має вказані характерні властивості, називається *механічним гармонічним* ***коливальним рухом*** *точки.*

Докладно та досить усебічно ***загальну теорію коливального руху точки*** розглянуто у подальших темах 19 ÷ 21 курсу теоретичної механіки, котрий викладає автор. Зараз, спираючись на розв'язки прикладів 10.3, 11.2 і 12.3, з'ясуємо лише деякі кінематичні особливості такого руху. Для цього за відповідними законами будуємо *графіки* руху, проекцій v_τ і a_τ *механічних гармонічних коливань точки* (рис. 12.19), проаналізувавши які, встановлюємо:

- модуль дотичного (тангенціального) прискорення, котрий визначає формула (12.27) $a^\tau = |a_\tau|$, пропорційний відхиленню точки від середнього положення M_0;
- максимальне значення модуля $a^\tau_{max} = \dfrac{\pi^2}{2}\left({}^{м}\!/_{сек^2}\right)$ відповідає екстремальним значенням $s_{min} = 2\,м$ і $s_{max} = 6\,м$ дугової координати (або крайнім положенням точки на траєкторії), а у середньому положенні модуль a^τ набуває нульових значень;
- модуль швидкості, який визначає формула (11.20) $v = |v_\tau|$, обернено пропорційний відхиленню точки від центра коливань;
- максимальне значення модуля $v_{max} = \pi\,{}^{м}\!/_{сек}$ відповідає середньому положенню точки, а у її крайніх положеннях на траєкторії модуль $v = 0$;

- при русі точки від центра коливань M_0 проекції v_τ й a_τ мають різні знаки, а при русі точки до центра коливань проекції v_τ та a_τ – одного знака;
- наближення точки до центра коливань відбувається прискорено, а віддалення від нього – сповільнено.

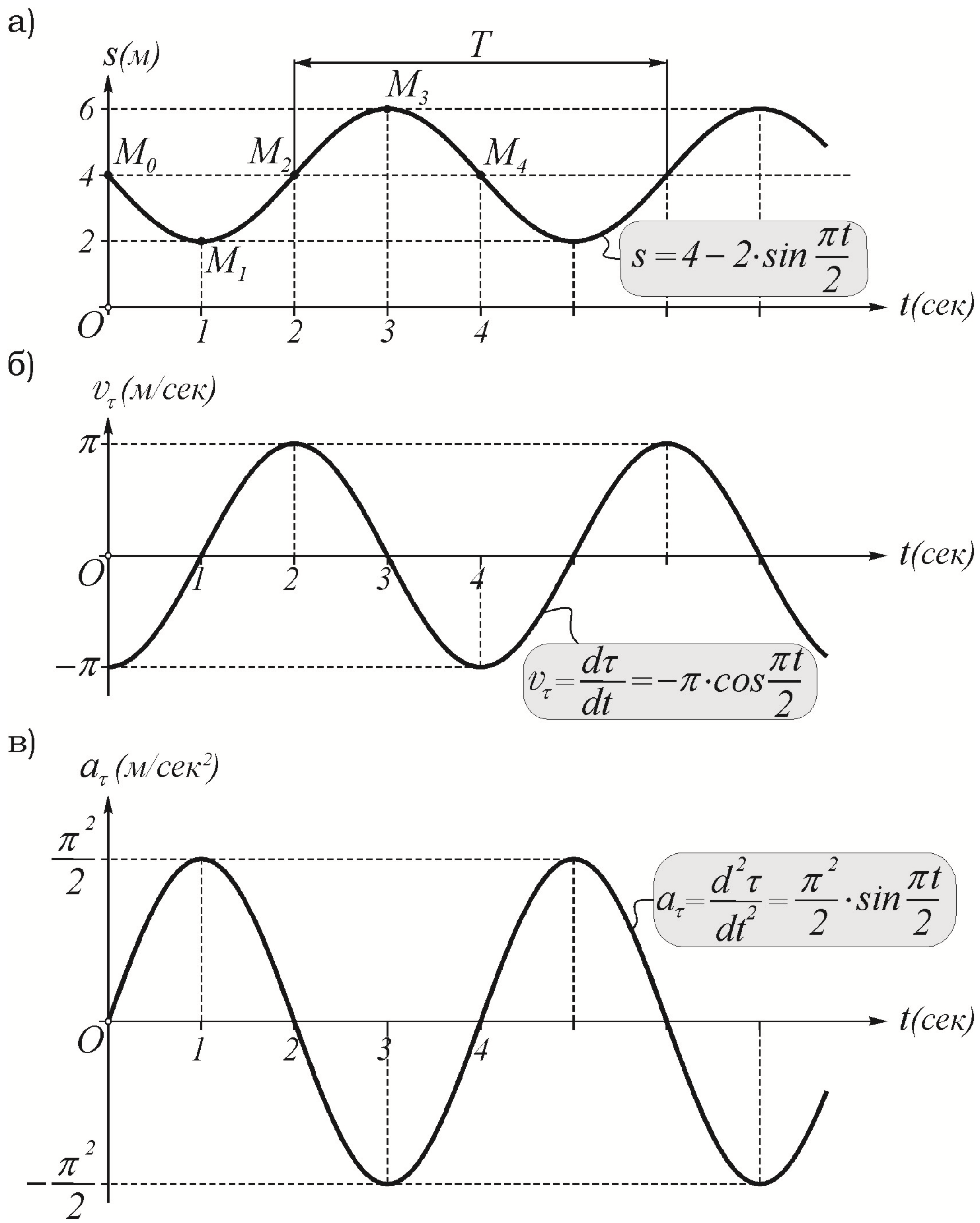


Рис. 12.19. Графіки гармонічного коливального руху точки

§ 12.8. МЕХАНІЧНІ ЗМІСТИ НОРМАЛЬНОГО Й ДОТИЧНОГО (ТАНГЕНЦІАЛЬНОГО) ПРИСКОРЕНЬ ТОЧКИ. КЛАСИФІКАЦІЯ РУХІВ ТОЧКИ ЗА ЇЇ ПРИСКОРЕННЯМИ

Спираючись на викладене у § 12.7, встановимо самостійні механічні значення* дотичного (тангенціального) та нормального прискорень точки.

А. «Оцінимо» дотичне (тангенціальне) прискорення точки, вектор $\vec{a}^{\tau}$ якого завжди лежить на дотичній осі τ (див. рис. 12.16 і 12.17), а згідно з формулою (12.28) модуль $a^{\tau} = \left|\dfrac{dv}{dt}\right|$. Урахувавши ж визначення похідної, властивості границі та те, що приріст часу – завжди тільки додатна величина ($\Delta t > 0$), дістанемо

$$a^{\tau} = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta v|}{\Delta t}, \tag{$*$}$$

де Δv – приріст модуля v швидкості руху точки за проміжок часу Δt.

Формула ($*$) однозначно свідчить, що числове значення модуля a^{τ} залежить від відношення $\dfrac{|\Delta v|}{\Delta t}$ або *від швидкості зміни в часі **модуля швидкості***, що зумовлює такі можливі варіанти (див. також у § 10.1 рис. 10.3 і відповідні визначення):

1) при *рівномірному русі* точки модуль її швидкості $v = const$, приріст $\Delta v = 0$; тоді згідно з формулою ($*$) модуль дотичного (тангенціального) прискорення точки *дорівнює нулю* ($a^{\tau} = 0$) чи дотичного (тангенціального) прискорення точки *не існує* (див. рис. 12.18 і пояснення до нього);

---

* Див. зноску на с. 133.

2) при *рівнозмінному русі* точки $v \neq const$, $\Delta v = const$ та, отже, відповідно до формули (∗) модуль дотичного (тангенціального) прискорення *є сталою величиною*

$$a^{\tau} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = const;$$

3) у випадку *нерівнозмінного руху* точки $v \neq const$, $\Delta v \neq const$ і за формулою (∗) модуль дотичного (тангенціального) прискорення – *змінна* за неперервним законом $a^{\tau} = \left|\frac{dv}{dt}\right| = f(t)$ *величина*, яка набуває послідовних значень, залежних від відношення $\frac{|\Delta v|}{\Delta t}$.

Зауваження 12.1. Якщо при нерівномірному русі модуль a^{τ} ***набуває нульового значення*** (один чи декілька разів), то це кожний раз стається тільки ***на одну мить*** і тільки *у моменти часу, коли модуль v швидкості* руху точки *набуває* своїх *екстремальних значень* (див. у прикладі 12.3 на рис. 12.3п.1 положення точки у моменти часу t_0 і t_2)*.

З виконаного аналізу зрозуміло, що чим більшим є числове значення модуля a^{τ}, тим швидших змін зазнає *модуль* вектора $\vec{v}$.

Таким чином,

ⓘ ***дотичне*** (***тангенціальне***) ***прискорення*** $\vec{a}^{\tau}$ *існує тільки при нерівномірному русі точки*; механічний зміст цього прискорення полягає в тому, що воно ***характеризує зміну*** в часі ***величини*** (або ***модуля***) ***вектора*** $\vec{v}$ швидкості точки.

* Указаний кінематичний стан притаманний далеко не кожному рухові точки.

Установлена на с. 145 у другому підпункті властивість рівнозмінного руху дозволяє, крім визначення такого руху, наведеного у § 10.1 на с. 18 ÷ 19, сформулювати ще одне:

🛈 ***рівнозмінний рух*** точки – це такий нерівномірний рух, при якому модуль (або величина) дотичного (тангенціального) прискорення з часом не змінюється, тобто

$$a^{\tau} = const .$$

Б. «Оцінимо» нормальне прискорення точки, вектор $\vec{a}^{\,n}$ котрого завжди лежить на головній нормальній осі n і напрямлений у бік угнутості траєкторії руху до центра її кривини (див. рис. 12.16 ÷ 12.18), а згідно з формулою (12.24) модуль $a^n = \dfrac{v^2}{\rho}$, де ρ – радіус кривини траєкторії руху точки, який *у загальному випадку **різний у кожній точці траєкторії***, тобто $\rho \neq const$.

З аналітичної геометрії відомо, що серед безлічі ліній (котрі у теоретичній механіці можуть бути траєкторією руху точки) є певний вид ліній, радіус кривини яких змінюється періодично за тим чи іншим законом (наприклад, синусоїда, циклоїда, еліпс тощо) й існує тільки *дві лінії*, радіус кривини котрих – стала величина:

а) ***коло***, радіус ρ кривини якого у будь-якій його точці дорівнює радіусу r кола (рис. 12.20, а);

б) ***пряма***, у котрої, природно, немає ніякої кривини, і тому, безумовно, радіус ρ кривини у будь-якій точці її дорівнює нескінченості: $\rho = \infty$ (рис. 12.20, б).

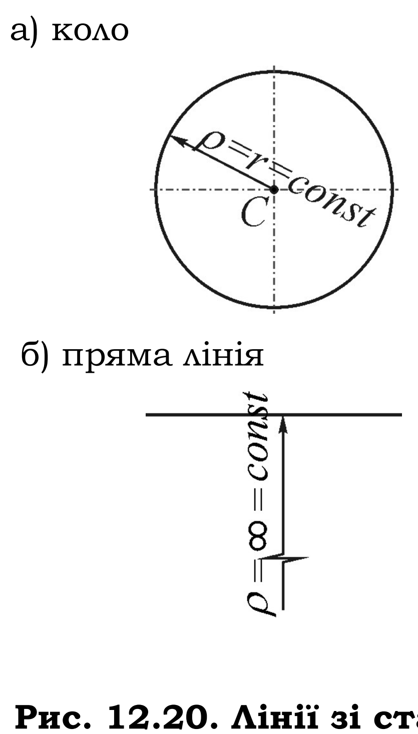


Рис. 12.20. Лінії зі сталими радіусами кривини

Для подальшого «оцінювання» свідомо розглянемо *рівномірний* криволінійний рух точки в певній площині, розуміючи, що у цьому разі $v = const$, $\vec{v} \neq const$, дотичного (тангенціального) прискорення точки не існує, а вектор $\vec{a}$ повного прискорення належить площині, в якій рухається розглядувана точка, та визначається тільки нормальною складовою $\vec{a}^{n}$ (див. рис. 12.18 і відповідні міркування). Нехай точка рухається з обраною умовно швидкістю $v = 3R\left(\frac{м}{сек}\right) = const$ (де R – довільна стала) із початкового положення A по траєкторії, що складається з чотирьох ділянок AB, BD, DE й EK однакової довжини, кожна з яких є дугою відповідного кола, радіуси яких, наприклад, $r_1 = R(м)$, $r_2 = 1{,}5R(м)$, $r_3 = 3R(м)$, $r_4 = 9R(м)$ (рис. 12.21).

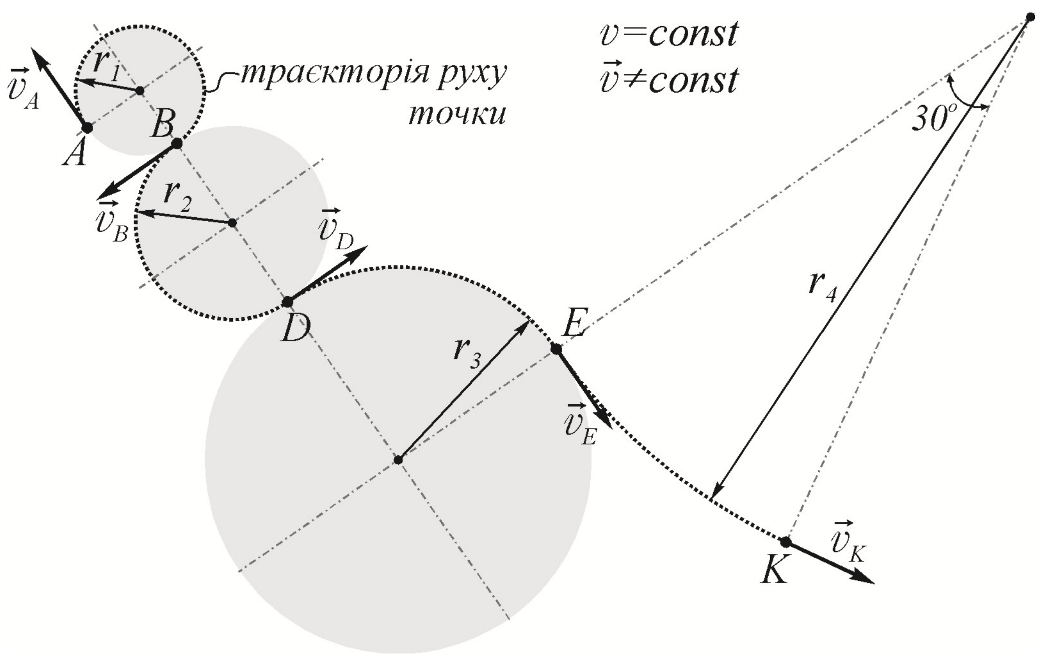


Рис. 12.21

За таких умов по кожній ділянці точка буде рухатися протягом однакового проміжку часу Δt, а у межах кожної ділянки радіус кривини траєкторії руху має своє *стале значення*

$$\rho_{AB} = r_1 = R(м) = const\,, \qquad \rho_{BD} = r_2 = 1{,}5R(м) = const\,,$$

$$\rho_{DE} = r_3 = 3R(м) = const \quad \text{і} \quad \rho_{EK} = r_4 = 9R(м) = const\,.$$

Обчисливши за формулою (12.24) модуль нормального прискорення точки на кожній з ділянок:

$$a^n_{AB} = \frac{v^2}{\rho_{AB}} = \frac{9R^2}{R} = 9R\left(м/сек^2\right) = const\,,$$

$$a^n_{BD} = \frac{v^2}{\rho_{BD}} = \frac{9R^2}{1{,}5R} = 6R\left(м/сек^2\right) = const\,,$$

$$a^n_{DE} = \frac{v^2}{\rho_{DE}} = \frac{9R^2}{3R} = 3R\left(м/сек^2\right) = const\,,$$

$$a^n_{EK} = \frac{v^2}{\rho_{EK}} = \frac{9R^2}{9R} = R\left(м/сек^2\right) = const\,,$$

встановлюємо, що

$$a^n_{AB} = 9a^n_{EK}\,, \qquad a^n_{BD} = 6a^n_{EK} \quad \text{і} \quad a^n_{DE} = 3a^n_{EK}\,.$$

З рисунка ж 12.21 бачимо:

- вектор $\vec{v}$ швидкості за проміжок часу Δt руху точки на ділянці AB змінив свій напрямок у кінцевому положенні B порівняно з напрямком у початковому положенні A на $270°$;
- за той же проміжок часу Δt руху точки на ділянці BD зміна напрямку вектора $\vec{v}$ склала $180°$;
- на ділянці DE – $90°$;
- на ділянці EK – $30°$.

Із сукупного аналізу кінематичних характеристик, установлених для кожної з ділянок траєкторії руху, розглянутого на рисунку 12.21, очевидною є *пряма залежність між числовим значенням модуля нормального прискорення точки та швидкістю зміни в часі* ***напрямку вектора швидкості*** цієї точки: чим більшим є модуль a^n, тим швидше вектор $\vec{v}$ змінює свій напрямок; зауважимо також, що зазначена *швидша зміна напрямку вектора* $\vec{v}$ має місце при русі точки *по більш кривій ділянці* її траєкторії руху.

Уявімо рух точки по зображеній на рисунку 12.20, б прямій з якою завгодно швидкістю $\vec{v}$; у такому разі в будь-якому положенні точки на траєкторії згідно з формулою (12.24) модуль

$$a^n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{\infty} = 0,$$

що є математичною ознакою (або математичним свідченням) факту прямолінійного руху точки; отже, при *прямолінійному русі* модуль нормального прискорення точки *дорівнює нулю* ($a^n = 0$) чи нормального прискорення точки *не існує*.

Зауваження 12.2. Якщо при криволінійному русі модуль a^n ***набуває нульового значення*** (один чи декілька разів), то це кожний раз стається тільки ***на одну мить*** і тільки *у* ті *моменти часу, в які швидкість* v *руху точки також набуває нульових значень* (див. у прикладі 12.3 на рис. 12.3п.1 положення точки у моменти часу t_1 та t_3), або *у моменти часу, коли досліджувана рухома точка знаходиться у точках перегину траєкторії* (див. на рис. 12.21 положення B, D і E)*.

Таким чином,

ⓘ ***нормальне прискорення*** $\vec{a}^n$ *існує тільки при криволінійному русі точки*; механічний зміст цього прискорення полягає в тому, що воно ***характеризує зміну*** в часі **напрямку *вектора*** $\vec{v}$ швидкості точки.

Підсумовуючи, відмітимо, що прискорення точки в криволінійному русі змінюється внаслідок зміни: а) *модуля* v *швидкості*;

* Указані у **зауваженні 12.2** властивості руху та траєкторії притаманні далеко не кожному рухові точки.

б) *напрямку вектора* $\vec{v}$ *швидкості*; в) *обох* цих *параметрів разом*. Рух точки траєкторією більшої кривини з більшою швидкістю завжди пов'язаний з більшим прискоренням. Розкладання ж прискорення $\vec{a}$ на нормальну $\vec{a}^n$ і дотичну (тангенціальну) $\vec{a}^\tau$ компоненти дозволяє встановити розділений вплив кожного із зазначених параметрів на повне прискорення руху точки. Звернемо також увагу та зафіксуємо в яких-небудь (на власний розсуд) комірчинах пам'яті, що:

1. У разі ***рівномірного руху точки по колу*** радіуса r дотичного (тангенціального) прискорення не існує (оскільки модуль $v = const$), а радіус кривини $\rho = r = const$. Тоді модуль повного прискорення $a = a^n = \dfrac{v^2}{\rho} = \dfrac{v^2}{r} = const$, але вектор $\vec{a} \neq const$ на тій підставі, що у кожній точці кола нормальна вісь n (як і дотична вісь τ) має напрямок, відмінний від напрямку в будь-якій іншій точці кола; оскільки ж у цьому разі $\vec{a} = \vec{a}^n$, то ***вектор прискорення точки*** у будь-якому положенні точки на траєкторії ***напрямлений*** тільки ***до центра кола***, утворюючи з вектором $\vec{v}$ прямий кут (див. рис. 12.22, а).
2. У разі ***рівномірного руху точки по прямій*** дотичного (тангенціального) прискорення не існує (оскільки $v = const$), нормального прискорення не існує (оскільки $\rho = \infty = const$); тоді й повне прискорення $\vec{a} = \vec{a}^n + \vec{a}^\tau = 0$* (див. рис. 12.22, б).

---

* До такого самого результату приводить і визначення прискорення рівномірного прямолінійного руху й будь-яким іншим способом. Наприклад, при векторному способі згідно з формулою (12.1) $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$, але оскільки у цьому разі $\vec{v} = const$, то, звісно, й $\vec{a} = 0$ (див. також у § 12.3 на с. 91 розглянутий варіант **5** руху точки).

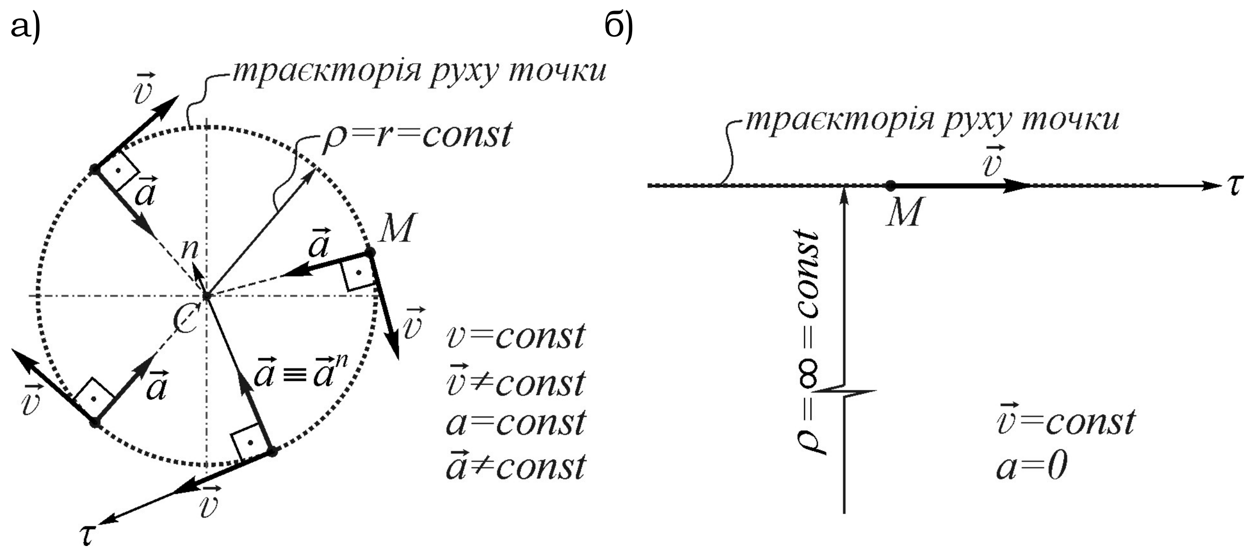


Рис. 12.22. Рівномірні рухи точки по колу та по прямій

Якщо взяти до уваги те, що у разі будь-якого (рівномірного чи нерівномірного) ***прямолінійного руху точки*** дотична вісь τ повністю збігається з траєкторією руху точки та дуговою віссю s (див. рис. 11.12, б), нормального прискорення не існує, а повне прискорення визначається тільки дотичною (тангенціальною) складовою (тобто, $\vec{a} = \vec{a}^{\tau}$) та порівняти з усім викладеним у § 12.3, то зрозуміло, що *визначення прямолінійного руху точки у натуральній і координатній формах* (у разі, коли одна з координатних осей напрямлена вздовж траєкторії руху[*]) – *абсолютно тотожні.*

За значеннями нормального $\vec{a}^{n}$ і дотичного (тангенціального) $\vec{a}^{\tau}$ прискорень легко аналізувати та класифікувати виконувані розглядуваною точкою рухи.

Подамо зазначену класифікацію у вигляді таблиці 12.1 та «блок-схеми» (рис. 12.23), змісти яких фактично підсумовують викладене у §§ 12.6 ÷ 12.8.

[*] У разі визначення прямолінійного руху точки у натуральній формі ніякої додаткової умови не потрібно, оскільки й так дугова вісь s не може проходити інакше, ніж уздовж траєкторії руху точки.

ТАБЛИЦЯ 12.1
Класифікація рухів точки за її прискореннями

<table>
<tr><th rowspan="2">№</th><th rowspan="2">Похідні $\dot{s}$ і $\ddot{s}$</th><th colspan="3">Прискорення точки</th><th rowspan="2">Рух точки</th></tr>
<tr><th>нормальне</th><th>дотичне (тангенціальне)</th><th>повне</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$\dot{s}$ і $\ddot{s}$ – одного знака</td><td rowspan="2">$\vec{a}^n \neq 0$, $a^n = \dfrac{v^2}{\rho}$</td><td rowspan="2">$\vec{a}^\tau \neq 0$, $a_\tau = \dot{v}_\tau = \ddot{s}$</td><td rowspan="2">$\vec{a} = \vec{a}^n + \vec{a}^\tau$, $a = \sqrt{\left(a^n\right)^2 + \left(a^\tau\right)^2}$</td><td>криволінійний нерівномірний прискорений</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\dot{s}$ і $\ddot{s}$ – різного знака</td><td>криволінійний нерівномірний сповільнений</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\dot{s} \neq 0$, $\ddot{s} = 0$</td><td>$\vec{a}^n \neq 0$, $a^n = \dfrac{v^2}{\rho}$</td><td>$a^\tau = 0$</td><td>$\vec{a} = \vec{a}^n$, $a = a^n = \dfrac{v^2}{\rho}$</td><td>криволінійний рівномірний ($v = const$)</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\dot{s}$ і $\ddot{s}$ – одного знака</td><td rowspan="2">$a^n = 0$</td><td rowspan="2">$\vec{a}^\tau \neq 0$, $a_\tau = \dot{v}_\tau = \ddot{s}$</td><td rowspan="2">$\vec{a} = \vec{a}^\tau$, $a = a_\tau = \dot{v}_\tau = \ddot{s}$</td><td>прямолінійний ($\rho = \infty$) нерівномірний прискорений</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$\dot{s}$ і $\ddot{s}$ – різного знака</td><td>прямолінійний ($\rho = \infty$) нерівномірний сповільнений</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$\dot{s} \neq 0$, $\ddot{s} = 0$</td><td>$a^n = 0$</td><td>$a^\tau = 0$</td><td>$a = 0$</td><td>прямолінійний ($\rho = \infty$) рівномірний ($v = const$)</td></tr>
</table>

Розглянуті в таблиці випадки стосуються ситуацій, коли всі вказані характеризуючі параметри мають наведені значення протягом певного *проміжку часу*, а не набувають цих значень у якісь *моменти часу*. Які кінематичні стани виникають у разі, коли модулі a^τ дотичного (тангенціального) та a^n нормального прискорень у певні моменти часу обертаються в нуль – див. вище **зауваження 12.1** і **12.2**.

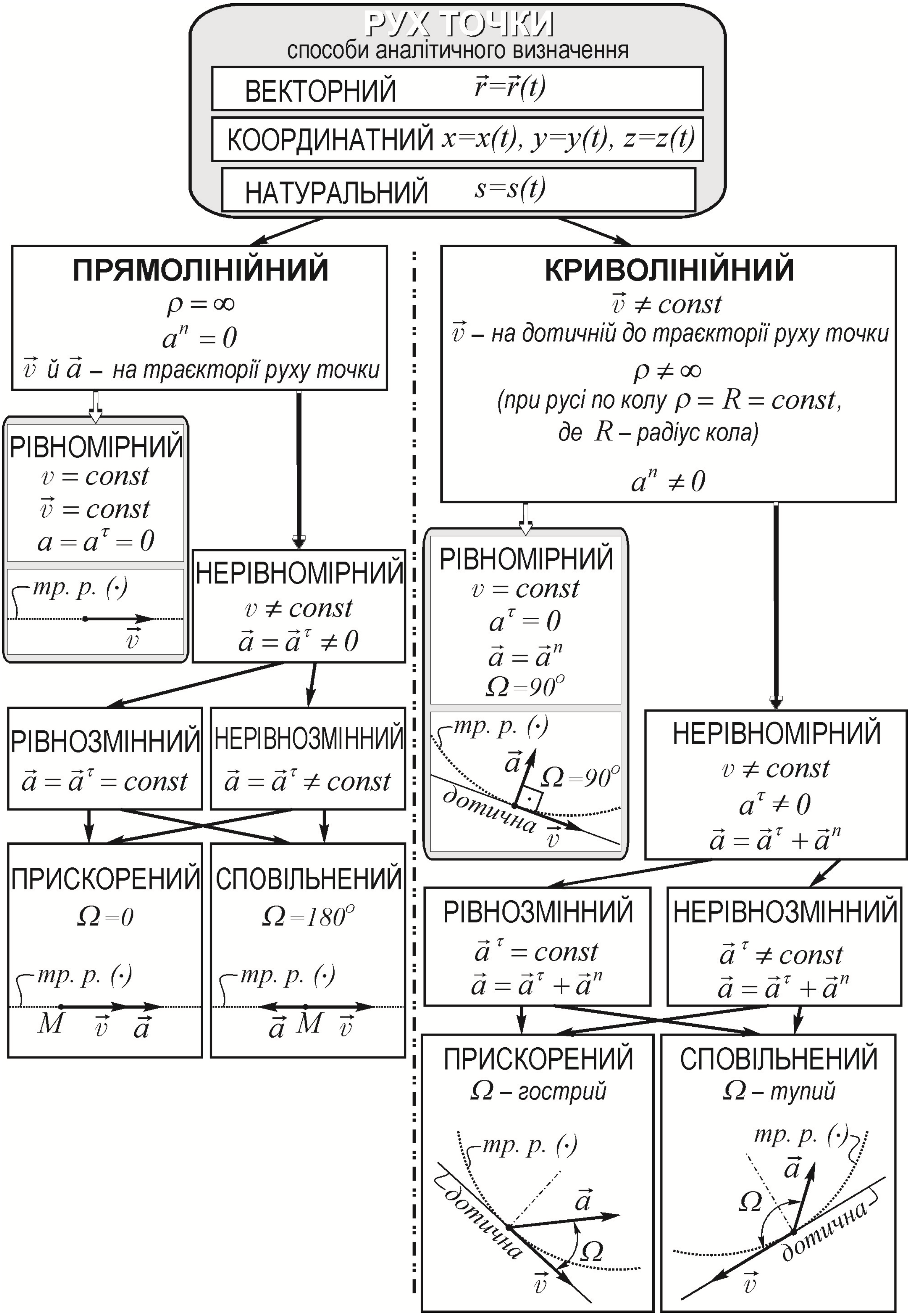


Рис. 12.23. Класифікація рухів точки за її прискореннями

🛠 **Приклад 12.4.** З борту літака, що рівномірно зі швидкістю $v_{літ.}$ летить по горизонталі на висоті h над горизонтальною ділянкою землі, скидають вантаж. Якщо знехтувати його розмірами й опором повітря, то закон падіння вантажу* у вертикальній площині Oxy визначають рівняння

$$\begin{cases} x = b \cdot t\,(м), \\ y = \dfrac{g \cdot t^2}{2}\,(м), \end{cases}$$

де b і g – деякі сталі, а напрямки координатних осей Ox й Oy указані на рис. 12.4п.1.

Знайти траєкторію, швидкість, повне, дотичне (тангенціальне) і нормальне прискорення точки M, радіус кривини її траєкторії руху для довільного положення точки, виразивши останні три кінематичні характеристики через швидкість v точки у цьому положенні.

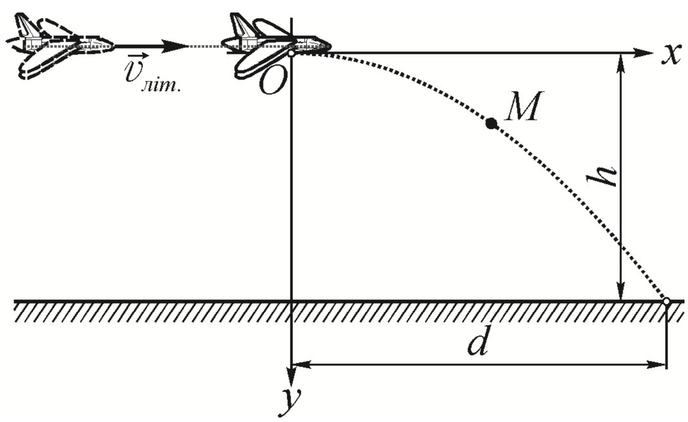


Рис. 12.4п.1

Установити швидкість $v_{літ.}$ літака та висоту h його польоту, якщо, падаючи протягом $10\,сек$, вантаж упав на землю у точку, що знаходиться на віддалі $d = 875\,м$ по горизонталі від точки скидання.

* Оскільки розмірами вантажу нехтують, то надалі, ведучи мову про нього, будемо вживати термін «точка M ».

Знайти швидкість, прискорення та радіус кривини траєкторії точки M у точці падіння на землю.

Розв'язування. 1. Установимо траєкторію руху точки M. Для знаходження рівняння траєкторії руху з рівнянь руху точки виключаємо час t шляхом підстановки в друге рівняння значення t, отриманого з першого рівняння (див. також приклад 10.1 на с. 24), отже

$$t = \frac{x}{b}, \qquad y = \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^2$$

або

$$y = \frac{g}{2 \cdot b^2} \cdot x^2 .$$

Отримане рівняння – це рівняння параболи, вітки якої симетричні відносно осі Oy, з вершиною на початку координатних осей; частина цієї параболи, яка є траєкторією руху точки M, зображена на розрахунковій схемі (рис. 12.4п.2, а).

2. Знайдемо швидкість точки M. Оскільки рух задано у координатній формі, то згідно з формулою (11.7)

$$\vec{v} = \vec{i} \cdot v_x + \vec{j} \cdot v_y ,$$

де $\vec{i}$ та $\vec{j}$ – орти декартових координатних осей; v_x і v_y – проекції швидкості на осі Ox та Oy відповідно.

Згідно ж з формулами (11.8) і (11.9) $v_x = \dfrac{dx}{dt}$, $v_y = \dfrac{dy}{dt}$ та $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$; тоді у нашому випадку

$$v_x = \frac{d}{dt}(b \cdot t) = b, \qquad v_y = \frac{d}{dt}\left(\frac{g \cdot t^2}{2}\right) = \frac{g}{2} \cdot 2t = g \cdot t ,$$

$$\vec{v} = \vec{i} \cdot b + \vec{j} \cdot gt ,$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(b)^2 + (gt)^2} = \sqrt{b^2 + g^2 \cdot t^2}\,. \qquad (*)$$

Установлені значення свідчать, що:

- оскільки $v = \sqrt{b^2 + g^2 \cdot t^2} = f(t)$, то точка M по своїй траєкторії рухається нерівномірно (див. визначення на с. 18);
- оскільки рівняння $v_x = b$ не містить t, то, звісно, $v_x = const$ і, отже, при русі точки у будь-якому її положенні проекція швидкості на вісь Ox лишається незмінною (однаковою);
- у початковий момент часу $t_0 = 0$ проекції $v_{x0} = b$ і $v_{y0} = 0$, а модуль швидкості точки M має найменше зі своїх можливих значень $v_0 = v_{min} = b$ (очевидно, що $v_0 = v_x$);
- з плином часу проекція v_y і величина (модуль) v швидкості неперервно зростають*.

3. Знайдемо прискорення точки M. За формулою (12.6)

$$\vec{a} = \vec{i} \cdot a_x + \vec{j} \cdot a_y,$$

де a_x та a_y – проекції прискорення на осі Ox і Oy відповідно.

Згідно ж з формулами (12.7) та (12.8) $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$, $a_y = \dfrac{dv_y}{dt}$ і $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$; тоді у нашому випадку

$$a_x = \frac{d}{dt}(b) = 0, \quad a_y = \frac{d}{dt}(g \cdot t) = g = const,$$

$$\vec{a} = \vec{i} \cdot 0 + \vec{j} \cdot g = g \cdot \vec{i} = const,$$

$$a = g = const.$$

* На рисунку 12.4п.2, б наведено діаграму розподілу швидкостей точки M у різних точках траєкторії.

Бачимо, що проекції та модуль прискорення руху точки M ніяк не залежать від часу, тобто і модуль, і напрямок прискорення – сталі. Оскільки $a_x = 0$, а $a_y = g > 0$, то в усіх точках траєкторії вектор $\vec{a} = g \cdot \vec{i}$ прискорення точки M напрямлений за напрямком осі Oy (див. рис. 12.4п.2, а). Це прискорення є *прискоренням вільного падіння**.

---

* ***Прискорення вільного падіння*** (позначення g) – прискорення, яке отримує тіло, рухаючись під впливом сили тяжіння Землі. Падіння тіл є вільним лише у разі, коли на це тіло діє *тільки* сила тяжіння; наприклад, падіння тіл у повітрі можна вважати вільним лише за умови нехтування його опором. Вільне падіння матеріальних тіл досліджував Галілео Галілей (італ. Galileo di Vincenzo Bonaiuti de 'Galilei) (15.02.1564 – 08.01.1642 р.), який і довів, що всі тіла при вільному падінні рухаються рівноприскорено зі спрямованим униз однаковим прискоренням, числове значення якого не залежить ні від маси, ні від форми тіл. Вимірювання показують, що прискорення вільного падіння не однакове на Землі та поблизу її поверхні $g \approx 9{,}8 \dfrac{м}{сек^2}$.

Для проведення загальних розрахунків у 1901 році у Парижі за рішенням третьої Генеральної конференції з мір та ваг (фр. Conférence générale des poids et mesures) прийнято ***стандартне значення*** прискорення вільного падіння $g = 9{,}80665 \dfrac{м}{сек^2}$. Відхилення від стандартної величини обумовлено низкою причин і факторів:

1. Обертанням Землі, внаслідок чого прискорення вільного падіння змінюється від приблизно $9{,}78 \dfrac{м}{сек^2}$ на екваторі до $9{,}83 \dfrac{м}{сек^2}$ на полюсах.
2. Формою Землі. Земля не ідеальна сфера, а має сплюснуту на полюсах форму.
3. Висотою над рівнем моря (або відстанню від центра Землі).
4. Неоднорідністю Землі (значення g більше на довільній широті, там, де містяться поклади залізної й інших важких руд, менше – над родовищами газу).

Стандартне значення приблизно відповідає прискоренню падіння тіла на широті $45°$ і на висоті рівня моря. Для Полтави (географічні координати якої за Гринвічем: $34° 32' 24''$ східної довготи та $49° 35' 24''$ північної широти, а висота над рівнем моря – $157\,м$) прискорення вільного падіння $g = 9{,}80982 \dfrac{м}{сек^2}$.

Зауважимо, що хоча й установлено, що модуль повного прискорення $a = const$, але рух точки M ***не*** є ***рівнозмінним***, адже ознакою рівнозмінного руху є не умова $a = const$, а умова $a^{\tau} = const$ (див. визначення на с. 146). У розглядуваному ж русі, як буде встановлено далі, $a^{\tau} \neq const$.

4. Знайдемо дотичне (тангенціальне) прискорення точки M, вектор якого згідно з формулою (12.21,б)

$$\vec{a}^{\tau} = \vec{\tau} \cdot a_{\tau},$$

де τ – орт дотичної осі; a_{τ} – *проекція* вектора $\vec{a}^{\tau}$ дотичного прискорення на дотичну вісь τ, котру (маємо на увазі проекцію a_{τ}) відповідно до формули (12.25) визначає похідна за часом від значення v_{τ}: $a_{\tau} = \dfrac{dv_{\tau}}{dt}$. Оскільки ж у нашому разі точка M по траєкторії рухається тільки в одному напрямкові, то згідно з формулою (11.21) $v = v_{\tau}$ і, отже, $a_{\tau} = \dfrac{dv}{dt}$; тоді, урахувавши залежність (*), встановлюємо, що

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{b^2 + g^2 \cdot t^2}\right) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{b^2 + g^2 \cdot t^2}} \cdot \frac{d}{dt}\left(b^2 + g^2 \cdot t^2\right) =$$

$$= \frac{g^2 \cdot 2t}{2 \cdot \sqrt{b^2 + g^2 \cdot t^2}} = \frac{g^2 \cdot t}{\sqrt{b^2 + g^2 \cdot t^2}} = \frac{g^2 \cdot t}{v}.$$

За формулою (12.27) модуль дотичного (тангенціального) прискорення $a^{\tau} = |a_{\tau}|$; тоді в розв'язуваній задачі $a^{\tau} = \left|\dfrac{g^2 \cdot t}{v}\right|$.

Оскільки ж $\dfrac{g^2 \cdot t}{v}$ ні за яких обставин не може набувати від'ємних значень (тобто завжди $\dfrac{g^2 \cdot t}{v} > 0$), то модуль

$$a^{\tau} = \frac{g^2 \cdot t}{v}.$$

Далі з рівності (*) встановлюємо, що $v^2 = b^2 + g^2 \cdot t^2$,

$$t^2 = \frac{v^2 - b^2}{g^2}, \quad \text{а} \quad t = \sqrt{\frac{v^2 - b^2}{g^2}} = \frac{\sqrt{v^2 - b^2}}{g}.$$

Підставляємо це значення t у попередню формулу та здійснюємо відповідні математичні перетворення:

$$a^{\tau} = \frac{g^2}{v} \cdot \frac{\sqrt{v^2 - b^2}}{g} = g \cdot \frac{\sqrt{v^2 - b^2}}{v} = g \cdot \frac{\sqrt{v^2 - b^2}}{\sqrt{v^2}} = g \cdot \sqrt{\frac{v^2 - b^2}{v^2}},$$

у результаті чого остаточно дістаємо

$$a^{\tau} = g \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{v^2}}.$$

Отримана залежність свідчить, що у початковий момент часу $t_0 = 0$ дотичне (тангенціальне) прискорення

$$a_0^{\tau} = g \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{v_0^2}} = g \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{b^2}} = g \cdot \sqrt{1 - 1} = g \cdot \sqrt{0} = 0,$$

зі збільшенням же швидкості v модуль a^{τ} зростає, а при $v \to \infty$ $a^{\tau} \to g$, тобто в границі величина (модуль) дотичного (тангенціального) прискорення точки M прямує до повного прискорення $a = g$.

5. Знайдемо нормальне прискорення точки M. Згідно з формулою (12.20,в) вектор нормального прискорення

$$\vec{a}^n = \vec{n} \cdot a^n,$$

де $\vec{n}$ – орт нормальної осі; a^n – *модуль* нормального прискорення, для визначення якого врахуємо, що згідно з формулою (12.29,а)

$$a = \sqrt{\left(a^n\right)^2 + \left(a^\tau\right)^2}\ .$$

Звідси

$$a^2 = \left(a^n\right)^2 + \left(a^\tau\right)^2,$$

$$\left(a^n\right)^2 = a^2 - \left(a^\tau\right)^2 = g^2 - \left(g \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{v^2}}\right)^2 = g^2 - g^2 \cdot \left(1 - \frac{b^2}{v^2}\right) = g^2 \cdot \frac{b^2}{v^2}$$

і

$$a^n = g \cdot \frac{b}{v}.$$

Отже, у початковий момент часу $t_0 = 0$ модуль нормального прискорення

$$a^n = g \cdot \frac{b}{v_0} = g \cdot \frac{b}{b} = g \cdot 1 = g = a^n_{max},$$

зі збільшенням швидкості v модуль a^n спадає, прямуючи в границі до нуля.

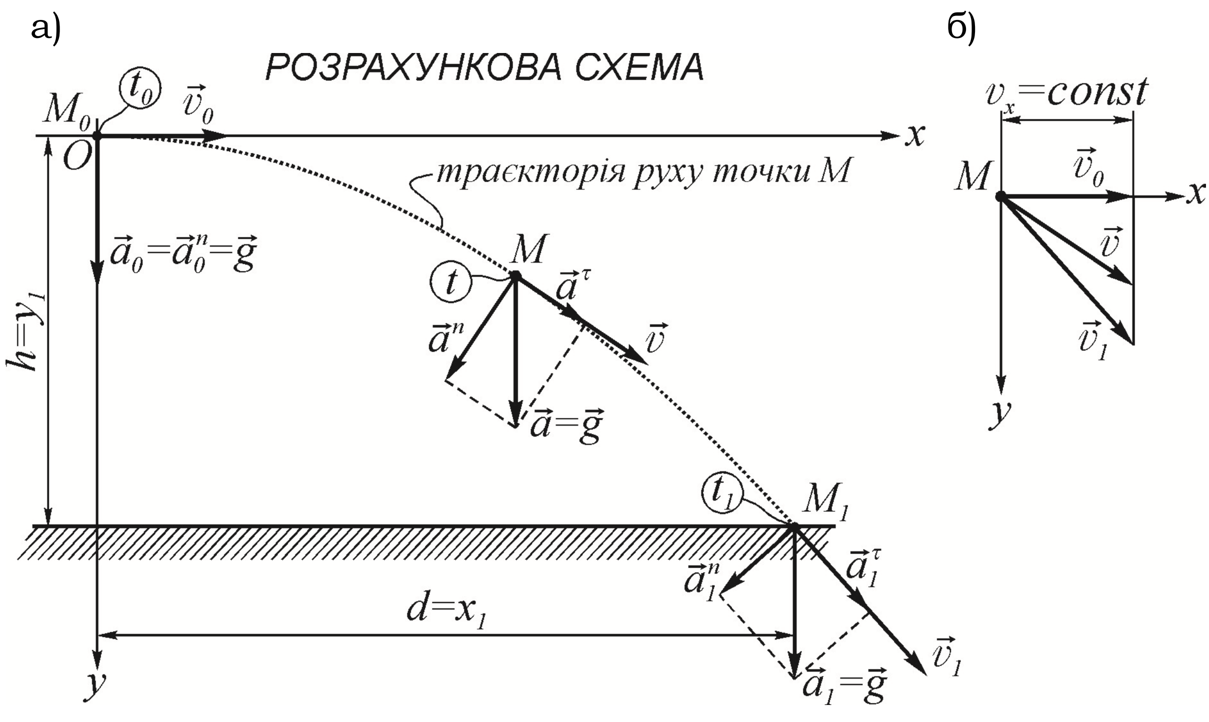


Рис. 12.4п.2

Таким чином, і дотичне (тангенціальне) $\vec{a}^{\tau}$, і нормальне $\vec{a}^{n}$ прискорення є *змінними величинами*, але їх векторна сума $\vec{a}^{n}+\vec{a}^{\tau}=\vec{a}$ – *стала величина*. Розкладання сталого повного прискорення $\vec{a}=g\cdot\vec{i}$ на дотичне $\vec{a}^{\tau}$ і нормальне $\vec{a}^{n}$ у різних точках траєкторії показано на рисунку 12.4п.2, а.

6. Знайдемо радіус ρ кривини траєкторії руху точки M. Для цього скористаємося формулою (12.24) $a^{n}=\dfrac{v^{2}}{\rho}$, з якої

$$\rho=\frac{v^{2}}{a^{n}}=\frac{v^{2}}{g\cdot\frac{b}{v}}=\frac{v^{3}}{g\cdot b}.$$

Отримана залежність свідчить, що у початковий момент часу $t_0=0$ радіус кривини траєкторії точки

$$\rho_0=\frac{v_0^{3}}{g\cdot b}=\frac{b^{3}}{g\cdot b}=\frac{b^{2}}{g}=\rho_{min},$$

потім, зі збільшенням швидкості v радіус кривини зростає і, природно, кривина траєкторії руху зменшується; при $v\to\infty$ $\rho\to\infty$, а кривина прямує до нуля.

7. Знайдемо швидкість $v_{літ.}$ літака та висоту h його польоту. Нехай точка M падає на землю в момент часу t_1; позначимо це положення точки як M_1. За умовою задачі $t_1=10сек$, а з розрахункової схеми (див. рис. 12.4п.2, а) очевидно, що висота h польоту літака дорівнює значенню координати y в момент часу t_1, тобто

$$h=y_1=\frac{g\cdot t_1^{2}}{2}=\frac{9{,}8\cdot 10^{2}}{2}=\frac{9{,}8\cdot 100}{2}=490(м).$$

Для знаходження швидкості літака врахуємо таке:

- шукана швидкість $v_{літ.}$ рівномірного руху літака визначає початкову швидкість v_0 падіння вантажу, тобто $v_{літ.} = v_0$;
- вище встановлено, що $v_0 = b$, тоді і $v_{літ.} = b$;
- з розрахункової схеми на рисунку 12.4п.2, а видно, що віддаль d дорівнює значенню координати x у момент часу t_1:

$$d = x_1 = b \cdot t_1,$$

звідки

$$b = \frac{d}{t_1} = \frac{875}{10} = 87,5.$$

Тоді шукана швидкість

$$v_{літ.} = b = 87,5\left(\frac{м}{сек}\right) = 87,5 \cdot \frac{60 \cdot 60}{1000} = 315\left(\frac{км}{год}\right).$$

8. Знайдемо швидкість, повне, дотичне (тангенціальне) і нормальне прискорення точки M та радіус кривини траєкторії точки у точці падіння на землю. При $t_1 = 10 сек$

$$v_{x1} = b = 87,5\left(м/_{сек}\right) = const;$$

$$v_{y1} = g \cdot t_1 \approx 9,8 \cdot 10 \approx 98\left(м/_{сек}\right);$$

$$v_1 = \sqrt{(v_{x1})^2 + (v_{y1})^2} \approx \sqrt{87,5^2 + 98^2} \approx \sqrt{17260,25} \approx 131,38\left(\frac{м}{сек}\right)$$

або за встановленою вище формулою (*)

$$v_1 = \sqrt{b^2 + g^2 t_1^2} \approx \sqrt{87,5^2 + 9,8^2 \cdot 10^2} \approx \sqrt{17260,25} \approx 131,38\left(\frac{м}{сек}\right),$$

тобто

$$v_1 \approx 131,38\left(\frac{м}{сек}\right) = 131,38 \cdot \frac{60 \cdot 60}{1000} = 472,96\left(\frac{км}{год}\right);$$

$$a_1 = g \approx 9,8\left(\frac{м}{сек^2}\right) = const;$$

$$a_1^\tau = g\cdot\sqrt{1-\frac{b^2}{v_1^2}} \approx 9{,}8\cdot\sqrt{1-\frac{87{,}5^2}{131{,}38^2}} \approx 9{,}8\cdot\sqrt{1-\frac{7656{,}25}{17260{,}25}} \approx$$

$$\approx 9{,}8\cdot\sqrt{1-0{,}4436} \approx 9{,}8\cdot\sqrt{0{,}5564} \approx 9{,}8\cdot 0{,}7459 \approx 7{,}31\left(\frac{м}{сек^2}\right);$$

$$a_1^n = g\cdot\frac{b}{v_1} \approx 9{,}8\cdot\frac{87{,}5}{131{,}38} \approx 9{,}8\cdot 0{,}6660 \approx 6{,}53\left(\frac{м}{сек^2}\right);$$

$$\rho_1 = \frac{v_1^3}{g\cdot b} \approx \frac{131{,}38^3}{9{,}8\cdot 87{,}5} \approx 2644{,}46\,(м).$$

Для порівняння обчислимо і значення радіуса кривини у початковий момент часу

$$\rho_0 = \rho_{min} = \frac{b^2}{g} \approx \frac{87{,}5^2}{9{,}8} \approx 781{,}25\,(м).$$

§ 12.9. ЗВ'ЯЗОК МІЖ НАТУРАЛЬНИМ І КООРДИНАТНИМ СПОСОБАМИ ВИЗНАЧЕННЯ РУХУ ТОЧКИ

Якщо рух точки задано координатним способом, то кінематичні характеристики точки, прийняті при натуральному способі опису руху, також здобути неважко. Спочатку за формулами (11.5) і (12.4) слід знайти модулі швидкості $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ і прискорення $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, а потім за формулою (12.28) встановити значення модуля $a^\tau = \left|\frac{dv}{dt}\right|$, який у цьому разі (після підстановки значення v) буде визначати похідна $a^\tau = \left|\frac{dv}{dt}\right| = \left|\frac{d}{dt}\left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\right)\right|$.

Відповідно до теорії диференціального числення:

- похідна $\left(\sqrt{U}\right)' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{U}}\cdot(U)'$, де U – підкореневий математичний вираз, котрий є складною функцією певного змінного параметра, за яким відбувається диференціювання, а $(U)'$ – похідна від функції U за зазначеним параметром; тоді у нашому випадку

$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\right)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}\cdot\frac{d}{dt}\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right);$$

- похідна від суми дорівнює сумі похідних; тоді

$$\frac{1}{2\cdot\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}\cdot\frac{d}{dt}\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}\cdot\left(\frac{d}{dt}\left(v_x^2\right)+\frac{d}{dt}\left(v_y^2\right)+\frac{d}{dt}\left(v_z^2\right)\right);$$

- похідна $\left(U^2\right)'=2\cdot U\cdot(U)'$; тоді

$$\frac{d}{dt}\left(v_x^2\right)=2\cdot v_x\cdot\frac{dv_x}{dt},\quad \frac{d}{dt}\left(v_y^2\right)=2\cdot v_y\cdot\frac{dv_y}{dt}\quad \text{і}\quad \frac{d}{dt}\left(v_z^2\right)=2\cdot v_z\cdot\frac{dv_z}{dt};$$

якщо ж урахувати, що згідно з формулою (12.3,а)

$$\frac{dv_x}{dt}=\dot{v}_x=a_x,\quad \frac{dv_y}{dt}=\dot{v}_y=a_y\quad \text{і}\quad \frac{dv_z}{dt}=\dot{v}_z=a_z,$$

то у нашому випадку

$$\frac{1}{2\cdot\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}\cdot\left(\frac{d}{dt}\left(v_x^2\right)+\frac{d}{dt}\left(v_y^2\right)+\frac{d}{dt}\left(v_z^2\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}\cdot\left(2\cdot v_x\cdot\frac{dv_x}{dt}+2\cdot v_y\cdot\frac{dv_y}{dt}+2\cdot v_z\cdot\frac{dv_z}{dt}\right)=$$

$$=\frac{\left(2\cdot v_x\cdot\dot{v}_x+2\cdot v_y\cdot\dot{v}_y+2\cdot v_z\cdot\dot{v}_z\right)}{2\cdot\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}=\frac{2\cdot\left(v_x\cdot\dot{v}_x+v_y\cdot\dot{v}_y+v_z\cdot\dot{v}_z\right)}{2\cdot\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}=$$

$$=\frac{v_x\cdot a_x+v_y\cdot a_y+v_z\cdot a_z}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}.$$

Отже,

$$a^\tau=\left|\frac{dv}{dt}\right|=\left|\frac{d}{dt}\left(\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\right)\right|=$$

$$= \left| \frac{2 \cdot v_x \cdot \dot{v}_x + 2 \cdot v_y \cdot \dot{v}_y + 2 \cdot v_z \cdot \dot{v}_z}{2 \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \right| = \left| \frac{v_x \cdot \dot{v}_x + v_y \cdot \dot{v}_y + v_z \cdot \dot{v}_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \right|$$

або остаточно

$$a^\tau = \left| \frac{v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y + v_z \cdot a_z}{v} \right|, \qquad \textbf{(12.31)}$$

де знак «*плюс*», отриманий при обчисленні чисельника дробу, є свідченням *прискореного* руху точки, а знак «*мінус*» – *сповільненого*.

На підставі формул (12.29,а), (12.4) і (12.26) дістанемо, що модуль нормального прискорення

$$a^n = \sqrt{a^2 - \left(a^\tau\right)^2} \qquad \textbf{(12.32,а)}$$

або

$$a^n = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - a_\tau^2}\,. \qquad \textbf{(12.32,б)}$$

З урахуванням формули (12.31) виразу, що визначає модуль a^n, можна надати й вигляду

$$a^n = \sqrt{a^2 - \frac{\left(v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y + v_z \cdot a_z\right)^2}{v^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 \cdot v^2}{v^2} - \frac{\left(v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y + v_z \cdot a_z\right)^2}{v^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 \cdot v^2 - \left(v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y + v_z \cdot a_z\right)^2}{v^2}}$$

або остаточно

$$a^n = \frac{\sqrt{a^2 \cdot v^2 - \left(v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y + v_z \cdot a_z\right)^2}}{v}\,. \qquad \textbf{(12.32,в)}$$

Скориставшись же виразами (12.24) і (12.32), дістанемо, що радіус кривини траєкторії руху точки

$$\rho = \frac{v^2}{a^n} = \frac{v^2}{\frac{\sqrt{a^2 \cdot v^2 - \left(v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y + v_z \cdot a_z\right)^2}}{v}} =$$

$$= \frac{v^3}{\sqrt{a^2 \cdot v^2 - \left(v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y + v_z \cdot a_z\right)^2}}. \qquad \textbf{(12.33)}$$

Як відомо з векторної алгебри скалярний добуток двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – це число $\vec{a} \cdot \vec{b}$, що дорівнює добутку модулів a та b цих векторів на косинус кута φ між ними, тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot cos\varphi .$$

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ у деякій системі координат $Oxyz$ задані через свої проекції на відповідні осі у вигляді $\vec{a} = \vec{i} \cdot a_x + \vec{j} \cdot a_y + \vec{k} \cdot a_z$ і $\vec{b} = \vec{i} \cdot b_x + \vec{j} \cdot b_y + \vec{k} \cdot b_z$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z .$$

Тоді очевидно, що

$$a \cdot b \cdot cos\varphi = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z ,$$

а

$$cos\varphi = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{a \cdot b} .$$

Застосуємо наведені положення векторної алгебри для векторів швидкості $\vec{v}$ та прискорення $\vec{a}$. Тоді

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = v \cdot a \cdot cos\,\Omega ,$$

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y + v_z \cdot a_z$$

і

$$v \cdot a \cdot cos\,\Omega = v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y + v_z \cdot a_z ,$$

де Ω – кут між додатними напрямками векторів швидкості $\vec{v}$ та повного прискорення $\vec{a}$ точки (див. відповідне зауваження на с. 134).

Останній вираз приводить до формули

$$cos\,\Omega = \frac{v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y + v_z \cdot a_z}{v \cdot a}. \qquad \textbf{(12.34)}$$

Отримані в цьому параграфі залежності (12.31) ÷ (12.34), як і формули (11.23) ÷ (11.30) § 11.5, визначають *зв'язок між натуральним та координатним способами задання руху*. Ці формули застосовують при розв'язуванні тих чи інших *практичних задач*.

Якщо врахувати рівність $\vec{v} \cdot \vec{a} = v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y + v_z \cdot a_z$, то формулам (12.31) ÷ (12.34) можна надати вигляду:

$$a^\tau = \left| \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v} \right|, \qquad \textbf{(12.35)}$$

$$a^n = \frac{\sqrt{a^2 \cdot v^2 - (\vec{v} \cdot \vec{a})^2}}{v}, \qquad \textbf{(12.36)}$$

$$\rho = \frac{v^3}{\sqrt{a^2 \cdot v^2 - (\vec{v} \cdot \vec{a})^2}}, \qquad \textbf{(12.37)}$$

$$cos\,\Omega = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v \cdot a}. \qquad \textbf{(12.38)}$$

Останні формули (12.35) ÷ (12.38) визначають *зв'язок між натуральним і векторним способами задання руху* та, як правило, мають застосування тільки *у теоретичних дослідженнях* тих чи інших процесів, явищ і систем або *при доведеннях певних теорем кінематики та динаміки.*

§ 12.10. РІВНЯННЯ РІВНОМІРНОГО Й РІВНОЗМІННОГО РУХІВ ТОЧКИ

А. Розглянемо ***рівномірний рух точки***. За визначенням § 10.1, у цьому разі *незалежно від виду траєкторії точки* за будь-які рівні проміжки часу вона долає однакові шляхи та протягом усього руху модуль v швидкості лишається незмінним, тобто $v = const$.

Наприкінці вивчення **кінематики точки** (особливо після засвоєння змісту §§ 12.7 і 12.8) бажано «на рівні підсвідомості» мати тверді переконання, що:

1. У випадку рівномірного руху точки *по прямолінійній траєкторії* $\vec{v} = const$ (тобто *швидкість* точки *не змінюється* ні *за величиною*, ні *за напрямком*) через що у цьому разі повне прискорення дорівнює нулю, тобто $\vec{a} = 0$ (див. рис. 12.22, б і відповідні міркування).
2. У випадку рівномірного руху *по криволінійній траєкторії модуль швидкості – незмінний*, а *напрямок вектора* $\vec{v}$ *зазнає змін*, тобто $v = const$, але $\vec{v} \neq const$, завдяки чому в цьому разі дотичне прискорення точки дорівнює нулю ($\vec{a}^{\tau} = 0$), а повне прискорення точки дорівнює нормальному, тобто $\vec{a} = \vec{a}^{n}$ (див. рис. 12.18 і відповідні міркування).

Знайдемо рівняння рівномірного руху, вважаючи, що у початковий момент часу $t_0 = 0$ положення точки визначає початкова дугова координата s_0 (яка може бути як додатною, так і від'ємною). Відповідно до формули (11.18)

$$\frac{ds}{dt} = v_{\tau}, \qquad (*)$$

де v_{τ} – проекція вектора швидкості точки на дотичну вісь τ.

Оскільки за формулою (11.19) $v_{\tau} = \pm v$, а у розглядуваному випадкові $v = const$, то, звісно, тоді й $v_{\tau} = const$, а рівняння (*) містить *два змінних параметри* (або *дві змінні*) s і t й за положеннями вищої математики є диференціальним рівнянням *першого порядку з відокремлюваними змінними*.

У теорії інтегрального числення диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними належать до найпростішого *типу*, в плані розв'язування, серед можливих диференціальних рівнянь. Щоб знайти *загальний розв'язок* такого рівняння необхідно: а) відокремити змінні, звівши його до *рівняння з відокремленими змінними*; б) проінтегрувати обидві частини отриманого рівняння у відповідних межах інтегрування. Кількість зазначених необхідних дій визначає порядок самого диференціального рівняння.

Отже, відокремивши в рівнянні (*) змінні (для чого множимо обидві його частини на dt), дістанемо диференціальне рівняння *з відокремленими змінними*[*]

$$ds = v_\tau \cdot dt. \tag{**}$$

Далі інтегруємо праву та ліву сторони рівняння (**)

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_{t_0}^{t} v_\tau \cdot dt,$$

виносимо у правій частині за знак інтеграла сталу v_τ

$$\int_{s_0}^{s} ds = v_\tau \cdot \int_{0}^{t} dt$$

та після взяття найпростіших серед будь-яких можливих інтегралів раціональних функцій у лівій і правій частинах отримаємо

$$s\Big|_{s_0}^{s} = v_\tau \cdot t\Big|_{t_0=0}^{t}$$

або, підставивши відповідні межі інтегрування,

$$s - s_0 = v_\tau \cdot t,$$

звідки

$$s = s_0 + v_\tau \cdot t.$$ **(12.39,а)** – ***рівняння*** (або ***закон***) ***рівномірного руху точки***.

[*] На неуважно швидкий погляд рівняння (*) і (**) мають схожі на гру слів назви: *з відокремлюваними змінними*, *з відокремленими змінними*; проте, певна річ, між цими рівняннями та їх назвами все-таки є різниця.

Якщо врахувати згадувану неодноразово залежність $v_\tau = \pm v$, то рівняння рівномірного руху точки, котре, звісно, визначає функціональну залежність дугової координати s від часу t, можна подати у вигляді

$$s = s_0 \pm v \cdot t, \qquad \textbf{(12.39,б)}$$

де знак «*плюс*» обирають, якщо точка здійснює рух у напрямку зростання дугової координати s, яка у такому разі буде *тільки зростати* від свого початкового значення s_0 (див. рис. 10.8, а та 11.13, а), а знак «*мінус*» – якщо точка здійснює рух у напрямку зменшення дугової координати s, яка у такому разі буде *тільки зменшуватися* від свого початкового значення s_0 (див. рис. 10.8, б та 11.13, б).

У формулі (12.39,а) проекція v_τ самодостатньо та без будь-яких додаткових міркувань визначає знак другого доданка цієї формули та напрямок руху точки по траєкторії.

Б. Розглянемо ***рівнозмінний рух точки***. За визначенням § 10.1 (див. с. 18 ÷ 19), при рівнозмінному русі *незалежно від траєкторії точки* за будь-які рівні проміжки часу Δt модуль v її швидкості змінюється на рівні (однакові) значення Δv; тобто $v \neq const$, але $\Delta v = const$. За визначенням же § 12.8 (див. с. 146), рівнозмінний рух точки – це нерівномірний рух зі сталим за величиною дотичним (тангенціальним) прискоренням; тобто $a^\tau = const$, але $\vec{a}^\tau \neq const$.

Знову, звертаючись «до підсвідомості» та до §§ 12.7 і 12.8, розуміємо, що:

1. У випадку рівнозмінного руху *по прямолінійній траєкторії*: а) нормальне прискорення точки дорівнює нулю: $\vec{a}^n = 0$; б) повне прискорення дорівнює дотичному: $\vec{a} = \vec{a}^\tau$; в) відповідно до формули

(12.21,б) $\vec{a} = \vec{a}^{\tau} = \vec{\tau} \cdot a_{\tau}$; г) одиничний вектор дотичної осі $\vec{\tau} = const$ (див. рис. 11.12, б). Завдяки наведеним фактам повне прискорення точки *не змінюється* ні *за величиною*, ні *за напрямком*, тобто у цьому разі $\vec{a} = const$ (див. приклад 12.1).

2. У випадку рівнозмінного руху точки *по криволінійній траєкторії* нормальне прискорення $\vec{a}^{n} \neq 0$, повне прискорення $\vec{a} = \vec{a}^{n} + \vec{a}^{\tau}$, де модуль $a^{\tau} = const$, але $\vec{a}^{\tau} = \vec{\tau} \cdot a_{\tau} \neq const$, оскільки у цьому разі орт $\vec{\tau} \neq const$, хоч його модуль $\tau = 1 = const$ (див. рис. 11.12, а).

Знайдемо рівняння рівнозмінного руху, вважаючи, що у початковий момент часу $t_0 = 0$ положення точки визначає початкова дугова координата s_0 (яка може бути як додатною, так і від'ємною) та точка має швидкість $\vec{v}_0$. Відповідно до формули (12.25,б)

$$\frac{dv_{\tau}}{dt} = a_{\tau}, \qquad (***)$$

де a_{τ} – проекція вектора прискорення точки на дотичну вісь τ.

Оскільки за формулою (12.26) $a_{\tau} = \pm a^{\tau}$, а у розглядуваному випадкові $a^{\tau} = const$, то, звісно, тоді й $a_{\tau} = const$, а рівняння (***) також містить два змінних параметри (або дві змінні) v_{τ} і t та є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Помноживши на dt його обидві частини, дістанемо відповідне рівняння з відокремленими змінними

$$dv_{\tau} = a_{\tau} \cdot dt,$$

для знаходження розв'язку якого інтегруємо його праву й ліву сторони у відповідних межах інтегрування:

$$\int_{v_{\tau 0}}^{v_{\tau}} dv_{\tau} = \int_{t_0}^{t} a_{\tau} \cdot dt,$$

де $v_{\tau 0}$ – проекція вектора $\vec{v}_0$ початкової швидкості точки на вісь τ, яка може бути як додатною ($v_{\tau 0} = +v_0$), так і від'ємною ($v_{\tau 0} = -v_0$), що залежить від напрямку вектора $\vec{v}_0$ відносно напрямку дугової осі s.

Тепер виносимо у правій частині за знак інтеграла сталу a_τ:

$$\int_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} dv_\tau = a_\tau \cdot \int_{t_0}^{t} dt$$

та після взяття відповідних інтегралів у лівій і правій частинах, отримаємо

$$v_\tau \Big|_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} = a_\tau \cdot t \Big|_{t_0 = 0}^{t}$$

або, підставивши відповідні межі інтегрування,

$$v_\tau - v_{\tau 0} = a_\tau \cdot t,$$

звідки дістанемо рівняння, котре визначає функціональну залежність від часу t проекції v_τ вектора $\vec{v}$ швидкості рівнозмінного руху точки на дотичну вісь τ у вигляді

$$v_\tau = v_{\tau 0} + a_\tau \cdot t. \qquad (****)$$

Урахувавши формулу (11.20), згідно з якою $v = |v_\tau|$, дістанемо

$$v = |v_{\tau 0} + a_\tau \cdot t|$$ **(12.40)** – ***рівняння*** (або ***закон***) ***зміни швидкості рівнозмінного руху точки***.

Виконаємо аналіз одержаної формули (12.40) та з'ясуємо ***її можливі варіанти***, кожний з яких відповідає певному виду руху точки (усього можливих варіантів буде ***чотири***).

1. Якщо $v_{\tau 0} > 0$ і $a_\tau > 0$, то у цьому разі $v_{\tau 0} = +v_0$ та $a_\tau = +a^\tau$ і формула (12.40) набуває вигляду

$$v = v_0 + a^\tau \cdot t. \qquad \textbf{(12.40,a)}$$

2. Якщо $v_{\tau 0} < 0$ та $a_\tau < 0$, то у цьому разі $v_{\tau 0} = -v_0$ і $a_\tau = -a^\tau$ та формула (12.40) набуває вигляду

$$v = \left| -v_0 - a^\tau \cdot t \right|. \qquad \textbf{(12.40,б)}$$

Неважко бачити, що в обох розглянутих варіантах модуль v швидкості точки постійно тільки зростає, напрямки векторів $\vec{v}$ і $\vec{a}^\tau$ є однаковими й, отже, в обох випадках точка виконує ***рівноприскорений рух***; різниця полягає в тому, що у першому варіанті точка рухається у напрямку зростання дугової координати (див. рис. 12.14, а та 12.16, а), а у другому варіанті – у протилежному напрямкові (див. рис. 12.14, б і 12.17, б).

3. Якщо $v_{\tau 0} > 0$ та $a_\tau < 0$, то у цьому разі $v_{\tau 0} = +v_0$ й $a_\tau = -a^\tau$ і формула (12.40) набуває вигляду

$$v = \left| v_0 - a^\tau \cdot t \right|. \qquad \textbf{(12.40,в)}$$

4. Якщо $v_{\tau 0} < 0$ та $a_\tau > 0$, то у цьому разі $v_{\tau 0} = -v_0$ й $a_\tau = +a^\tau$ і формула (12.40) набуває вигляду

$$v = \left| -v_0 + a^\tau \cdot t \right|. \qquad \textbf{(12.40,г)}$$

У двох останніх розглянутих варіантах модуль v швидкості точки зменшується, вектори $\vec{v}$ та $\vec{a}^\tau$ мають протилежні напрямки і, отже, в обох випадках точка виконує ***рівносповільнений рух***; різниця полягає в тому, що у третьому варіанті точка рухається у напрямку зростання дугової координати (див. рис. 12.15, а та 12.16, б), а у четвертому варіанті – у протилежному напрямкові (див. рис. 12.15, б та 12.17, а).

Також важливо розуміти, що у двох останніх розглянутих варіантах можлива ситуація, коли доданки v_0 і $a^\tau \cdot t$ у формулах (12.40,в) та (12.40,г) у певний момент часу можуть набувати однакових за величиною значень, через що їх різниця, яка визначає модуль v швидкості, у цей момент часу буде ставати рівною нулю. Якщо при вивченні конкретного руху точки виникає така ситуація, то це означає, що точка, *закінчивши рівносповільнений рух*, у зазначений момент часу *зупинилася на мить у певному положенні* на траєкторії. Якщо при цьому рух точки не закінчився, то, звісно, що у наступну мить точка *розпочне рівноприскорений рух*, як правило, у зворотному до моменту зупинення напрямкові.

Урахувавши формулу (11.18), згідно з якою $v_\tau = \frac{ds}{dt}$, подамо формулу (****) у вигляді

$$\frac{ds}{dt} = v_{\tau 0} + a_\tau \cdot t\,.$$

Отримане рівняння також містить тільки дві змінні величини s і t й, отже, також є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Тоді, помноживши на dt його обидві частини, дістанемо відповідне рівняння з відокремленими змінними

$$ds = \left(v_{\tau 0} + a_\tau \cdot t\right) \cdot dt\,,$$

розкривши дужки у його правій частині та зінтегрувавши обидві сторони у відповідних межах, матимемо

$$ds = v_{\tau 0} \cdot dt + a_\tau \cdot t \cdot dt\,.$$

і

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_{t_0}^{t} \left(v_{\tau 0} \cdot dt + a_\tau \cdot t \cdot dt\right).$$

Оскільки інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів, а сталі множники (у цьому разі $v_{\tau 0}$ й a_τ) можна виносити за знак інтеграла, то

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_{t_0}^{t} \left(v_{\tau 0} \cdot dt\right) + \int_{t_0}^{t} \left(a_\tau \cdot t \cdot dt\right)$$

та

$$\int_{s_0}^{s} ds = v_{\tau 0} \cdot \int_{t_0}^{t} dt + a_\tau \cdot \int_{t_0}^{t} t \cdot dt .$$

Виконавши інтегрування, отримаємо

$$s\Big|_{s_0}^{s} = v_{\tau 0} \cdot t\Big|_{t_0=0}^{t} + a_\tau \cdot \frac{t^2}{2}\Bigg|_{t_0=0}^{t},$$

а після підстановки відповідних меж інтегрування

$$s - s_0 = v_{\tau 0} \cdot t + a_\tau \cdot \frac{t^2}{2},$$

звідки

$$s = s_0 + v_{\tau 0} \cdot t + \frac{a_\tau \cdot t^2}{2}$$ **(12.41)** – ***рівняння*** (або ***закон***) ***рівнозмінного руху точки***.

Звісно, що, як і формула (12.40), одержана формула (12.41) також має ***свої можливі варіанти***, кожний з яких відповідає певному виду руху точки. Наприклад, якщо $v_{\tau 0} > 0$ та $a_\tau > 0$, то у цьому разі $v_{\tau 0} = +v_0$ й $a_\tau = +a^\tau$ і формула (12.41) набуває вигляду

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a^\tau \cdot t^2}{2}, \qquad \textbf{(12.41,a)}$$

який відповідає ***рівноприскореному рухові*** точки тільки у напрямку зростання дугової координати s (аналіз інших можливих варіантів пропонується охочим виконати самостійно).

У формулах (12.40) та (12.41) проекції $v_{\tau 0}$ і a_τ самодостатньо та без будь-яких додаткових міркувань визначають знаки відповідних доданків цих формул, а також вид і напрямок руху точки по траєкторії.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ТА БІЛЕТІВ ДЛЯ ЕКСПРЕС-ТЕСТУВАННЯ Кт-2

(ПРИСКОРЕННЯ РУХУ ТОЧКИ – тема 12)

1. Як називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчають механічні рухи різних матеріальних тіл без урахування сил, котрі спричиняють (або спричинили) ці рухи? (3)
2. Що в класичній механіці називають моментом часу? (6)
3. Що в класичній механіці називають проміжком часу? (6)
4. З чим пов'язують початок умовно нерухомої системи відліку при дослідженні рухів матеріальних тіл поблизу поверхні Землі? (3)
5. Як розподіляють рух точки за виглядом її траєкторії руху? (6)
6. Дайте визначення поняття «швидкість руху точки». (7)
7. Дайте визначення рівномірного руху точки. (5)
8. Дайте визначення нерівномірного руху точки. (5)
9. Дайте визначення прискореного руху точки. (5)
10. Дайте визначення сповільненого руху точки. (5)
11. Дайте визначення поняття «прискорення руху точки». (7)
12. Яка одиниця вимірювання прискорення руху точки в Міжнародній системі одиниць (СІ)? (1)
13. Вектор $\vec{a}$ прискорення руху точки – це фіксований, ковзний чи вільний вектор? (3)
14. Як позначають вектор прискорення руху точки? (2)
15. Як позначають модуль прискорення руху точки? (2)
16. Як (чим) визначають положення точки при векторному способі задання руху точки? (6)
17. Запишіть рівняння руху точки у векторній формі. (7)
18. Чому дорівнює (як визначається) дійсна (миттєва) швидкість $\vec{v}$ руху точки при векторному способі задання руху? (7)
19. Як позначають у теоретичній механіці оператор диференціювання за часом? (4)
20. Що у теоретичній механіці означає крапка над значенням певної функції? (3)

21. Чому дорівнює середнє прискорення $\vec{a}_{сер}$ руху точки за проміжок часу Δt при векторному способі визначення руху точки? (8)

22. Як напрямлений вектор середнього прискорення $\vec{a}_{сер}$ руху точки за проміжок часу Δt при векторному способі визначення руху точки? (8)

23. При векторному способі визначення руху точки середнє прискорення $\vec{a}_{сер}$ відображає характер дійсного руху точки за проміжок часу Δt *точно* чи *наближено*? (4)

24. Що необхідно для збільшення точності значення середнього прискорення $\vec{a}_{сер}$ точки за проміжок часу Δt при векторному способі визначення руху точки? (6)

25. Чому дорівнює (як визначається) дійсне (миттєве) прискорення $\vec{a}$ точки при векторному способі задання руху точки? (9)

26. Як (чим) визначають положення точки при координатному способі задання руху точки? (6)

27. Запишіть рівняння руху точки у координатній формі у випадку загального просторового руху точки. (7)

28. Запишіть у доречному вигляді рівняння руху точки в координатній формі у випадку руху точки в певній площині. (7)

29. У якому разі при координатному способі задання прямолінійного руху точки цей рух може бути визначений одним рівнянням? (5)

30. Чому дорівнює швидкість $\vec{v}$ руху точки при координатному способі визначення руху? (7)

31. Чому дорівнюють проекції v_x, v_y та v_z на осі декартової системи координат вектора $\vec{v}$ швидкості руху точки? (6)

32. Чому дорівнює модуль v швидкості точки при координатному способі визначення руху? (6)

33. Вивести формулу прискорення $\vec{a}$ точки при координатному способі визначення руху точки. (12)

34. Чому дорівнює прискорення $\vec{a}$ точки при координатному способі визначення руху точки? (9)

35. Чому дорівнюють проекції a_x, a_y та a_z на декартові координатні осі вектора $\vec{a}$ прискорення руху точки? (8)

36. Чому дорівнює модуль a прискорення точки при координатному способі визначення руху точки? (8)

37. Чим визначають напрямок вектора $\vec{a}$ прискорення точки при координатному способі задання руху? (6)

38. Записати формули, за якими обчислюють значення напрямних косинусів, що визначають напрямок вектора $\vec{a}$ прискорення точки при координатному способі задання руху точки. (8)

39. Якщо при координатному способі визначення прямолінійного руху точки вздовж декартової осі Ox у певний момент часу похідні $\frac{dx}{dt} > 0$ та $\frac{d^2x}{dt^2} > 0$, то що можна сказати про рух точки в цю мить? (9)

40. Якщо при координатному способі задання прямолінійного руху точки вздовж декартової осі Ox у певний момент часу похідні $\frac{dx}{dt} > 0$ і $\frac{d^2x}{dt^2} < 0$, то що можна сказати про рух точки в цю мить? (9)

41. Якщо при координатному способі задання прямолінійного руху точки вздовж декартової осі Ox у певний момент часу похідні $\frac{dx}{dt} < 0$ і $\frac{d^2x}{dt^2} > 0$, то що можна сказати про рух точки в цю мить? (9)

42. Якщо при координатному способі визначення прямолінійного руху точки вздовж декартової осі Ox у певний момент часу похідні $\frac{dx}{dt} < 0$ та $\frac{d^2x}{dt^2} < 0$, то що можна сказати про рух точки в цю мить? (9)

43. Якщо при координатному способі визначення прямолінійного руху точки вздовж декартової осі Ox у певний момент часу похідні $\frac{dx}{dt}$ та $\frac{d^2x}{dt^2}$ одного знака, то що можна сказати про рух точки в цю мить? (8)

44. Якщо при координатному способі визначення прямолінійного руху точки вздовж декартової осі Ox у певний момент часу похідні $\frac{dx}{dt}$ і $\frac{d^2x}{dt^2}$ мають різні знаки, то що можна сказати про рух точки в цю мить? (8)

45. Якщо при координатному способі визначення прямолінійного руху точки вздовж декартової осі Ox у будь-який момент часу похідна $\frac{d^2x}{dt^2}=0$, то що можна сказати про рух точки? (8)

46. Якщо при координатному способі визначення прямолінійного руху точки вздовж декартової осі Ox у певний момент часу при неперервному русі похідна $\frac{d^2x}{dt^2}=0$, то що можна сказати про рух точки в цю мить? (8)

47. У якому випадку рух точки можна задати у натуральній формі визначення руху? (6)

48. Що при натуральному способі задання руху точки називають дуговою віссю? (6)

49. Що при натуральному способі визначення руху точки називають дуговою координатою? (6)

50. Запишіть рівняння руху точки у натуральній формі. (7)

51. Коли при натуральному способі визначення руху точки приріст Δs дугової координати за проміжок часу Δt є додатною величиною? (6)

52. Коли при натуральному способі визначення руху точки приріст Δs дугової координати за проміжок часу Δt є від’ємною величиною? (6)

53. Зі скількох осей складається система натуральних осей? (7)

54. З яких осей складається система натуральних осей? (9)

55. Як напрямлена нормальна вісь n натуральної системи відліку? (6)

56. Що в кінематиці точки позначають символом $\vec{\tau}$? (5)

57. Яку вісь при натуральному способі визначення руху точки позначають символом τ? (4)

58. Що в кінематиці точки позначають символом $\vec{n}$? (5)

59. Яку вісь при натуральному способі визначення руху точки позначають символом n? (4)

60. Що в кінематиці точки позначають символом $\vec{b}$? (5)

61. Яку вісь при натуральному способі визначення руху точки позначають символом b? (4)

62. Система натуральних осей $\tau n b$ є рухомою чи умовно нерухомою системою відліку? (4)

63. З якою точкою пов'язаний початок відліку системи натуральних осей $\tau n b$? (5)

64. Чому дорівнює швидкість $\vec{v}$ точки при натуральному способі визначення руху? (7)

65. На які осі (або на яку вісь) проектується вектор $\vec{v}$ швидкості точки при натуральному способі визначення руху? (5)

66. Чому дорівнює проекція v_τ на дотичну вісь τ натуральної системи відліку вектора $\vec{v}$ швидкості руху точки? (7)

67. Чому дорівнює модуль v швидкості точки при натуральному способі визначення руху? (7)

68. Чому дорівнює повне прискорення $\vec{a}$ точки при натуральному способі визначення руху в загальному випадкові? (9)

69. Що визначає векторна сума $\vec{n}\cdot\frac{v^2}{\rho}+\vec{\tau}\cdot\frac{dv_\tau}{dt}$ при натуральному способі задання руху точки? (7)

70. Що визначає векторна сума $\vec{n}\cdot a_n+\vec{\tau}\cdot a_\tau$ при натуральному способі задання руху точки? (6)

71. Що при натуральному способі задання руху точки у формулі $\vec{a}=\vec{n}\cdot a_n+\vec{\tau}\cdot a_\tau$ визначає векторна величина $\vec{a}$? (4)

72. На які осі (або на яку вісь) проектується вектор $\vec{a}$ повного прискорення точки при натуральному способі визначення руху точки в загальному випадкові? (7)

73. Чому дорівнює проекція повного прискорення $\vec{a}$ точки на бінормальну вісь b системи натуральних осей при натуральному способі визначення руху точки? (7)

74. Як при натуральному способі задання руху точки позначають проекцію вектора $\vec{a}$ на нормальну вісь n натуральної системи відліку? (4)

75. Що при натуральному способі задання руху точки у формулі $\vec{a}=\vec{n}\cdot a_n+\vec{\tau}\cdot a_\tau$ визначає множник a_n? (5)

76. Що при натуральному способі задання руху точки визначає формула $a_n=\frac{v^2}{\rho}$? (5)

77. Чому дорівнює проекція a_n прискорення $\vec{a}$ точки на головну нормальну вісь n у загальному випадкові? (9)

78. Що при натуральному способі задання руху точки у формулі $\vec{a}=\vec{n}\cdot a_n+\vec{\tau}\cdot a_\tau$ визначає множник a_τ? (5)

79. Як при натуральному способі задання руху точки позначають проекцію вектора $\vec{a}$ на дотичну вісь τ натуральної системи відліку? (4)

80. Що при натуральному способі задання руху точки визначає формула $a_\tau = \dfrac{dv_\tau}{dt} = \dot{v}_\tau$? (5)

81. Що при натуральному способі задання руху точки визначає формула $a_\tau = \dfrac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$? (5)

82. Чому дорівнює проекція a_τ прискорення $\vec{a}$ точки на дотичну вісь τ у загальному випадкові? (10)

83. Що при натуральному способі задання руху точки визначає вираз $\sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$? (5)

84. Що при натуральному способі задання руху точки визначає вираз $\sqrt{\dfrac{v^4}{\rho^2} + \left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2}$? (6)

85. Чим визначають напрямок вектора $\vec{a}$ прискорення точки при натуральному способі задання руху точки? (6)

86. Записати формули, за якими обчислюють значення напрямних косинусів, що визначають напрямок вектора $\vec{a}$ прискорення точки при натуральному способі задання руху точки. (8)

87. Що при натуральному способі задання руху точки позначають символом $\vec{a}^n$? (4)

88. Як при натуральному способі задання руху точки позначають вектор нормального прискорення точки? (4)

89. Чому дорівнює вектор $\vec{a}^n$ нормального прискорення точки при натуральному способі визначення руху точки в загальному випадкові? (9)

90. Що при натуральному способі задання руху точки визначає формула $\vec{a}^n = \vec{n} \cdot \dfrac{v^2}{\rho}$? (5)

91. Де знаходиться (лежить) вектор $\vec{a}^n$ при натуральному способі визначення руху точки в загальному випадкові? (4)

92. Як напрямлений вектор $\vec{a}^n$ нормального прискорення точки при натуральному способі визначення руху точки в загальному випадкові? (6)

93. Як позначають проекцію на нормальну вісь n натуральної системи відліку вектора $\vec{a}^n$ нормального прискорення точки при натуральному способі задання руху точки? (4)

94. Як проектується вектор $\vec{a}^n$ нормального прискорення на нормальну вісь n натуральної системи відліку при натуральному способі визначення руху точки в загальному випадкові? (6)

95. За якою формулою визначають проекцію a_n на нормальну вісь n натуральної системи відліку вектора $\vec{a}^n$ нормального прискорення точки при натуральному способі задання руху точки? (9)

96. Що при натуральному способі задання руху точки визначає вираз $\frac{v^2}{\rho}$? (5)

97. Чи може бути додатною проекція a_n на нормальну вісь n натуральної системи відліку вектора $\vec{a}^n$ нормального прискорення точки при натуральному способі визначення руху точки? (4)

98. Чи може бути від'ємною проекція a_n на нормальну вісь n натуральної системи відліку вектора $\vec{a}^n$ нормального прискорення точки при натуральному способі визначення руху точки? (4)

99. Як позначають модуль нормального прискорення $\vec{a}^n$ точки при натуральному способі задання руху точки? (4)

100. Чому дорівнює модуль a^n нормального прискорення $\vec{a}^n$ точки при натуральному способі визначення руху точки в загальному випадкові? (9)

101. Якщо точка рухається по колу радіуса $R = 6\,см$ зі сталою швидкістю $v = 7\,\frac{см}{сек}$ протягом $8\,секунд$, то чому дорівнює радіус кривини ρ траєкторії руху точки? (4)

102. Якщо точка рухається по колу радіуса $R = 9\,см$ зі сталою швидкістю $v = 6\,\frac{см}{сек}$, то чому дорівнює модуль a^n нормального прискорення точки? (7)

103. Чому дорівнює радіус кривини ρ траєкторії руху точки, якщо точка виконує прямолінійний рух? (5)

104. Чому дорівнює нормальне прискорення $\vec{a}^n$ точки, якщо точка виконує прямолінійний рух? (5)

105. У якому випадку нормальне прискорення $\vec{a}^n$ точки дорівнює нулеві? (5)

106. Що при натуральному способі визначення руху точки позначають символом $\vec{a}^\tau$? (4)

107. Як при натуральному способі задання руху точки позначають вектор дотичного (тангенціального) прискорення точки? (4)

108. Чому дорівнює вектор $\vec{a}^\tau$ дотичного (тангенціального) прискорення точки при натуральному способі визначення руху точки в загальному випадкові? (9)

109. Що при натуральному способі задання руху точки визначає формула $\vec{a}^\tau = \vec{\tau} \cdot \frac{dv_\tau}{dt}$? (5)

110. Де знаходиться (лежить) вектор $\vec{a}^{\tau}$ дотичного (тангенціального) прискорення точки при натуральному способі визначення руху точки? (4)

111. Як позначають проекцію на дотичну вісь τ натуральної системи відліку вектора $\vec{a}^{\tau}$ дотичного (тангенціального) прискорення точки при натуральному способі задання руху точки? (4)

112. Як проектується вектор $\vec{a}^{\tau}$ дотичного (тангенціального) прискорення на дотичну вісь τ натуральної системи відліку при натуральному способі визначення руху точки в загальному випадкові? (6)

113. Яка формула визначає проекцію a_{τ} на дотичну вісь τ натуральної системи відліку вектора $\vec{a}^{\tau}$ дотичного (тангенціального) прискорення точки при натуральному способі задання руху? (9)

114. Що при натуральному способі задання руху точки визначає похідна $\dfrac{dv_{\tau}}{dt}$? (5)

115. Що при натуральному способі задання руху точки визначає похідна $\dfrac{d^2s}{dt^2}$? (5)

116. У разі задання руху точки натуральним способом похідні $\dfrac{dv_{\tau}}{dt}$ і $\dfrac{d^2s}{dt^2}$ визначають одне й те саме чи різні поняття? (4)

117. При натуральному способі задання руху точки чим відрізняються поняття, які визначають похідні $\dfrac{dv_{\tau}}{dt}$ та $\dfrac{d^2s}{dt^2}$? (3)

118. Чи може бути додатною проекція a_{τ} на дотичну вісь τ натуральної системи відліку вектора $\vec{a}^{\tau}$ дотичного (тангенціального)

прискорення точки при натуральному способі задання руху точки? (4)

119. Чи може бути від'ємною проекція a_τ на дотичну вісь τ натуральної системи відліку вектора $\vec{a}^\tau$ дотичного (тангенціального) прискорення точки при натуральному способі задання руху точки? (4)

120. При натуральному способі задання руху точки що визначає формула $\vec{a}^\tau = \vec{\tau} \cdot a_\tau$? (5)

121. При натуральному способі задання руху точки в формулі $\vec{a}^\tau = \vec{\tau} \cdot a_\tau$ що визначає множник a_τ? (5)

122. При натуральному способі задання руху точки у виразі $\vec{a}^\tau = \vec{\tau} \cdot a_\tau$ за якою формулою знаходять значення множника a_τ? (9)

123. Як позначають модуль дотичного (тангенціального) прискорення $\vec{a}_\tau$ точки при натуральному способі задання руху точки? (4)

124. Чому дорівнює модуль a^τ дотичного (тангенціального) прискорення $\vec{a}^\tau$ точки при натуральному способі визначення руху точки в загальному випадкові? (9)

125. Як напрямлений вектор $\vec{a}^\tau$ дотичного (тангенціального) прискорення руху точки при натуральному способі визначення руху точки в загальному випадкові? (6)

126. Якщо при натуральному способі задання руху точки в певний момент часу похідні $\dot{s} > 0$ та $\ddot{s} > 0$, то що можна сказати про рух точки в цю мить? (9)

127. Якщо при натуральному способі задання руху точки в певний момент часу похідні $\dot{s} > 0$ та $\ddot{s} < 0$, то що можна сказати про рух точки в цю мить? (9)

128. Якщо при натуральному способі задання руху точки в певний момент часу похідні $\frac{ds}{dt} < 0$ та $\frac{d^2s}{dt^2} > 0$, то що можна сказати про рух точки в цю мить? (9)

129. Якщо при натуральному способі задання руху точки в певний момент часу похідні $\frac{ds}{dt} < 0$ і $\frac{d^2s}{dt^2} < 0$, то що можна сказати про рух точки в цю мить? (9)

130. Якщо при натуральному способі задання руху точки в певний момент часу похідні $\frac{ds}{dt}$ та $\frac{d^2s}{dt^2}$ одного знака, то що можна сказати про рух точки в цю мить? (8)

131. Якщо при натуральному способі задання руху точки в певний момент часу похідні $\frac{ds}{dt}$ і $\frac{d^2s}{dt^2}$ мають різні знаки, то що можна сказати про рух точки в цю мить? (8)

132. Яка математична ознака того, що вектори швидкості $\vec{v}$ та дотичного (тангенціального) прискорення $\vec{a}^{\tau}$ руху точки в певний момент часу за напрямками збігаються? (9)

133. Який рух виконує точка у випадку, коли вектори швидкості $\vec{v}$ і дотичного (тангенціального) прискорення $\vec{a}^{\tau}$ руху точки за напрямками збігаються? (7)

134. Яка математична ознака того, що вектори швидкості $\vec{v}$ та дотичного (тангенціального) прискорення $\vec{a}^{\tau}$ руху точки в певний момент часу за напрямками протилежні? (9)

135. Який рух виконує точка у випадку, коли вектори швидкості $\vec{v}$ і дотичного (тангенціального) прискорення $\vec{a}^{\tau}$ руху точки за напрямками протилежні? (7)

136. Якщо при натуральному способі визначення руху точки в будь-який та в кожний момент часу похідна $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$, то що можна сказати про рух точки? (8)

137. Якщо при натуральному способі задання руху точки в певний момент часу при неперервному русі похідна $\ddot{s} = 0$, то що можна сказати про рух точки в цю мить? (8)

138. Яка математична ознака того, що дотичне (тангенціальне) прискорення $\vec{a}^{\tau}$ руху точки дорівнює нулеві? (8)

139. Який рух виконує точка у випадку, коли в будь-який (або у кожний) момент часу руху дотичне (тангенціальне) прискорення $\vec{a}^{\tau}$ точки дорівнює нулеві? (7)

140. Що при натуральному способі задання руху точки у виразі $\vec{a} = \vec{a}^n + \vec{a}^{\tau}$ визначає доданок $\vec{a}^n$? (5)

141. Що при натуральному способі задання руху точки у виразі $\vec{a} = \vec{a}^n + \vec{a}^{\tau}$ визначає доданок $\vec{a}^{\tau}$? (5)

142. Що при натуральному способі задання руху точки у виразі $\vec{a} = \vec{a}^n + \vec{a}^{\tau}$ визначає векторна величина $\vec{a}$? (4)

143. При натуральному способі визначення руху точки в загальному випадкові який кут між векторами $\vec{a}^n$ і $\vec{a}^{\tau}$? (8)

144. Що при натуральному способі задання руху точки визначає корінь квадратний $\sqrt{(a^n)^2 + (a^{\tau})^2}$? (6)

145. При натуральному способі визначення руху точки в загальному випадку чому дорівнює модуль повного прискорення руху точки? (9)

146. Що при натуральному способі задання руху точки в формулі $a = \sqrt{(a^n)^2 + (a^{\tau})^2}$ визначає a^n? (5)

147. Що при натуральному способі задання руху точки у формулі $a=\sqrt{\left(a^{n}\right)^{2}+\left(a^{\tau}\right)^{2}}$ визначає a^{τ}? (5)

148. Якщо при русі точки кут Ω між додатними напрямками векторів $\vec{v}$ і $\vec{a}$ гострий, то який рух виконує точка? (9)

149. Якщо при русі точки кут Ω між додатними напрямками векторів $\vec{v}$ та $\vec{a}$ тупий, то який рух виконує точка? (9)

150. Якщо точка рухається прискорено, то який кут між додатними напрямками векторів $\vec{v}$ і $\vec{a}$? (8)

151. Якщо точка рухається сповільнено, то який кут між додатними напрямками векторів $\vec{v}$ та $\vec{a}$? (8)

152. Якщо при натуральному способі задання руху точки у певний момент часу похідні $\dot{s}$ і $\ddot{s}$ одного знака, то в цю мить який кут між додатними напрямками векторів $\vec{v}$ та $\vec{a}$? (8)

153. Якщо при натуральному способі задання руху точки у певний момент часу похідні $\dot{s}$ і $\ddot{s}$ різного знака, то в цю мить який кут між додатними напрямками векторів $\vec{v}$ та $\vec{a}$? (8)

154. Чому дорівнює повне прискорення $\vec{a}$ руху точки, якщо точка виконує нерівномірний криволінійний рух? (8)

155. Який рух виконує точка, коли дотичне (тангенціальне) $\vec{a}^{\tau}$ та нормальне $\vec{a}^{n}$ прискорення (кожне) не рівні нулю? (8)

156. Чому дорівнює повне прискорення $\vec{a}$ руху точки, якщо дотичне (тангенціальне) $\vec{a}^{\tau}$ та нормальне $\vec{a}^{n}$ прискорення (кожне) не дорівнюють нулеві? (7)

157. Чому дорівнює повне прискорення $\vec{a}$ руху точки, якщо точка виконує рівномірний криволінійний рух? (8)

158. Який рух виконує точка, коли дотичне (тангенціальне) $\vec{a}^{\tau}$ прискорення рівне нулю, а нормальне $\vec{a}^{n}$ прискорення не дорівнює нулеві? (8)

159. Чому дорівнює повне прискорення $\vec{a}$ руху точки, якщо дотичне (тангенціальне) $\vec{a}^{\tau}$ прискорення рівне нулю, а нормальне $\vec{a}^{n}$ прискорення не дорівнює нулеві? (6)

160. У якому випадку модуль a^{n} нормального прискорення дорівнює модулю a повного прискорення руху точки? (7)

161. У якому випадку модуль нормального a^{n} прискорення більше модуля повного прискорення a руху точки? (5)

162. У якому випадку модуль нормального a^{n} прискорення менше модуля повного прискорення a руху точки? (7)

163. Чому дорівнює повне прискорення $\vec{a}$ руху точки, якщо точка виконує нерівномірний прямолінійний рух? (8)

164. Який рух виконує точка, коли її дотичне (тангенціальне) $\vec{a}^{\tau}$ прискорення не дорівнює нулеві, а нормальне $\vec{a}^{n}$ прискорення рівне нулю? (8)

165. Чому дорівнює повне прискорення $\vec{a}$ руху точки, якщо дотичне (тангенціальне) $\vec{a}^{\tau}$ прискорення не дорівнює нулеві, а нормальне $\vec{a}^{n}$ прискорення рівне нулю? (6)

166. У якому випадку модуль a^{τ} дотичного (тангенціального) прискорення дорівнює модулю a повного прискорення руху точки? (7)

167. Як рухається точка, якщо модуль a^{τ} дотичного (тангенціального) прискорення дорівнює модулю a повного прискорення та одночасно дорівнює проекції a_x на вісь x декартової системи координат вектора $\vec{a}$ повного прискорення точки (тобто як рухається точка, якщо $a^{\tau} = a$ й $a^{\tau} = a_x$)? (10)

168. У якому випадку модуль a^{τ} дотичного (тангенціального) прискорення більше модуля a повного прискорення руху точки? (5)

169. У якому випадку модуль a^τ дотичного (тангенціального) прискорення менше модуля a повного прискорення руху точки? (7)

170. Чому дорівнює повне прискорення $\vec{a}$ руху точки, якщо точка виконує рівномірний прямолінійний рух? (7)

171. Який рух виконує точка, коли дотичне (тангенціальне) $\vec{a}^\tau$ та нормальне $\vec{a}^n$ прискорення (кожне) рівні нулю? (7)

172. Чому дорівнює повне прискорення $\vec{a}$ руху точки у випадку, коли дотичне (тангенціальне) $\vec{a}^\tau$ й нормальне $\vec{a}^n$ прискорення (кожне) дорівнюють нулеві? (5)

173. Як називають рух точки, якщо при русі модуль швидкості v її лишається незмінним, тобто $v = const$? (4)*

174. Вивести закон рівномірного руху точки. (9)

175. Записати закон рівномірного руху точки. (8)

176. Дайте визначення *рівнозмінного руху точки.* (9)

177. Як називають рух точки, якщо при русі модуль дотичного (тангенціального) прискорення a^τ її лишається незмінним, тобто $a^\tau = const$? (7)

178. Як називають рух точки, якщо за кожний однаковий проміжок часу Δt модуль швидкості руху точки змінюється на однакову величину Δv? (7)

179. Вивести формулу швидкості v рівнозмінного руху точки. (9)

180. Записати формулу швидкості v рівнозмінного руху точки. (8)

181. Вивести закон рівнозмінного руху точки. (11)

182. Записати закон рівнозмінного руху точки. (8)

* Питання 173, як і інші, розташовані тут вище та надруковані аналогічним шрифтом (усього у кількості 38), є питанням з білетів попереднього експрес-тестування Кт-1.

ДОДАТОК

Приклад білета для проведення експрес-тестування

Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка»

Рівень вищої освіти Перший (бакалаврський)

Галузь знань 18 – Виробництво та технології

Спеціальність 185 – Нафтогазова інженерія та технології Семестр II

Навчальна дисципліна Теоретична механіка

ЕКСПРЕС-ТЕСТУВАННЯ Кт-1

ВАРІАНТ № 1

1. Дайте визначення кінематики. (9)
2. Яка одиниця вимірювання елементів простору в Міжнародній системі одиниць (СІ)? (2)
3. Що в класичній механіці називають *проміжком часу*? (7)
4. Чому у фізичному всесвіті не існує нерухомої системи відліку? (4)
5. Дайте визначення поняття «*траєкторія руху точки*». (9)
6. Як розподіляють рух точки залежно від значення модуля швидкості точки? (8)
7. Дайте визначення *сповільненого руху точки*. (7)
8. Як позначають *вектор* прискорення руху точки? (4)
9. Що в класичній механіці називають *законом руху точки*? (9)
10. У якому разі рух точки в певній площині при координатному способі задання руху цієї точки може бути визначений двома рівняннями? (7)
11. Як називають вісь, що проходить уздовж відомої траєкторії руху точки при натуральному способі визначення руху? (6)
12. Рівняння руху точки у натуральній формі однозначно встановлює положення точки у фізичному просторі чи положення точки на траєкторії руху відносно певного початку відліку? (6)
13. Що можна сказати про приріст Δs дугової координати у випадку, коли при натуральному способі визначення руху за проміжок часу Δt точка рухається тільки у напрямку, протилежному до додатного напрямку дугової осі? (7)
14. На які осі (або на яку вісь) проектується вектор $\vec{v}$ швидкості точки при натуральному способі визначення руху? (7)
15. Чому дорівнює швидкість $\vec{v}$ точки при натуральному способі визначення руху у випадку, коли вона рухається тільки в напрямку зростання дугової координати? (8)

Склав викладач теоретичної механіки С.М. Жигилій
10 серпня 2023 року

Затверджено на засіданні кафедри будівельних конструкцій
Протокол від 15 серпня 2023 року № 1

ЛІТЕРАТУРНІ ДЖЕРЕЛА

1. Павловський М.А. Кінематика та динаміка точки. Комп'ютерний курс: підручник / М.А. Павловський, Л.Ю. Акінфієва, А.І. Юрокін, С.Я. Свістунов. – К. : Либідь, 1993. – 248 с.
2. Бушок Г.Ф. Курс фізики: навч. посібник: У 2 кн. / Г.Ф. Бушок, В.В. Левандовський, Г.Ф. Півень. – К.: Либідь, 2001. – 448 с.
3. Жигилій С.М. Статика, ч. 1: курс лекцій з дисципліни «Теоретична механіка» для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти / С.М. Жигилій. – Полтава: Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка», 2023. – 202 с.
4. Ruina A. Introduction to Statics and Dynamics / Andy Ruina, Rudra Pratap. – Oxford University Press (Preprint), 2011. – 1029 p.
5. Beer F. Vector mechanics for engineers: statics and dynamics, tenth edition / Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, Jr., David F. Mazurek, Phillip J. Cornwell – New York: McGraw-Hill Companies, Inc., 2013. – 1360 p.
6. Павловський М.А. Теоретична механіка: підручник / М.А. Павловський. – К. : Техніка, 2002. – 512 с.
7. Timoshenko S. Engineering mechanics, fourth edition / S. Timoshenko, D. Young. – New York: McGraw-Hill book Company, Inc, 1960. – 508 p.
8. Muhovec Ivan. Tehnička mehanika sažetak osnova statike: posebno izdanje / Ivan Muhovec, Ivan Paska, Aleksej Aniskin. – Varaždin: Sveučilište Sjever, 2015. – 169 str.

Навчально-методичне видання

Жигилій Сергій Михайлович

КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

Курс лекцій
з дисципліни «ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»

У авторській редакції

Комп’ютерна верстка – авторська